Matemática 1
Segundo Parcial

CURE

8 de Julio de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [15 pts.]

(a) Encontrar la función f, el real λ y el valor de $\int_0^1 f(t)\,dt$ sabiendo que $\int_\lambda^x f(t)\,dt = (x-1)^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Calcular: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x sin(x)$. Hallar una primitiva de f tal que su gráfico pase por el punto de coordenadas $(0, -1)$.

Problema 2 [10 pts.]

(a) Se llama función de densidad a una función $f : R \to \mathbb{R}$, tal que es no negativa, continua (salvo en un número finito de puntos) y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Sea $f : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ kxe^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

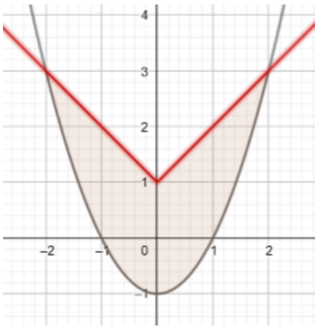
i. Halla k para que f sea una función de densidad.

ii. Hallar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sean las funciones f y g tales que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

cuyos gráficos se muestra a continuación, hallar el área sombreada.



Problema 3 [15 pts.]

Sea $(a_n) : a_0 = \dfrac{1}{2} :$ $\qquad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$

(a) Probar que $0 \leq a_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que (a_n) es monótona decreciente.

(c) Justificar que (a_n) es convergente y calcular su límite.

Problema 4 [10 pts.]

Clasificar las siguientes series y en caso de convergencia, si es posible, calcular la suma.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{6^n}{n!}$ $\qquad$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5}{3e^{3n}}$