UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Método Simplex

Víctor Viana

victor.viana@noreste.udelar.edu.uy

21/4/2026

Contenido

El Método Simplex

- El **Método Simplex** es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico, sin restricción en el número de variables.
- Es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso.
- El **Método Simplex** es un procedimiento algebraico. Sin embargo, sus conceptos fundamentales son geométricos.

- El método consiste en "recorrer"' los vértices de un poliedro (región factible en mas de dos dimensiones) de manera que aumente o disminuya el valor de la función objetivo (según sea el contexto, maximizar o minimizar).
- Dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito siempre se hallará solución.

El Método Simplex (cont.)

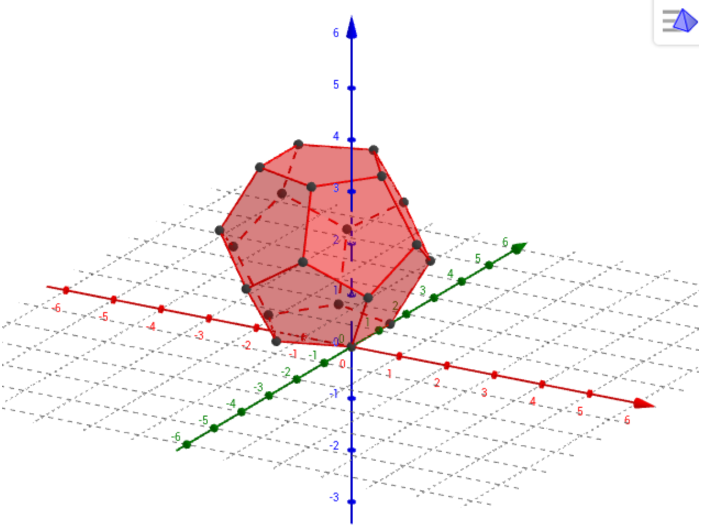


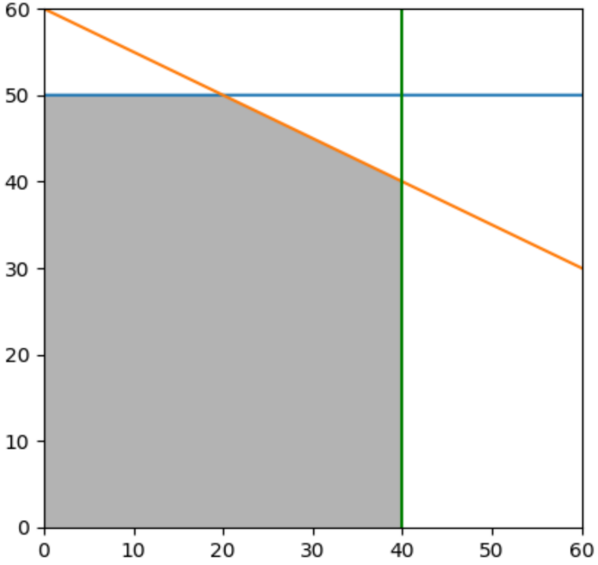
Figura: Poliedro que representa la región factible con 3 variables de decisión

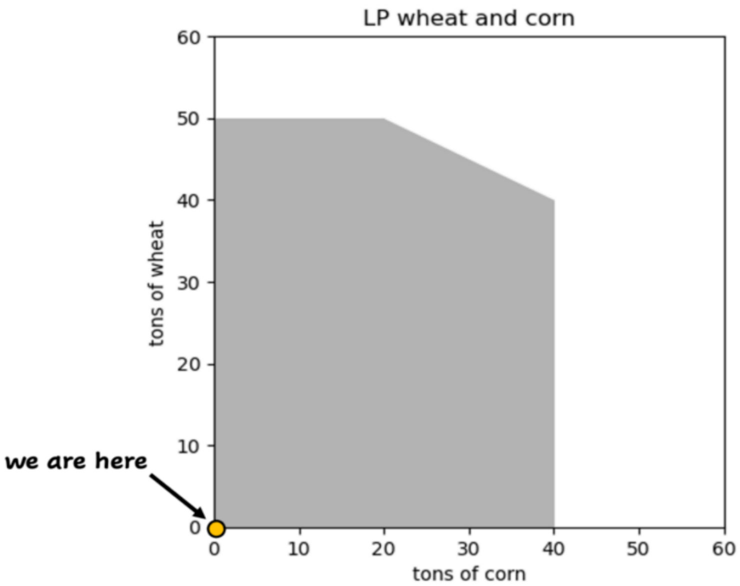
Ejemplo de un problema de programación lineal

- Supongamos que un agricultor tiene 120 ha de tierra para cultivar dos cosechas: trigo y maíz.
- El trigo requiere 2 ha de tierra por tonelada, y el maíz, 1 ha por tonelada.
- El agricultor quiere maximizar las ganancias, que son de \$100 por tonelada de trigo y \$150 por tonelada de maíz.
- Además, tiene un límite de producción de 50 toneladas de trigo y 40 toneladas de maíz.

