ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Edición: febrero de 2014

Universidad de la República, UdelaR

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA “PROF. ING. RAFAEL LAGUARDIA”

OFICINA DE PUBLICACIONES
CENTRO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Índice general

Reconocimientos

Estas notas son una reedición de las Notas de Análisis I elaboradas en el Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia”(IMERL) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Dichas notas fueron elaboradas por Fernando Paganini, con la colaboración de Marcelo Cerminara, Enrique Cabaña y el equipo docente del curso de Análisis I durante 1991-1992. Gabriel Lema y Pablo Romero corrigieron y modernizaron la edición original en 2013 y el Responsable (Roberto Markarian) y Coordinadoras (Laura Aspirot y Bojana Femić) del curso 2013, realizaron diversas correcciones y agregados para esta edición. Se ha procurado mantener la intención de las notas originales, que si bien son autocontenidas no pretenden eliminar - por el contrario, pretenden promover - la consulta de otra literatura, sugerida en las referencias bibliográficas del presente texto.

Estos capítulos serán impresos por la Oficina de Publicaciones del CEI, al igual que lo fueron las notas originales. El material que se presenta es la base del contenido del curso de Cálculo I del primer semestre de 2014, junto con los prácticos de ejercicios del curso. Es nuestro deseo que este material sea de vuestra utilidad. Confiamos en que sea bien enriquecido mediante las referencias bibliográficas, que permiten ampliar los temas aquí presentados. Ver libros [2], [3], [5], [6], en la Bibliografía al final del texto.

Es un placer darles una cálida bienvenida a este curso. Se sugiere mantenter un espíritu crítico en la lectura y el estudio. En especial queremos recordarles que tanto el presente material como otros que consultarán pueden contener errores, y en caso de hallarlos nos será muy grato recibir vuestra realimentación, que nos ayuda a trabajar cada vez más y mejor.

Agradecemos la colaboración de varios estudiantes del curso 2013 y docentes del Instituto, en particular los que colaboraron en el curso, que anotaron diversos errores en esa edición.

Montevideo, febrero de 2014
Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia”
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República.

Capítulo 1

Número complejo

1.1. Número real

Haremos una construcción axiomática del conjunto de los números reales demostrando algunas de sus propiedades más relevantes. Sea $\mathbb{R}$ un conjunto no trivial y sea $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una operación binaria, que llamaremos suma, y $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra operación que llamaremos producto. (Notación: $+(x, y) = x + y$, $\times(x, y) = xy$).

1.1.1. Axiomas de cuerpo

Axioma 1 *Propiedad Conmutativa*
$x + y = y + x$; $xy = yx$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Axioma 2 *Propiedad Asociativa*
$x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(yz) = (xy)z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma 3 *Propiedad Distributiva*
$x(y + z) = xy + xz$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Axioma 4 *Existencia de elementos neutros*
$\exists\, 0, 1 \in \mathbb{R} : 0 \neq 1$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}, 0 + x = x + 0 = x,\ 1x = x1 = x$.

Axioma 5 *Existencia del opuesto*
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x = 0$.

Axioma 6 *Existencia del inverso*
$\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists\, y \in \mathbb{R} : xy = yx = 1$.

De estos axiomas es posible deducir los teoremas clásicos del álgebra elemental. Enunciamos algunos a modo de ejemplo. La demostración se deja a cargo del lector.

Proposición 1 *Si* $a+b=a+c$ *entonces* $b=c, \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$.

Proposición 2 $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ *existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $a+x=b$.

Nota 3 *A este* x *lo notamos* $b-a$ *(en particular* $0-a$ *lo escribimos* $-a$*; por satisfacer el Axioma 5 es el opuesto de* a*).*

Proposición 4 $0a = a0 = 0$, $-a = (-1)a$, $(-1)(-1) = 1$.

Proposición 5 *Si* $ac = ab$ *y* $a \neq 0$*, entonces* $b = c$.

Proposición 6 $\forall\, a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists$ *un único* x *tal que* $ax = b$.

Nota 7 *Tal número* x *se designa por* b/a*. En particular* $1/a$ *se designa* a^{-1}.

Proposición 8 *Si* $ab = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.

