UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Método Gráfico

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

20/3/2024

Contenido

- **Programación Lineal (PL)**: técnica matemática utilizada para dar solución a problemas que se plantean muy comúnmente en diversas disciplinas.
- **Consiste en**: maximizar y/o minimizar una función lineal de dos o más variables teniendo en cuenta que las mismas deben cumplir determinadas exigencias.

Otro ejemplo: La fabrica

- Una fabrica está dedicada a la elaboración de dos tipos de productos a los que denominaremos tipo A y tipo B.
- Cada unidad del producto tipo A
  - necesita 10 unidades de materia prima
  - y 12 horas de trabajo,
- mientras cada unidad de los del tipo B
  - necesita 15 unidades de materia prima
  - y 16 horas de trabajo.
- La fabrica dispone semanalmente de 300 unidades de materia prima y 336 horas de trabajo.
- Los productos del tipo A dan a la empresa una utilidad de \$ 1500 , y los del tipo B una utilidad de \$ 2100.

Definición del problema

Suponiendo que todos los productos fabricados se venden y que no existe escasez de otros elementos que intervienen en su elaboración, se desea saber cuántos productos de cada tipo deben elaborarse para que la empresa obtenga máxima ganancia.

Variables y Objetivo

Por lo tanto llamaremos:

- **x** al número de unidades de productos fabricados por semana del tipo A.
- **y** al número de unidades de productos fabricados por semana del tipo B.

$$f(x,y) = 1500x + 2100y \text{ (ganancia)}$$

Restricciones

- Si cada producto del tipo A necesita 10 unidades de materia prima y cada producto del tipo B necesita 15 unidades de materia prima deberá cumplirse:

$$10x + 15y \leqslant 300 \ (1)$$

- Por otra parte si cada producto del tipo A insume 12 horas de trabajo para su elaboración y cada producto del tipo B insume 16 horas deberá cumplirse:

$$12x + 16y \leqslant 336 \ (2)$$

- El propio significado físico de las variables impone además que:

$$x \geqslant 0 \ (3), \ y \geqslant 0 \ (4)$$

Formulación completa

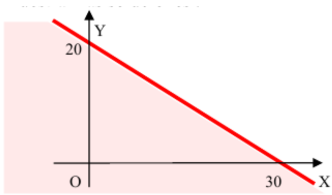
En resumen el modelo matemático adoptado para resolver el ejercicio propuesto consiste en maximizar la función f tal que

$$\mathrm{f(x,y)} = 1500\mathrm{x} + 2100\mathrm{y}$$

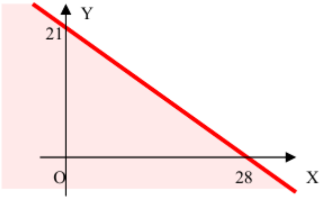
debiendo las variables cumplir con las restricciones:

$$\begin{gathered} 10x + 15y \leqslant 300 \\ 12x + 16y \leqslant 336 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{gathered}$$

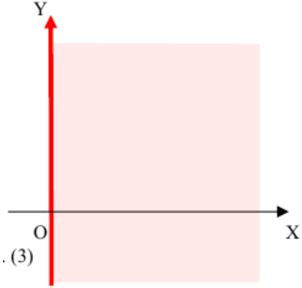
Análisis gráfico



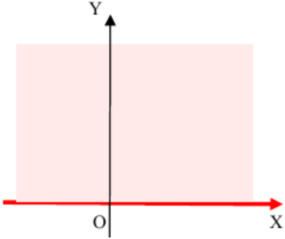
$10x + 15y \leqslant 300$



$12x + 16y \leqslant 336$



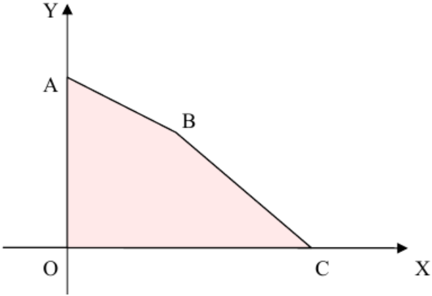
$x \geqslant 0$



$y \geqslant 0$

Análisis gráfico – Región Factible

Región factible: polígono convexo OABC



- O (0,0)
- A (0,20)
- B(12,12)
- C(28,0)

Posibles soluciones

Si tomamos por ejemplo el punto (5,6) que evidentemente pertenece al recinto, podemos concluir que la empresa puede decidir fabricar 5 productos del tipo A y 6 productos del tipo B a la semana pues sus recursos escasos no se lo impiden.
En ese caso la ganancia que obtendría sería :

$$f(5,6) = 1500\ (5) + 2100\ (6) = 20100$$

¿Que pasa con los vértices?

- $f(0, 20) = 2100 \times 20 = 42000$
- $f(28, 0) = 1500 \times 28 = 42000$
- $f(0, 0) = 0$
- $f(12, 12) = 2100 \times 12 + 1500 \times 12 = 43200$

Curvas de nivel

- Para dar solución definitiva al ejercicio haremos uso ahora de las curvas de nivel de la función f.
- Llamamos curvas de nivel de una función f de variables x e y a la familia de curvas del plano XOY que cumplen que

$$f(x, y) = K, \text{ con K numero real}$$

Curvas de nivel

- En nuestro caso las curvas de nivel de la función f cumplirán:

$$1500\ x + 2100\ y = K,$$

dicho de otra manera: $y = -1500/2100\ x + K/2100$

- Se puede reconocer fácilmente que se trata de una familia de rectas de coeficiente angular
  - $m = -\ 1500/2100 = -\ 5/7$
  - y ordenada en el origen $n = K/2100$
- Las rectas serán por consiguiente paralelas entre sí.