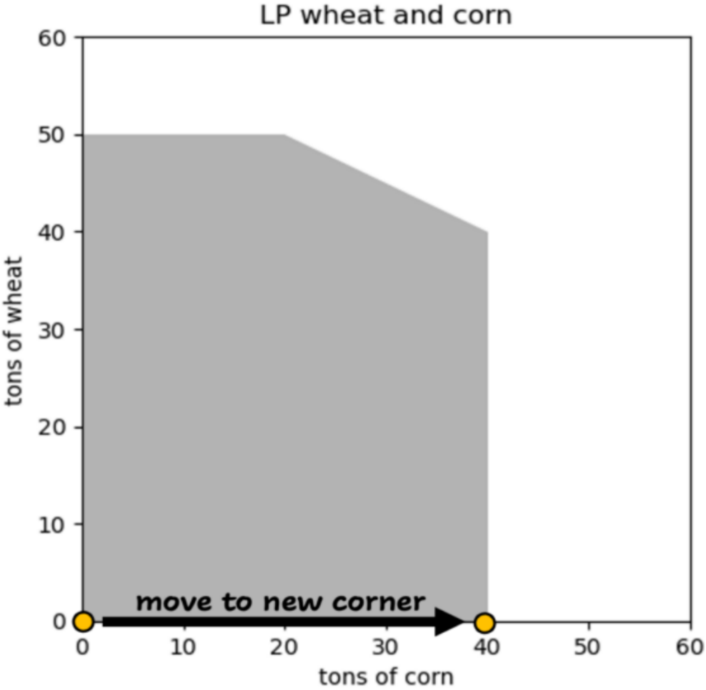
- variables de decisión: x_1 toneladas de maiz a plantar, x_2 toneladas de trigo a plantar.
- función objetivo: $150x_1 + 100x_2$
- restricciones:
  - $x_1 \leq 40$
  - $x_2 \leq 50$
  - $x_1 + 2x_2 \leq 120$
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Región Factible

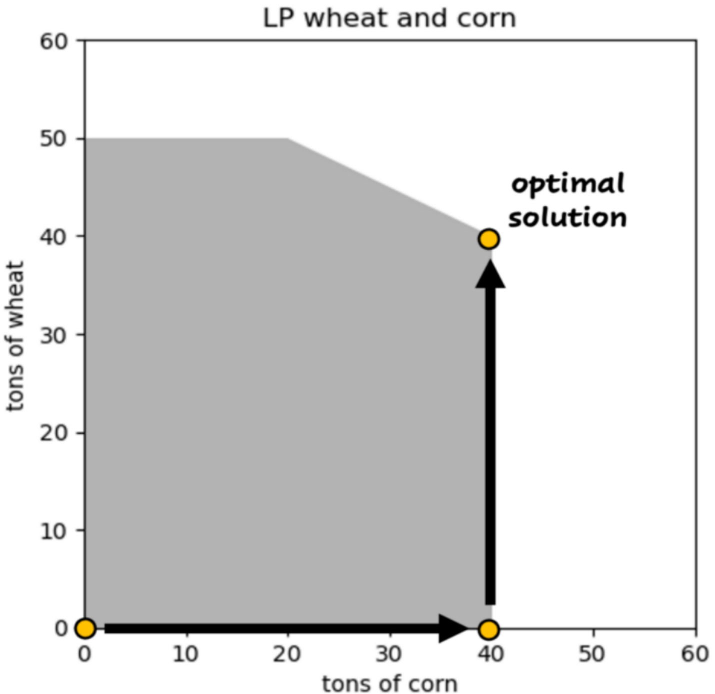




LP wheat and corn
tons of wheat
tons of corn
we are here
0
10
20
30
40
50
60



LP wheat and corn
tons of wheat
tons of corn
move to new corner
0
10
20
30
40
50
60


LP wheat and corn
optimal
solution
tons of wheat
tons of corn
0
10
20
30
40
50
60

Un ejemplo con tres variables

Consideremos el siguiente ejemplo de Programación Lineal con tres variables de decisión:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
\text{subjeto a:} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Un ejemplo con tres variables (cont.)