1.1.2. Axiomas de orden

Este grupo de axiomas permite definir el concepto de orden en el conjunto de los números reales. Esto permite decidir si un número real es mayor o menor que otro. Introduciremos un concepto primitivo, el de número positivo, que nos permite definir esta relación de orden.

Suponemos que existe un conjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de los números positivos, que satisfacen lo siguiente:

Axioma 7 *Si* $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (x+y), (xy) \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 8 $\forall\, x \neq 0, x \in \mathbb{R}^+$ *o* $(-x) \in \mathbb{R}^+$*, pero no ambos.*

Axioma 9 $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Definición 9 *Si* $x, y \in \mathbb{R}$*, entonces* $x < y$ *(*x *es menor que* y*) si y solo si* $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Observación 10

1. $y > x$ *significa que* $x < y$.
2. $x \leq y$ *significa que* $x < y$ *o bien* $x = y$.
3. $y \geq x$ *significa que* $x \leq y$.

Es inmediato que $x > 0$ si x es positivo, (es decir, $x \in \mathbb{R}^+$). Si $x < 0$ entonces decimos que x es negativo. Deducimos algunas propiedades de estos axiomas. Las demostraciones omitidas son a cuenta del lector.

Proposición 11 *Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$; si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.*

Demostración. Si

$$a < b \Rightarrow b - a > 0$$

$$b < c \Rightarrow c - b > 0$$

En virtud del Axioma 7 se puede sumar, y se tiene que $(b-a)+(c-b) > 0$, de donde $c - a > 0 \Rightarrow a < c$.

♠

Proposición 12 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces es cierta una y solo una de las siguientes relaciones: $a < b; b < a$ o bien $a = b$.*

Proposición 13 *Si $a \neq 0$, $a^2 > 0$.*

Demostración. Si $a > 0$ entonces por el Axioma 7, $a \times a > 0$.
Si $a < 0$ entonces $(-a) > 0$, y en este caso $(-a)(-a) > 0$ también como resultado del Axioma 7.

♠

Proposición 14 *Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.*

Proposición 15 *Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o bien ambos negativos.*

Para concluir nuestra construcción de los números reales, falta enunciar un último axioma, que veremos con más cuidado que los anteriores. Este axioma permite definir los números irracionales, y de él se deducen las propiedades de continuidad de los números reales.

Los nueve axiomas enunciados hasta el momento son satisfechos por el conjunto de los números racionales. Sin embargo, problemas elementales como el de encontrar una solución de $x^2 = a$ no pueden ser resueltos apelando solo a este conjunto. Como un décimo axioma introducimos la posibilidad de resolver problemas como el del ejemplo.

Definición 16 *Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ y $k \in \mathbb{R}$; si $x \leq k$, $\forall\, x \in S$ diremos que k es una cota superior de S.*

Es evidente que si k es cota superior de S, entonces cualquier $k' : k' > k$ es también una cota superior.

Definición 17 *Sean k y S como en la Definición 16. Diremos que k es un máximo de S si k es cota superior y además $k \in S$.*

Ejemplo 18 *Sea* $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. *$S$ está acotado superiormente por* $k : k \geq 1$. *Como* 1 *es cota superior y además* $1 \in S$ *entonces* 1 *es máximo de* S.

Ejemplo 19 *Consideremos ahora* $T = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$. *$k$ será cota superior si y solo si* $k \geq 1$. *En este ejemplo a diferencia del anterior,* $1 \notin T$, *por lo cual* 1 *no es máximo de* T.

Definición 20 *Un número* $k \in \mathbb{R}$ *se denomina supremo de* $S \neq \emptyset$ *si* k *es la menor de las cotas superiores de* S. *Esto es:* k' *es cota superior de* S, *entonces* $k' \geq k$. *A tal número se le denota* $\sup(S)$, *siempre que exista.*

Si S tiene máximo entonces este máximo será supremo de S. El recíproco no es cierto. Es decir: un conjunto puede no tener máximo, y sin embargo sí tener supremo. El Ejemplo 19 muestra ésto, pues 1 es el supremo de T. Las Figuras 1.1 y 1.2 ilustran respectivamente a los conjuntos $S, T \in \mathbb{R}$.

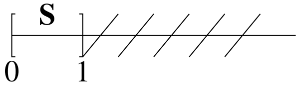


Figura 1.1: El conjunto S tiene máximo, que es supremo.

