Condición necesaria para la convergencia

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge entonces $(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Demostración) Sea A_n la enésima suma parcial generada por (a_n), entonces

$$A_n = A_{n-1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = A_n - A_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Por H) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} A_{n-1} = L$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim (A_n - A_{n-1}) = L - L = 0$$

Recíproco falso. El hecho de que el término general de una sucesión que genera una serie tiende a cero es condición necesaria pero no suficiente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Longrightarrow (a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

Propiedad de aditividad

Teorema

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión, r un natural mayor que 1, $(b_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por $b_n = a_{n+r}$. Entonces las series $\sum_1^{+\infty} a_n$ y $\sum_1^{+\infty} b_n$ tienen el mismo comportamiento. En caso de convergencia se cumple que $\sum_1^{+\infty} a_n = \sum_1^{+\infty} b_n + (a_1 + \cdots + a_r)$

Linealidad

Teorema

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales y k un número real. Entonces:

1) Si $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} k a_n$ converge y $\sum_{1}^{+\infty} k a_n = k \sum_{1}^{+\infty} a_n$

2) Si $\sum_{1}^{+\infty} k a_n$ y $k \neq 0 \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{1}^{+\infty} k a_n = k \sum_{1}^{+\infty} a_n$

3) Si $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} a_n + b_n$ converge y

$$\sum_{1}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{1}^{+\infty} a_n + \sum_{1}^{+\infty} b_n$$

Series de términos positivos

LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS NO OSCILAN.

Clasificación de la serie armónica

Llamamos serie armónica a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(serie de términos positivos.)

CASO 1) Si $\alpha \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ No converge $\Downarrow$ DIVERGE

CASO 2) $\alpha > 0$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha < \end{cases}$

Criterio de comparación

Sean (a_n) y (b_n) tales que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \geq 1$

Entonces se cumple que:

1) Si $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{1}^{+\infty} b_n$ diverge.

2) Si $\sum_{1}^{+\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{1}^{+\infty} b_n$

Para aplicar el criterio anterior no es necesario que las hipótesis se cumplan $\forall n \geq 1$, alcanza con que se cumpla desde algún subíndice en adelante (se justifica a partir de la prop. de aditividad)

Criterio de comparación con paso al límite

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones con $b_n > 0 \ \forall n \geq 1$

se cumple:

1) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo comportamiento

2) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0^+$ y $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

3) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ y $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

$$\sum_{1}^{+\infty} n^4 e^{-n} \qquad a_n = n^4 e^{-n} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad C$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^4 e^{-n}}{1/n^2} = \lim n^6 e^{-n} = \lim \frac{n^6}{e^n} = 0^+$$

Por criterio de comparación con paso al límite $\sum n^4 e^{-n}$ C

Criterio del equivalente

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones con $b_n > 0 \ \forall n \geq 1$

Si $a_n \sim b_n$ entonces $\sum_{1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{1}^{+\infty} b_n$ tienen el mismo comportamiento.

$$\sum \frac{n^2 - 2n + 5}{n^4 + 1}$$

$$\frac{n^2 - 2n + 5}{n^4 + 1} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum 1/n^2$ C

$\sum \frac{n^2 - 2n + 5}{n^4 + 1}$ C

Criterio de la raíz enésima de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos.

Se cumple:

1) Si $\sqrt[n]{a_n} \leq h < 1 \quad \forall n \geq p$ entonces $\sum a_n$ converge

2) Si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq p$ entonces $\sum a_n$ diverge.

Corolario del criterio de Cauchy

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos.

Entonces:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \lambda > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ 1^+ \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n^2-7n+2}{2^n+8n^6+10} \sim \frac{n^2}{2^n}$$

$$\sum \frac{n^2}{2^n} \to 0$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} \qquad 2/n \to 0$$

$$\sum \frac{n^2}{2^n} \ C \implies \sum \frac{n^2-7n+2}{2^n+8n^6+10} \ C$$

Criterio del cociente de D'Alembert

(a_n) sucesión de términos positivos. Se cumple:

1) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h < 1$ $\forall n \geq 1$ entonces $\sum a_n$ converge

2) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\forall n \geq 1$ entonces $\sum a_n$ diverge

Corolario del criterio de D'Alembert

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos.

Entonces:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.} \\ \lambda > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ 1^+ \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \qquad a_n = \frac{n!}{(2n)!}$$

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$$(2(n+1))! = (2n+2)! =$$

$$= (2n)!(2n+1)(2n+2)$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\cancel{!}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}} =$$

$$= \lim \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n}{4n^2} = 0$$

$$\sum \frac{n!}{(2n)!} \quad C \quad \text{por D'Alembert.}$$

Series de términos negativos

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n \leq 0$ $\forall n \geq 1$

Por linealidad $\sum a_n$ es de la misma clase que $\sum -a_n$ serie de términos positivos.