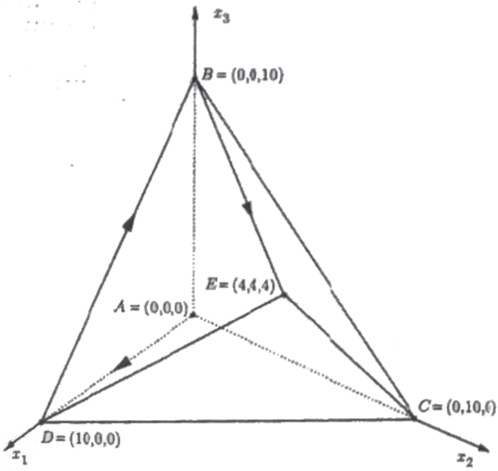


Figura: Región factible del ejemplo anterior. Costo en el vertice A(0,0,0) es 0, osto en el vertice B(0,0,10) es -120, costo en el vertice C(0,10,0) es -120, costo en el vertice D(10, 0, 0) es -100, costo en E(4, 4, 4) es -136. E es el óptimo.

Conceptos clave de solución

- **Concepto de solución 1**: El método símplex analiza sólo las soluciones FEV.
- Para cualquier problema con al menos una solución óptima, la ubicación de una de ellas sólo requiere encontrar una mejor solución FEV.
- El problema debe tener soluciones factibles en los vértices, lo cual se asegura si la región factible es acotada.

Conceptos clave de solución(cont.)

- **Concepto de solución 2**: El método símplex es un algoritmo iterativo (procedimiento de solución sistemático que repite una serie fija de pasos, llamada iteración, hasta que se obtiene el resultado deseado) con la siguiente estructura:
  1. **Inicialización**: Preparación para comenzar las iteraciones, que incluye encontrar una solución FEV inicial.
  2. **Prueba de optimalidad**: ¿Es óptima la solución FEV actual?
     - 2.1 No: Iteración
     - 2.2 Si: termina el procedimiento
  3. **Iteración**: Realizar una iteración para encontrar una mejor solución FEV.

Conceptos clave de solución(cont.)

- **Concepto de solución 3**: Siempre que es posible, en el paso inicial del método símplex se elige el origen (todas las variables de decisión iguales a cero) como la solución FEV inicial. Cuando se tienen demasiadas variables de decisión para encontrar una solución FEV inicial en una gráfica, esta elección elimina la necesidad de usar procedimientos algebraicos para obtenerla.
- **Concepto de solución 4**: Dada una solución FEV, en términos de cómputo, es más rápido reunir información sobre sus soluciones FEV adyacentes que sobre otras soluciones FEV. Por lo tanto, cada vez que el método símplex realiza una iteración para moverse de la solución FEV actual a una mejor, siempre escoge una solución FEV adyacente a la actual.

El primer paso para preparar el método símplex es convertir las restricciones funcionales de desigualdad en restricciones de igualdad equivalentes.
Ejemplo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\
\text{sujeto a:} & \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad = 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \quad x_5 \qquad = 20 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + \qquad\quad x_6 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{array}
$$

Terminología

- Una **solución aumentada** es una solución de las variables originales (las variables de decisión) que se aumentó con los valores correspondientes de las variables de holgura.
- Una **solución básica factible** (BF) es una solución en un vértice (FEV) aumentada.

En el ejemplo, $x = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$ sería una solución **B**ásica **F**actible.

Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-10	-12	-12	0	0	0	lado derecho
x_4	1	2	2	1	0	0	20
x_5	2^*	1	2	0	1	0	20
x_6	2	2	1	0	0	1	20

costo reducido $= 0$

Paso Inicial y Prueba de Optimalidad

- **Paso inicial**. Se introducen las variables de holgura. Se seleccionan las variables de decisión como las **variables no básicas iniciales** (es decir, iguales a cero) y las **variables de holgura** como las **variables básicas iniciales**.
- **Prueba de optimalidad**. La solución BF es óptima si y sólo si todos los coeficientes del renglón 1 son no negativos ($\geqslant 0$). Si es así, el proceso se detiene; de otra manera, sigue a una iteración para obtener la siguiente solución BF, que incluye cambiar una variable no básica a básica (paso 1) y viceversa (paso 2) y después despejar la nueva solución (paso 3).