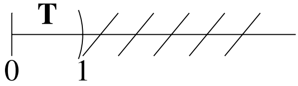


Figura 1.2: El conjunto T no tiene máximo, y 1 es supremo de T.

Proposición 21 *Si existe supremo de un conjunto, es único.*

Demostración. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto y k, k' dos números reales, supremos de S. Como k es supremo, entonces $k' \geq k$, pero como k' también es supremo, $k \geq k'$, de donde $k = k'$.

♠

Con estos comentarios podemos enunciar el siguiente.

Axioma 10 *Todo subconjunto real no vacío acotado superiormente tiene supremo:*

$$\forall\, S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset : s \leq k_0\ \forall\, s \in S,\ \textit{entonces}\ \exists\, k \in \mathbb{R} : \sup(S) = k.$$

A partir de los Axiomas 1 a 10 es posible dar la siguiente definición.

Definición 22 *El conjunto $\mathbb{R}$ que verifica los Axiomas 1 a 10 con las operaciones $+$ y $\times$ lo llamaremos conjunto de los números reales.*

De manera análoga, como definimos cota superior, máximo y supremo, se puede definir cota inferior, mínimo e ínfimo. Queda a cargo del lector hacerlo.
Demostraremos la siguiente:

Proposición 23 *Dado $S \neq \emptyset, S \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente, entonces existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $l = \text{ínf}(S)$.*

Demostración. Sea $-S = \{x \in \mathbb{R} : -x \in S\}$ entonces $-S \neq \emptyset$.
Si c es una cota inferior de S, entonces $c \leq x, \forall\, x \in S$, de donde $-c \geq -x, \forall\, x \in S$. Luego $-S$ es acotado superiormente, y por el Axioma 10, $\exists\, k \in \mathbb{R} : k = \sup(-S)$. Tomando $l = -k$ es fácil comprobar que $l = \text{ínf}(S)$. En efecto, l es cota inferior de S. Falta ver que es la mayor. Sea $l' \in \mathbb{R}$ tal que $l' \leq x, \forall\, x \in S$. Entonces $-l' \geq -x, \forall\, -x \in -S$. Luego $-l' \geq \sup(-S) = -l$ de donde $l' \leq l$.

♠

Proposición 24 *Sean a, b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$ entonces $a \leq b$.*

Demostración. Supongamos por absurdo que $b < a$, entonces tomando $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ se tiene $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$, lo cual contradice la hipótesis.

♠

La siguiente propiedad establece que todo conjunto acotado superiormente (y por lo tanto con supremo) contiene elementos tan próximos al supremo como se quiera.

Proposición 25 *Sean $h \in \mathbb{R}, h > 0$ y $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto de reales, entonces:*

1. *Si S tiene supremo, existe $x \in S$ tal que $x > \sup(S) - h$.*

2. *Si S tiene ínfimo, existe $x \in S$ tal que $x < \text{ínf}(S) + h$.*

Demostración.

1. Supongamos nuevamente por absurdo que $x \leq \sup(S) - h, \forall\, x \in S$. Entonces $\sup(S) - h$ sería cota superior de S, pero como $h > 0$, $\sup(S) - h < \sup(S)$, lo cual es absurdo.

2. Se demuestra de manera análoga.

♠

Por último, recordaremos que no era posible utilizando solo los nueve primeros axiomas resolver problemas como la ecuación $x^2 = 2$. Veremos a continuación que el Axioma 10 nos permite definir la raíz cuadrada de cualquier número no negativo, y por ende resolver este problema.

Proposición 26 *Cada número real a no negativo tiene una única raíz cuadrada no negativa.*

Demostración. Si $a = 0$ entonces 0 es la única raíz. Supongamos entonces que $a > 0$. Sea $S = \{x : x > 0, x^2 \leq a\}$. Como $(1+a)^2 > a$ entonces $1 + a$ es cota superior de S. Además, $S \neq \emptyset$, pues $\frac{a}{(1+a)} \in S$. En efecto, como $a^2 \leq a(1+a)^2$ entonces $\frac{a^2}{(1+a)^2} \leq a$. En virtud del Axioma 10, S tiene supremo. Sea $\sup(S) = b$, $b \geq \frac{a}{1+a}$, y por lo tanto $b > 0$. Existen solo tres posibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$ o bien $b^2 = a$.

