UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Optimización

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

14/3/2024

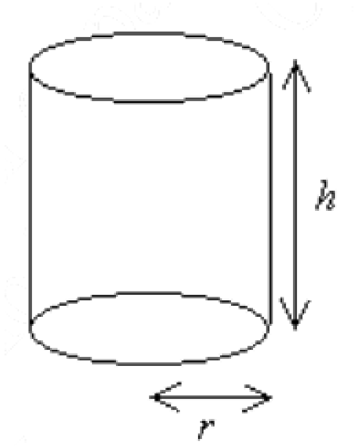
Contenido

Introducción

- Optimizar: hacer algo lo mejor posible
- Optimización: el arte de lograr optimizar

Nuestro objetivo: estudiar modelos matemáticos de problemas de decisión.

Problema: Minimizar el gasto de material para construir un tanque de agua de forma cilíndrica, sujeto a la restricción de que tenga cierta capacidad.



Problema: Minimizar el área de la lata, teniendo en cuenta que el volumen será de 1 m^3

$$\mathrm{V} = \pi h r^2 \text{ (volumen)}$$

$$\mathrm{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r h \text{ (superficie)}$$

Ejemplos y terminología(cont.)

El problema es encontrar valores de h y r que satisfacen $\pi h r^2 = 1$ y que a la vez dan los valores mas bajos posibles de $2\pi r^2 + 2\pi r h$

minimizar $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
sujeto a
$V = \pi h r^2 = 1$

La mejor formulación:

minimizar $2\pi r^2 + 2\pi rh$
sujeto a
$\pi hr^2 = 1$
r $>$ 0, h $>$ 0

- h y r: variables de decisión
- $2\pi r^2 + 2\pi rh$: función objetivo
- $\pi hr^2 = 1$, r $>$ 0, h $>$ 0: restricciones

Variables de decisión

- Aquellos cantidades para las que se puede determinar su valor, porque están bajo el control del que toma las decisiones.
- Son las cantidades que me interesa optimizar cumpliendo ciertas condiciones, es decir las respuestas que se están buscando de un problema.
- Pueden surgir variables en el modelo que no estaban presentes en el análisis.

Variables de decisión(cont.)

- Cantidad a producir.
- Cantidad a vender.
- Cantidad de horas-hombre.
- Cantidad de materiales.
- Cantidad de inventario.
- Cuando realizar una actividad.
- Donde ubicar una planta, equipo o producto.

Parámetros

- Aquellos valores que surgen del análisis de la realidad, y que no están bajo el control de quien toma las decisiones.
- La determinación entre variable de decisión y parámetros puede ser difícil de determinar, por ejemplo el precio de venta de un producto o la demanda a satisfacer.

- Costo variable de producir.
- Costo fijo de realizar una actividad.
- Costo de mantener en inventario.
- Precio o ganancia neta de venta.
- Demanda a satisfacer de un producto.
- Capacidad máxima de producción.
- Capacidad máxima de almacenamiento.
- Cantidad mínima para una actividad.

Función objetivo

- Expresión que se quiere optimizar (minimizar o maximizar) y que vincula las variables de decisión con algunos de los parámetros (costos o ganancias).
- Para un determinado problema puede haber más de un objetivo posible a seleccionar (objetivo único o múltiples objetivos).
- Se debe tener presente que los valores que no están relacionados a las variables, no son optimizables.
- Puede haber situaciones en donde no haya una función a optimizar que resulte de forma natural.

Función objetivo(cont.)

- Minimizar costos de producción.
- Maximizar la ganancia.
- Maximizar la cantidad a producir.
- Minimizar los tiempos de producción.
- Minimizar las cantidades de materiales.
- Minimizar cambios de producción.
- Maximizar el uso de materiales.
- Minimizar(Maximizar) cantidad de empleados.

Restricciones

- Expresiones que involucran variables y parámetros que representan las exigencias que debe cumplir la solución que buscamos.
- Muchas veces requieren de esfuerzo y habilidad para formular las restricciones del problema de forma cuantitativa.
- La cantidad y la forma inciden de manera importante en la dificultad de resolución.

Restricciones(cont.)

- Limitaciones en la capacidad de producción.
- Demanda que se debe satisfacer.
- Relaciones de balance entrada/salida.
- Cantidad de recursos materiales, financieros o humanos disponibles.
- Consideraciones de calidad o sociales que se deben respetar.
- Conjunto de valores posibles que pueden tomar las variables de decisión.
- No negatividad de las variables.