$$y = m\ x + n$$

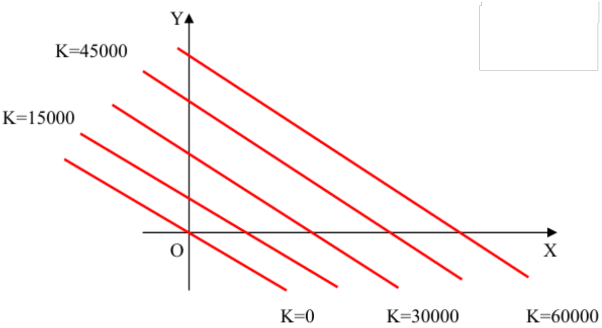


Figura: Curvas de nivel para diferentes valores de K

Curvas de nivel

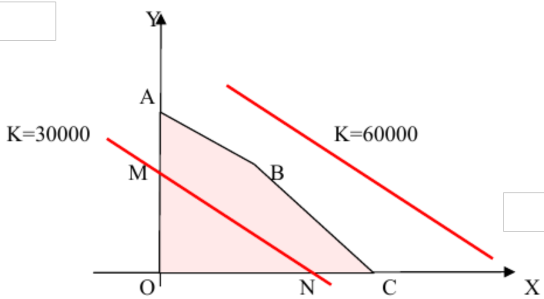


Figura: Curvas de nivel para diferentes valores de K

Curvas de nivel

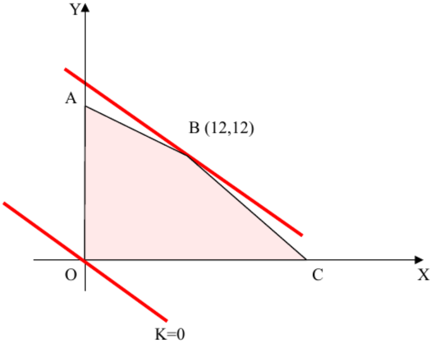


Figura: Deberemos buscar la recta de nivel correspondiente al mayor valor de K que contenga algún punto de la región factible.

Hemos alcanzado finalmente la solución a nuestro ejercicio: la empresa deberá fabricar 12 productos del tipo A y 12 productos del tipo B y obtendrá por ello una ganancia de:

$$1500 \times (12) + 2100 \times (12) = 43200$$

Para resolver problemas de PL

- Elegir las incógnitas del problema y hallar la expresión analítica de la función que se pide maximizar y/o minimizar.
- Expresar en forma de inecuaciones las restricciones a que quedarán sometidas las variables sea por su propio significado como por la escasez de recursos disponibles. Las inecuaciones serán siempre lineales.
- Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones formado, obteniendo así la región de puntos factibles.

Para resolver problemas de PL (cont.)

- Utilizar las rectas de nivel de la función en cuestión para hallar el vértice (o lado) del recinto de puntos factibles donde se produce el máximo y/o mínimo buscado.
- Usando las coordenadas del punto hallado calcular el valor funcional correspondiente si el problema lo requiere.

Observaciones

- La resolución gráfica que hemos desarrollado exige especial cuidado a la hora de representar las rectas involucradas en el problema, sean lados de la región factible como curvas de nivel de la función.
- Cualquier error o falta de precisión en la representación puede provocar un cambio en las pendientes de las rectas y conducir a un vértice equivocado. Muchas veces esas pendientes son muy cercanas y exigen especial atención.

Observaciones(cont.)

- El hecho de que la función objetivo se maximizara en un vértice del polígono de puntos factibles no ha sido casual.
- Es posible demostrar la siguiente proposición: *"El valor máximo y/o mínimo de la función objetivo, en un problema de programación lineal de dos variables, ocurre siempre en uno de los vértices o lado del recinto poligonal convexo de puntos factibles, sea esta región acotada o no acotada"*.
- Cuando la pendiente de las curvas de nivel de la función coincida con la pendiente de uno de los lados del recinto de puntos factibles la función se maximizará o minimizará en todos los puntos de ese lado.

Sin hacer el análisis gráfico

Rectas	Intersección	Viola restricción	Vértices	Valor funcional
10x+15y=300 12x+16y=336	(12,12)	Ninguna	B	43200
10x+15y=300 x = 0	(0, 20)	Ninguna	A	42000
10x+15y=300 y = 0	(30, 0)	(2)	---	--------
12x+16y=336 x = 0	(0, 21)	(1)	---	-------
12x+16y=336 y = 0	(28, 0)	Ninguna	C	42000
x = 0 y = 0	(0,0)	Ninguna	O	0

Otro ejemplo

$$\text{máx } 10x_1 + 15x_2 \tag{1}$$

sujeto a

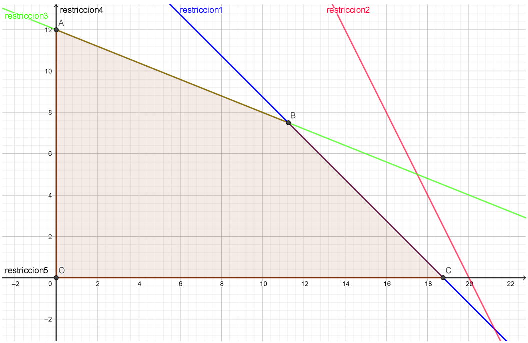
$$4x_1 + 4x_2 \leqslant 75 \tag{2}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 80 \tag{3}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 60 \tag{4}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{5}$$

- O (0, 0)
- A (0, 12)
- B (11.25, 7.5)
- C (18.75, 0)



x	y	$10x_1 + 15x_2$
0	0	0
0	12	180
11.25	7.5	225
18.75	0	187.5