Si $b^2 > a$ tomamos $c = b - \frac{b^2-a}{2b} = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$. Entonces $0 < c < b$, y $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + \frac{(b^2-a)^2}{4b^2} = a + \frac{(b^2-a)^2}{4b} > a$. Por lo tanto, $c^2 > x^2$ y $c > x, \forall\, x \in S$, siendo c cota superior de S, pero como $c < b$ esto contradice que $b = \sup(S)$.

Si suponemos ahora que $b^2 < a$ como $b > 0$ es posible definir un número $c > 0$ tal que $c < b$ y $c < (a - b^2)/(3b)$. Se tiene entonces que: $(b+c)^2 = b^2 + c(2b+c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a$.

Entonces $(b+c) \in S$ y como $b + c > b$ esto contradice el hecho que b sea una cota superior de S. Por lo tanto debe ser $b^2 = a$.

♠

1.2. Número complejo: definición y operaciones

Hemos probado que el conjunto de los números reales permite soluciones de $x^2 = a$, con $a \geq 0$. Pero como el cuadrado de un real es un número positivo, la ecuación $x^2 = -1$ sigue sin tener solución para $x \in \mathbb{R}$.

El interés en resolver esta ecuación (y otras ecuaciones polinómicas) nos lleva a buscar nuevas extensiones del campo de los números reales. En principio se trata de la motivación "puramente algebraica" de obtener un campo numérico algebraicamente cerrado, es decir donde todas las ecuaciones polinómicas tengan solución. Sin embargo el éxito en la extensión (el número complejo) ha llevado a ir mucho más allá, y el número complejo está presente en buena parte de la matemática y sus aplicaciones.

En este curso se tratarán solo las operaciones más elementales en el campo complejo. Se posterga para el curso de Funciones de variable compleja un tratamiento más a fondo del análisis de variable compleja. Los lectores interesados pueden consultar como referencia a este capítulo [3, 4, 5], para lectura posterior [1].

Supongamos que hemos construido un campo numérico que incluye a los números reales, y donde la ecuación $x^2 = -1$ tiene una raíz que llamaremos i, tal que $i^2 = -1$.

Si el campo numérico tiene definidas operaciones de suma y producto, estarán en él números de la forma $a + bi$, con a y b reales, y también sumas y productos de esa forma.
Suponiendo que valen los axiomas de cuerpo y por lo tanto las reglas de operación habituales, tenemos:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$i^2 = -1.$$

Por lo tanto, la suma y el producto de números de la forma $a + bi$ dan otro número de la misma forma. Parecería, entonces, que para nuestra extensión basta con números de esta forma.

Hasta ahora no hemos dado nungún argumento que asegure la existencia de una extensión de los reales que incluya a $i = \sqrt{-1}$. Sin embargo, una ligera abstracción a partir de lo anterior permite realizar la construcción adecuada.

De hecho, lo que distingue a dos números de la forma $a + bi$ son los dos reales a y b. Podríamos identificar el número con un par de números reales (a, b). Las fórmulas obtenidas informalmente en el desarrollo anterior se transforman en la definición de las operaciones de suma y producto entre estos pares. Este es el camino que desarrollamos a continuación.

Comentamos que el campo así construido permitirá extender todas las propiedades de cuerpo y garantiza la existencia de soluciones para cualquier ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Este resultado se conoce como "teorema fundamental del álgebra", y será demostrado en cursos posteriores. Ver [1].

Definición 27 *Un número complejo es un par ordenado de números reales.*
La primera componente de $z = (a, b)$ se llama parte real de z, y la segunda componente se llama parte imaginaria de z.

Notación 28 $a = Re(z)$, $b = Im(z)$.

Nota 29 *Par ordenado significa que $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$. En otras palabras, el complejo $z = (a, b)$ y el complejo $w = (c, d)$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$. Denotemos por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos.*

Definición 30 *Dados dos complejos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$, definimos la suma $z + w$ y el producto zw por:*

$$z + w = (a + c, b + d); \quad zw = (ac - bd, ad + bc)$$

El producto y la suma de complejos verifican las siguientes propiedades.