Restricciones

- Por distintas circunstancias puede ser necesario "suavizar" una restricción para adecuarla a situaciones en que hay flexibilidad:
  - se permite producir "un poco" por arriba de la capacidad;
  - se está dispuesto a "no cumplir exactamente" con la demanda estipulada.
- Para atender la necesidad de suavizar las restricciones suele ser necesario agregar variables, nuevas restricciones y modificar la función objetivo.

Otra formulación

minimizar $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$
sujeto a
$g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 = 1$
$x_1 > 0$
$x_2 > 0$

Definición mas formal

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función real con dominio en A, es decir: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}, A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Llamamos **problema de optimización matemática** a todo problema que responda a la formulación siguiente:

$$[OPT]_X \text{ f(X)}$$
$$\text{s.a.}$$
$$X \in B, B \subseteq A$$

El conjunto B se suele denominar **conjunto de restricciones** del problema, mientras que el vector X se llama **óptimo del problema**.

Definición mas formal (cont.)

El punto X es un vector:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sse busca el vector X que optimiza una función de n variables sujeta a m_1 restricciones de igualdad ($=$), m_2 restricciones de desigualdad menor o igual ($\leqslant$) y m_3 restricciones de desigualdad superior o igual ($\geqslant$).

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{OPT}] f(\mathrm{X}) \\
&\mathrm{X} \\
&\mathrm{s.a} \\
&h_i(\mathrm{X}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m_1\}, \\
&g_j(\mathrm{X}) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m_2\}, \\
&k_s(\mathrm{X}) \geq 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, m_3\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{OPT}] f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \\
&\ \text{s.a} \\
&\ h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, \\
&\ g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 0 \\
&\ k_s\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

Óptimos globales

- **Óptimos globales**: diremos que $X^* \in B$ es un máximo (mínimo) global del problema de optimización si

$$\forall X \in B,\ f(X^*) \geqslant f(X) (f(X^*) \leqslant f(X))$$

- Si la desigualdad es estricta hablaremos de óptimo global estricto (máximo o mínimo),
- y, en caso contrario, de óptimo global relativo (máximo o mínimo).

Ejemplo: máximo global

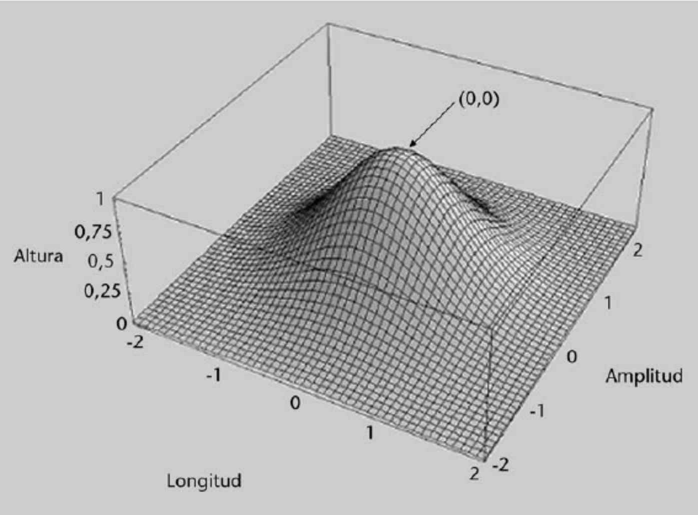


Figura: La función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, alcanza un máximo global estricto no restringido en el punto (0,0)

Óptimos locales

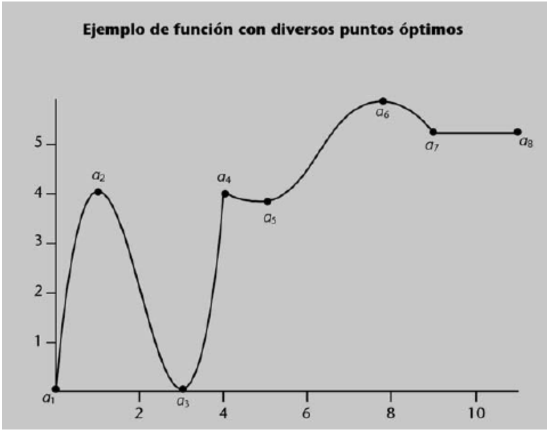
- **Óptimos locales**: diremos que $X^* \in B$ es un máximo (mínimo) local del problema de optimización si

$$\exists \varepsilon \geqslant 0,\ \forall X \in B,\ \|X^* - X\| < \varepsilon, X^* - X \neq 0,$$
$$\text{se tiene que } f(X^*) \geqslant f(X)(f(X^*) \leqslant f(X))$$

- Si la desigualdad es estricta hablaremos de óptimo local estricto (máximo o mínimo),
- y, en caso contrario, de óptimo local relativo (máximo o mínimo).