- **Iteración.** ***Paso 1***: Se determina la variable básica entrante con la selección de la variable (que de modo automático es no básica) con el coeficiente negativo que tiene el mayor valor absoluto (es decir, el coeficiente "más negativo") del renglón 1. Se le da el nombre a esa columna de **columna pivote**.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-10	-12	-12	0	0	0	lado derecho
x_4	1	**2**	2	1	0	0	20
x_5	2	**1**	2	0	1	0	20
x_6	2	**2**	1	0	0	1	20

costo reducido $= 0$

- ***Paso 2***: Se determina la variable básica que sale con la prueba del cociente mínimo.

  Prueba del cociente mínimo

  1. Elija los coeficientes estrictamente positivos (> 0) de la columna pivote.
  2. Divida el elemento del lado derecho del mismo renglón entre dicho coeficiente.
  3. Identifique el renglón que tiene el menor de estos cocientes.
  4. La variable básica de ese renglón es la variable básica que sale; sustitúyala con la variable básica entrante en la columna de la variable básica de la siguiente tabla.

Iteración 1 (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-10	-12	-12	0	0	0	lado derecho
x_4	1	**2**	2	1	0	0	**20**
x_5	2	**1**	2	0	1	0	20
x_6	2	**2**	1	0	0	1	20

costo reducido $= 0$

Iteración 1 (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-10	-12	-12	0	0	0	lado derecho
x_2	$1/2$	**1**	1	$1/2$	0	0	**10**
x_5	2	**1**	2	0	1	0	20
x_6	2	**2**	1	0	0	1	20

Iteración 1 (cont.)

- ***Paso 3***: Se despeja la nueva solución BF mediante operaciones elementales con renglones (multiplicación o división de un renglón por una constante diferente de cero; suma o resta de un múltiplo de un renglón con otro) para construir una nueva tabla símplex en la forma apropiada de eliminación gaussiana, abajo de la tabla actual, y después se regresa a la prueba de optimalidad. Las operaciones elementales con renglones que deben realizarse son:
  1. Divida el renglón pivote entre el número pivote. Use este nuevo renglón pivote en los pasos 2 y 3.
  2. En los renglones (incluso el renglón 0) que tienen un coeficiente negativo en la columna pivote, se suma a este renglón el producto del valor absoluto de este coeficiente por el nuevo renglón pivote.
  3. En el caso de los renglones que tienen un coeficiente positivo en la columna pivote, se les resta el producto de este coeficiente por el nuevo renglón pivote.

Iteración 1 (cont.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-4	0	0	6	0	0	lado derecho
x_2	$1/2$	**1**	1	$1/2$	0	0	**10**
x_5	$3/2$	**0**	1	$-1/2$	1	0	10
x_6	1	**0**	-1	-1	0	1	0

costo reducido $= -120$

solución $\mathbf{x} = \mathbf{(0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0)}$

Iteración 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	-4	0	0	6	0	0	lado derecho
x_2	**1/2**	1	1	$1/2$	0	0	10
x_5	**3/2**	0	1	$-1/2$	1	0	10
x_6	**1**	0	-1	-1	0	1	**0**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	0	0	-4	2	0	4	lado derecho
x_2	**0**	1	$3/2$	1	0	$-1/2$	10
x_5	**0**	0	$5/2$	1	1	$-3/2$	10
x_1	**1**	0	-1	-1	0	1	**0**

costo reducido $= -120$

solución $\mathbf{x} = \mathbf{(0, 10, 0, 0, 10, 0)}$

Iteración 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	0	0	-4	2	0	4	lado derecho
x_2	0	1	**3/2**	1	0	$-1/2$	10
x_5	0	0	**5/2**	1	1	$-3/2$	**10**
x_1	1	0	**-1**	-1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	0	0	-4	2	0	4	lado derecho
x_2	0	1	**3/2**	1	0	$-1/2$	10
x_3	0	0	**1**	$2/5$	$2/5$	$-3/5$	**4**
x_1	1	0	**-1**	-1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
variable básica	0	0	0	$18/5$	$8/5$	$8/5$	lado derecho
x_2	0	1	**0**	$2/5$	$-3/5$	$-2/5$	4
x_3	0	0	**1**	$2/5$	$2/5$	$-3/5$	**4**
x_1	1	0	**0**	$-3/5$	$2/5$	$2/5$	4

costo reducido $= -136$

solución $\mathbf{x} = \mathbf{(4, 4, 4, 0, 0, 0)}$

Solución

La nueva solución BF es (4, 4, 4, 0, 0, 0), con costo $= -136$. Al hacer la prueba de optimalidad se encuentra que la solución es óptima porque no hay coeficientes negativos en el renglón 0, de manera que el algoritmo termina. La solución óptima del problema (antes de introducir variables de holgura) es $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$.