Proposición 31 *El producto y la suma de complejos son asociativos, conmutativos y distributivos.*

Demostración. Sólo demostraremos la distributiva. Las otras están a cargo del lector. Sean $v = (a, b)$, $w = (c, d)$ y $z = (e, f)$.

$$\begin{aligned} v(w+z) &= (a,b)(c+e,d+f) = (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\ &= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) = vw+vz. \end{aligned}$$

♠

Proposición 32 *Existen dos complejos* $(0, 0)$ *y* $(1, 0)$ *neutros de la suma y el producto respectivamente.*

Es decir, $\forall\ (a, b) \in \mathbb{C}$, $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ y $(a, b)(1, 0) = (a, b)$.
Demostración a cargo del lector.

Proposición 33 *a) Dado* $z = (a, b) \in \mathbb{C}$*, existe un opuesto* $-z = (-a, -b)$ *tal que* $z + (-z) = 0$.

b) Dado $z = (a, b) \neq (0, 0)$ *existe un inverso:*

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

tal que $zz^{-1} = (1, 0)$.

Demostración. Inmediata haciendo cuentas.

Las afirmaciones anteriores permiten decir que el conjunto $\mathbb{C}$, con las operaciones de suma y producto de la Definición 7, cumple los Axiomas de cuerpo 1 a 6. Introducimos ahora la resta y la división.

Proposición 34 *Dados dos complejos* $z = (a, b)$ *y* $w = (c, d)$ *existe un complejo* $v = (e, f)$ *tal que* $v + w = z$*. Lo designamos* $v = z - w$.

Demostración. El complejo $v = (a - c, b - d)$ cumple lo deseado.

♠

Proposición 35 *Si* z *y* w *son números complejos con* $w \neq (0, 0)$ *existe un número complejo* v *tal que* $wv = z$*. De hecho* $v = zw^{-1}$

La demostración es inmediata.

1.3. Relación entre los números reales y los complejos

Tenemos construido un conjunto, formado por los pares de números reales de la forma (a, b). En virtud de lo dicho en la introducción, utilizando la notación $a + bi$, es natural que el papel de los reales lo jueguen los complejos tales que $b = 0$, es decir, los de la forma $(a, 0)$.

Sea $\mathbb{C}_0$ el conjunto de los números complejos de la forma $(x, 0)$. Es decir los que tienen parte imaginaria nula. Es inmediato que la suma y el producto y la suma de elementos de $\mathbb{C}_0$ también pertenece a $\mathbb{C}_0$, pues:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \ \ (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Esto muestra que los números complejos de la forma $(a, 0)$ se comportan respecto de la suma y el producto de la misma forma que los números reales a. Por eso convenimos con identificar $(a, 0)$ con a.

Como ya hemos dicho los complejos verifican los Axiomas de cuerpo de los reales (Axiomas 1 a 6), es decir que los números complejos forman una estructura algebraica de cuerpo.

Cuando entre dos estructuras algebraicas se puede establecer una correspondencia "1 a 1" que respete las operaciones, se dice que ambas estructuras son isomorfas, es decir que esencialmente se comportan como si fueran lo mismo. Esto es lo que ocurre entre $\mathbb{C}_0$ y $\mathbb{R}$ y por eso tiene sentido identificar, como hemos dicho, los complejos con parte imaginaria nula y los números reales.

Podemos formalizar un poco más esta idea: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0 : f(x) = (x, 0)$. Es evidente que f es biyectiva. Veremos que f respeta las operaciones:

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y);$$

$$f(xy) = (xy, 0) = (x, 0)(y, 0) = f(x)f(y).$$

Luego f es un isomorfismo entre C_0 y $\mathbb{R}$.

Para que la identificación sea completa haría falta además definir un orden en $\mathbb{C}_0$ (Axiomas 7 a 10), lo que puede hacerse en forma natural, de modo que la correspondencia preserve también el orden (f preserva el orden si definimos $(a, 0) < (b, 0)$ si y solo si $a < b$).

Como $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$ podemos pensar a los números complejos como una extensión de los reales.