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3)^2 & \text{si } x \leq 4 \\ \sin(x) - \sin(4) + 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ \sin(9) - \sin(4) + 4 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$



Ejemplo (cont.)

- Mínimos globales referentes a a_1 y a_3 (a_1 es relativo, ya que hay otro punto, en este caso a_3, para el cual la función alcanza el mismo valor, y viceversa).
- Máximos locales referentes a a_2 y a_4 (son locales porque la función, en otros puntos del intervalo considerado, alcanza valores superiores).
- Mínimo local estricto en a a_5.
- Máximo global estricto en a_6 (dado que es el punto donde, a lo largo del intervalo considerado, la función alcanza un valor más alto).
- Mínimos locales referentes al intervalo $[a_7, a_8]$ (también es correcto afirmar que los puntos del intervalo $[a_7, a_8]$ corresponden a máximos locales relativos).

Estructura de un problema general:

minimizar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$
sujeto a: $g1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1...n$
$h1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1...m$
$(x_1, x_2, ..., x_n)$ en X (región factible)

Formulación utilizando sumatorias

minimizar (ó maximizar) $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$
variables: $x_1, x_2, ..., x_n$
parámetros: $c_1, c_2, ..., c_n$

Escrito de forma simplificada:

$$\text{mín}(\text{máx}) \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

- Clasificación:
  - Programación Lineal (LP)
  - Programación Entera (IP)
  - Programación Mixta Lineal y Entera (MILP)
  - Programación No Lineal (NLP)
  - Programación Mixta No Lineal y Entera (MNLP)
- La clasificación es importante para la resolución.
- Debido al tamaño y la dificultad suelen emplearse las computadoras para plantearlos y resolverlos.

Programación Lineal (PL)

- Las funciones f, g, h son lineales $x_1, x_2, ..., x_n$ están en el "cuadrante" positivo
- Uso típico: planificación a mediano plazo
- Método mas común para resolverlo: Método Simplex

Programación NO Lineal (PNL)

- Las funciones f, g, h **no** lineales
- Uso típico: optimización estructural
- Mas complejo de resolver
- En general se pueden resolver problemas de cientos de variables

Programación Entera (PE)

- Las funciones f, g, h son lineales $x_1, x_2, ..., x_n$ enteras
- Uso típico:
  - planificación a corto plazo
  - planificación de inversiones
- Mas difíciles de resolver que los de PL

- Expresión lineal (función objetivo) a ser minimizada o maximizada
- Restricciones en forma de funciones lineales que no puede exceder algún valor especifico
- Expresiones no lineales pueden convertirse a un forma lineal adecuada
- PL mas fácil de resolver que PNL

Ejemplo

- Se producen 2 articulos: uno “standard” y otro “deluxe”
- Unidad “standard”: ganancia de \$10
- Unidad “deluxe”: ganancia de \$15
- Proceso de ensamblamiento: capacidad 80 hs semanales
- Proceso de pulido: capacidad 60 hs semanales

- Los tiempos en horas de ensamblamiento y pulido de cada tipo de producto es

	standard	deluxe
ensamble	4	2
pulido	2	5

- Cada unidad usa 4 kg. de materia prima. Se cuenta con 75 kg. de materia prima disponible

Ejemplo

- ¿Como podemos maximizar las ganancias de la compañía?
- Modelo: variables de decisión x1 y x2 (cantidad de productos "standard" y "deluxe")
- Restricciones:
  - $4x_1 + 4x_2 \leqslant 75$ (disponibilidad de materia prima)
  - $4x_1 + 2x_2 \leqslant 80$ (ensamble)
  - $2x1 + 5x2 \leqslant 60$ (pulido)

Ejemplo

- Función objetivo: maximizar $10x_1 + 15x_2$
- En resumen:
  maximizar $10x_1 + 15x_2$
  sujeto a $4x_1 + 4x_2 \leqslant 75$
  $4x_1 + 2x_2 \leqslant 80$
  $2x1 + 5x2 \leqslant 60$
  $x_1, x_2 \geqslant 0$