El estudio de una serie de términos negativos se reduce al estudio de una de términos positivos.

$$\sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \qquad -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots +$$

Criterio de convergencia dominada

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq 1$$

Si $\sum a_n$ y $\sum c_n$ son ambos convergentes $\rightarrow \sum b_n$ C

y se cumple $\sum a_n \leq \sum b_n \leq \sum c_n$

CRITERIO DE CONVERGENCIA ABSOLUTA

Si $\sum_{n}^{\infty} |a_n|$ C $\Rightarrow \sum a_n$ C y se cumple

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

Def.) Decimos una serie es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge.

$$\sum |a_n| \text{ C} \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$$

$$\sum a_n \text{ C} \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ C} \quad X$$

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \left| (-1)^n \cdot 1/n^2 \right| = \sum 1/n^2 \quad C \quad \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$ es absolutamente convergente

$$\Downarrow$$

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \quad C$$

Ej 4) Práctico 4.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$ con $c \in (0, x)$ o $(x, 0)$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$

$f^{V}(x) = \cos x$

$f^{IX}(x) = \cos x$

$$\boxed{r_8(x) = \frac{\cos(c) \cdot x^9}{9!}}$$

$$f(x) = \sin x$$

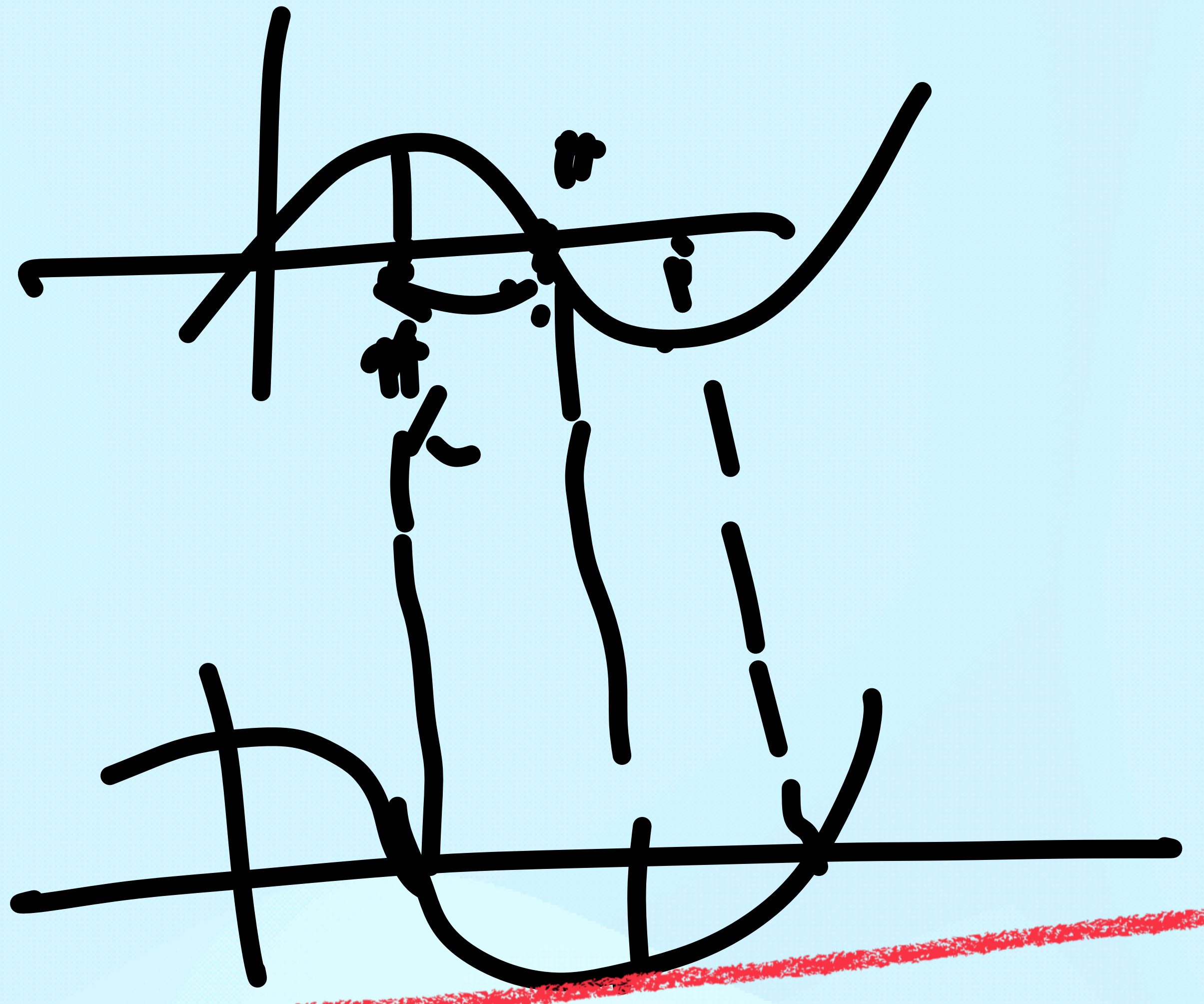
$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2}{2}\pi\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$f^{iv}(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{4}{2}\pi\right)$$

$\vdots$



$$\boxed{r_n(x) = \frac{\sin\left(c + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$f^{n}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{n+1}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$