1.4. Unidad imaginaria y representación binómica

Definición 36 *Llamaremos unidad imaginaria al complejo* $(0,1)$*, al que notaremos* i*.*

Nota 37 $i^2 = (0,1)(0,1) = -1$ *de donde* i *es raíz de la ecuación* $x^2 + 1 = 0$*.*

La ley de multiplicación nos permite la siguiente igualdad $(b,0)i = (b,0)(0,1) = (0,b)$, de donde $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + i(b,0)$. Entonces poniendo $(a,0) = a$ y $(b,0) = b$ podemos escribir cualquier complejo $z = (a,b)$ como $z = a + bi$.

Reencontramos entonces las expresiones que fueron presentadas al principio. Haciendo la salvedad de que a y b no son aquí reales sino sus "copias" $(a,0)$ y $(b,0)$ en $\mathbb{C}_0$, todo lo que allí se dijo es válido y la notación resulta cómoda como forma de cálculo.

1.4.1. Representación gráfica

Es posible representar el número complejo $z = (a,b)$ como el punto del plano $x0y$ de coordenadas (a,b). En esta situación llamaremos eje real al eje $\overrightarrow{0x}$ y eje imaginario al eje $\overrightarrow{0y}$. Indistintamente identificaremos al número complejo z con el correspondiente punto del plano.

De la misma forma es posible representar el complejo z como el vector geométrico que une el origen con el punto (a,b) como indica la Figura 1.3.

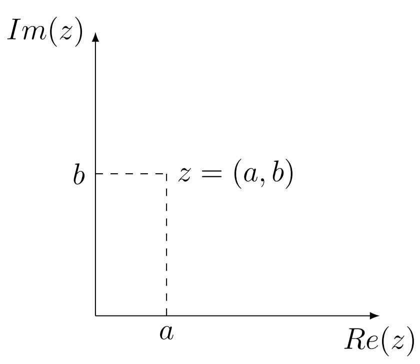


Figura 1.3: Representación de un número complejo en el plano.

La suma y resta de complejos tiene una sencilla interpretación geométrica según la regla del paralelogramo tal como lo ilustra la Figura 1.4.

Es decir que el vector $z + w$ es una diagonal del paralelogramo de lados z y w, y la diferencia $z - w$ el vector paralelo por el origen a la otra diagonal.

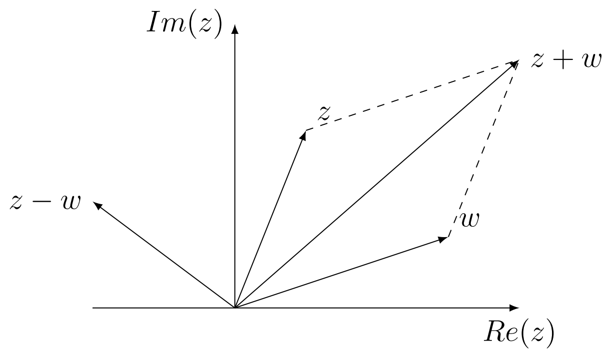


Figura 1.4: Representación geométrica de la suma y la resta de dos números complejos.

Definición 38 *Sea $z = a + ib$. Llamamos módulo de z al número $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Si $z \neq 0$, sea φ el ángulo entre el eje $\overrightarrow{Ox}$ y el vector (a, b) (definido a menos de un múltiplo de 2π). φ se llama argumento de z (existen por lo tanto infinitos argumentos de z que difieren en múltiplos de 2π).*

La Figura 1.5 muestra la representación polar de un número complejo.

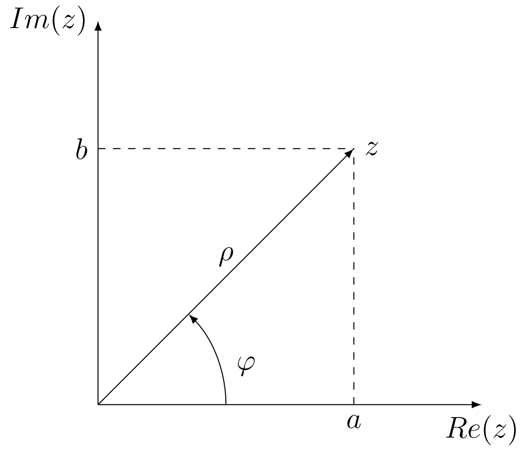


Figura 1.5: Representación polar de un número complejo.

