CAPÍTULO 2

Modelado con programación lineal

Aplicación de la vida real. Frontier Airlines adquiere combustible de una manera económica

La carga de combustible de un avión puede hacerse en cualquiera de las escalas a lo largo de una ruta de vuelo. El precio del combustible varía entre escalas y se pueden obtener ahorros potenciales cargando más combustible en un lugar más económico para usarlo en tramos de vuelo subsecuentes. La desventaja es que el peso adicional del combustible cargado hará que se consuma más gasolina. La programación lineal (PL) y la heurística se utilizan para determinar la cantidad óptima de carga de combustible que equilibre el costo del consumo excesivo frente a los ahorros en el costo del combustible. El estudio, realizado en 1981, arrojó ahorros netos de aproximadamente \$350,000 al año. El caso 1 en el capítulo 26 en el sitio web, proporciona los detalles del estudio. Es interesante que ahora, con el reciente aumento del costo del combustible, muchas aerolíneas estén utilizando software para adquirir combustible con base en la PL.

2.1 MODELO DE PL CON DOS VARIABLES

En esta sección analizaremos la solución gráfica de una programación lineal (PL) con dos variables. Aun cuando en la práctica difícilmente ocurren problemas de dos variables, el tratamiento proporciona fundamentos concretos para el desarrollo del algoritmo simplex general que se presenta en el capítulo 3.

Ejemplo 2.1-1 (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores con dos materias primas, $M1$ y $M2$. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Toneladas de materia prima por tonelada de		Disponibilidad diaria máxima (toneladas)
	Pintura para exteriores	*Pintura para interiores*	
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por tonelada (\$1000)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder la de pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, que la demanda diaria máxima de pintura para interiores es de dos toneladas.

Reddy Mikks se propone determinar la (mejor) combinación óptima de pinturas para interiores y exteriores que maximice la utilidad diaria total.

Todos los modelos de IO, incluido el de PL, constan de tres componentes básicos.

1. Las **variables** de decisión que pretendemos determinar.
2. El **objetivo** (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar).
3. Las **restricciones** que la solución debe satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Para el problema de Reddy Mikks necesitamos determinar las cantidades diarias que se deben producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como sigue:

$$x_1 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores}$$

$$x_2 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores}$$

La meta de Reddy Mikks es *maximizar* (es decir, incrementar lo más posible) la utilidad diaria de ambas pinturas. Los dos componentes de la utilidad diaria total se expresan en función de las variables x_1 y x_2 como sigue:

$$\text{Utilidad de la pintura para exteriores} = 5x_1 \text{ (en miles de dólares)}$$

$$\text{Utilidad de la pintura para interiores} = 4x_2 \text{ (en miles de dólares)}$$

Si z representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), el objetivo (o meta) de Reddy Mikks se expresa como sigue

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

A continuación definimos las restricciones que limitan el consumo de las materias primas y la demanda del producto. Las restricciones en las materias primas se expresan verbalmente como

$$\begin{pmatrix}\text{Consumo de una materia}\\ \text{prima por ambas pinturas}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Disponibilidad máxima}\\ \text{de materia prima}\end{pmatrix}$$

El consumo diario de la materia prima $M1$ es de 6 toneladas por tonelada de pintura para exteriores, y de 4 toneladas por tonelada de pintura para interiores. Por lo tanto

$$\text{Consumo de materia prima } M1 \text{ por ambas pinturas} = 6x_1 + 4x_2 \text{ toneladas/día}$$

Asimismo,

$$\text{Consumo de materia prima } M2 \text{ por ambas pinturas} = 1x_1 + 2x_2 \text{ toneladas/día}$$

Las disponibilidades diarias de las materias primas $M1$ y $M2$ son de 24 y 6 toneladas, respectivamente. Así pues, las restricciones en las materias primas son

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ (Materia prima } M1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ (Materia prima } M2)$$

La primera restricción en la demanda del producto estipula que la producción diaria de pintura para interiores no debe exceder a la de pintura para exteriores en más de 1 tonelada, lo cual se traduce en

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad \text{(Límite del mercado)}$$

La segunda restricción limita la demanda diaria de pintura para interiores a 2 toneladas, es decir,

$$x_2 \leq 2 \quad \text{(Límite de la demanda)}$$

Una restricción implícita (o "sobreentendida") requiere que todas las variables, x_1 y x_2, asuman sólo valores positivos o cero. Las restricciones, expresadas como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ se conocen como **restricciones de no negatividad**.

El modelo completo de Reddy Mikks es

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (1)\\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 && (2)\\ -x_1 + x_2 &\leq 1 && (3)\\ x_2 &\leq 2 && (4)\\ x_1, x_2 &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

Todos los valores de x_1 y x_2 que satisfacen las cinco restricciones constituyen una **solución factible**. De lo contrario la solución es **no factible**. Por ejemplo, la solución $x_1 = 3$ toneladas por día y $x_2 = 1$ tonelada por día es una solución factible porque no viola *ninguna* de las cinco restricciones. Este resultado se confirma sustituyendo $(x_1 = 3, x_2 = 1)$ en el lado izquierdo de cada restricción. En la restricción (1) tenemos $6x_1 + 4x_2 = 6 \times 3 + 4 \times 1 = 22$, la cual es menor que el lado derecho de la restricción (= 24). Las restricciones 2 a 5 se comprueban de la misma manera (¡hágalo!). Por otra parte, la solución $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$, es no factible porque no satisface por lo menos una restricción, por ejemplo la restricción (1): $6 \times 4 + 4 \times 1 = 28$, la cual es mayor que el lado derecho (= 24).

La meta del problema es determinar la solución **óptima**, es decir la mejor solución *factible* que maximice la utilidad total z. Primero utilizamos el método gráfico (sección 2.2) para demostrar que el problema de Reddy Mikks tiene una cantidad *infinita* de soluciones factibles, una propiedad compartida por todas las PL no triviales. Esto significa que el problema no puede ser resuelto por enumeración. En vez de eso, necesitamos un algoritmo que determine la solución óptima en una cantidad finita de pasos. El método gráfico en la sección 2.2, y su generalización algebraica en el capítulo 3, explican los detalles del algoritmo deseado.

Comentarios. El objetivo y la función de restricción en todas las PL deben ser lineales. Adicionalmente, todos los parámetros (coeficientes de las funciones objetivo y de restricción) del modelo se conocen con certeza.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.1A

1. Para el modelo de Reddy Mikks, defina las siguientes restricciones y exprésela con un lado izquierdo lineal y un lado derecho constante:

*__(a)__ La demanda diaria de pintura para interiores supera la de pintura para exteriores por *al menos* una tonelada.

(b) El consumo diario de materia prima *M*2 en toneladas es *cuando mucho* de 6 y *por lo menos* de 3.