Se verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Si se quiere una determinación unívoca del argumento es usual elegir $\varphi \in (-\pi, \pi]$ y llamarle argumento principal de z $(arg(z))$.

Ejemplo 39 $|i| = 1$, $arg(i) = \pi/2$

Un complejo puede estar dado entonces por sus partes real e imaginaria a y b, o por su módulo y argumento ρ y φ. Las ecuaciones 1.1 permiten pasar de (ρ, φ) a (a, b). Para el pasaje inverso: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Calculamos φ para $z \neq 0$:

- si $a = 0 : \begin{cases} arg(z) = \pi/2 & \text{si } b > 0 \\ arg(z) = -\pi/2 & \text{si } b < 0 \end{cases}$
- si $a \neq 0$: $\tan(\varphi) = (b/a)$. La función $\arctan(\cdot)$ es inversa de la función $\tan(\cdot)$ para $\varphi \in (-\pi, \pi]$, de donde:
    - si $a > 0$: $arg(z) = \arctan(b/a)$
    - si $a < 0 : \begin{cases} arg(z) = \arctan(b/a) + \pi & \text{si } b > 0 \\ arg(z) = \arctan(b/a) - \pi & \text{si } b < 0 \end{cases}$

Definición 40 *Llamaremos conjugado de $z = a + bi$ al complejo $\overline{z} = a - bi$.*

Obsérvese que el conjugado no es otra cosa que el simétrico de z respecto del eje $\overrightarrow{Ox}$. La Figura 1.6 representa al complejo $\overline{z}$ en el plano complejo.

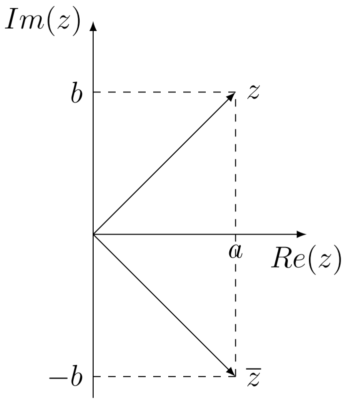


Figura 1.6: Representación gráfica del conjugado de z, denotado mediante $\overline{z}$.

Algunas propiedades del conjugado:

Propiedad 41

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$

4. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

5. $\overline{\overline{z}} = z$

6. *Si z es raíz de un polinomio P(z) de coeficientes reales, entonces $\overline{z}$ también es raíz.*

La demostración de 1 a 5 quedan como ejercicio. Para ver 6 observar que si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

La conjugación resulta útil para el cálculo de divisiones en $\mathbb{C}$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador, y así se obtiene la forma binómica del cociente.

Ejemplo 42 $\frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+3i-2i+3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{i}{2}$.

1.4.2. Propiedades del módulo

Notemos que el módulo de $|z|$ es la distancia del punto z al origen, y como tal tiene la propiedad de las longitudes de segmentos.

Propiedad 43

1. $|z| \geq 0$

2. $|z| = 0$ *sii* $z = (0, 0)$

3. $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z|$

4. $|zw| = |z||w|$; $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

5. $z\overline{z} = |z|^2$

6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Desigualdad triangular)*

Demostración. Sea $z = a + bi$; $w = c + di$

3. $Re(z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow |Re(z)| \leq |z|$ (Idem para $|Im(z)| \leq |z|$)

4. $|zw|^2 = |(ac - bd) + (ad + bc)i|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2 \Rightarrow |zw| = |z||w|$

6. $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2 \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$

¿Se pierde algo en la extensión de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$? Hasta ahora nos hemos conformado con tener en $\mathbb{C}$ una estructura de cuerpo, es decir con los Axiomas 1 a 6 presentados al principio. Como veremos a continuación, no es posible extender para $\mathbb{C}$ los Axiomas 7 a 9, es decir que no es posible definir un orden en los complejos que preserve las propiedades que tiene en $\mathbb{R}$.

Supongamos que esto fuera posible, y existiera $\mathbb{C}^+ \subset \mathbb{C}$ cumpliendo los Axiomas 7 a 9. Si el complejo $i \in \mathbb{C}^+$, deducimos por el Axioma 7 que $i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+$, y entonces $(-1)^2 = 1 \in \mathbb{C}^+$, de donde $-1+1 = 0 \in \mathbb{C}^+$, lo que contradice el Axioma 9. Si $i \notin \mathbb{C}^+$, por Axioma 8 $-i \in \mathbb{C}^+$, y en forma análoga se llega a una contradicción. Por lo tanto, si definimos un orden en $\mathbb{C}$, debemos sacrificar algunas propiedades que tiene en $\mathbb{R}$ (en particular, la monotonía del producto del Axioma 7). En cuanto al Axioma 10, que da la completitud de $\mathbb{R}$, obviamente depende también de la noción de orden que no tenemos en $\mathbb{C}$. De hecho, pueden darse otras versiones equivalentes de la noción de completitud en $\mathbb{R}$, que sí pueden extenderse a $\mathbb{C}$. Volveremos a esto en el Capítulo 2.

1.5. Exponencial compleja

La idea es definir una funcion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = e^z$, que llamaremos exponencial compleja, y que tenga propiedades similares a la exponencial real e^x. Las propiedades de e^x que deseamos conservar son la ley de exponentes $e^{x+y} = e^x e^y$ y por supuesto que $e^z = e^x$ si $Im(z) = 0$. Daremos una definición para e^z con $z \in \mathbb{C}$ y veremos que se conservan estas propiedades.

Definición 44 *Si $z = a + bi$, definimos $e^z = e^{a+bi}$ como el número complejo $e^z = e^a(\cos(b) + i\text{sen}(b))$.*

Proposición 45 *Si $z = a + ib$ y $w = c + id$ son dos números complejos entonces $e^z e^w = e^{z+w}$.*

Demostración. $e^z = e^a(\cos(b) + i\text{sen}(b))$; $e^w = e^c(\cos(d) + i\text{sen}(d)) \Rightarrow e^z e^w = e^a e^c(\cos(b)\cos(d) + i\cos(b)\text{sen}(d) - \text{sen}(b)\text{sen}(d) + i\text{sen}(b)\cos(d)) = e^a e^c(\cos(b)\cos(d) - \text{sen}(b)\text{sen}(d) + i(\cos(b)\text{sen}(d) + \text{sen}(b)\cos(d))$
Ahora

$$\begin{cases} \cos(b)\cos(d) - \text{sen}(b)\text{sen}(d) = \cos(b+d) \\ \cos(b)\text{sen}(d) + \text{sen}(b)\cos(d) = \text{sen}(b+d) \end{cases}$$

Además $e^a e^c = e^{a+c}$ porque a y c son reales. Entonces tenemos que:

$$e^z e^w = e^{a+c}(\cos(b+d) + i\text{sen}(b+d)) = e^{z+w}$$

♠

Es inmediato además ver que si $z = a + 0i$, entonces $e^z = e^a \cos(0 + i\mathrm{sen}(0)) = e^a$.

Ejemplo 46 $e^{i\pi} = -1$

Proposición 47 $e^z \neq 0 \; \forall \; z \in \mathbb{C}$.

Demostración. $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ de donde $e^z \neq 0$

♠

Se deduce también de aquí que $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

Proposición 48 *Si* $z = a + ib$ *entonces* $|e^z| = e^a$ *; en particular,* $|e^{ib}| = 1$.

Demostración. $|e^z| = e^a\sqrt{\cos(b)^2 + \mathrm{sen}(b)^2} = e^a$

♠

Proposición 49 $e^z = 1 \Leftrightarrow z$ *es un múltiplo de* $2\pi i$.

Demostración.
($\Leftarrow$) Si $z = 2\pi i n$ donde n es entero entonces: $e^z = \cos(2\pi n) + i\mathrm{sen}(2\pi n) = 1$
($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $e^z = 1$, entonces $|e^z| = e^a = 1 \Rightarrow a = 0$.
Por lo tanto $z = ib$. Ahora, $e^{ib} = \cos(b) + i\mathrm{sen}(b) = 1$, de donde $\cos(b) = 1, \mathrm{sen}(b) = 0$ y por lo tanto $b = 2\pi n$.

♠

Corolario 50 $e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + i2\pi n$, *con* n *entero.*

Demostración. $e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z - w = i2\pi n \Leftrightarrow z = w + i2\pi n$

♠

1.5.1. Fórmulas de Euler

A partir de las ecuaciones $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi)$; $e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\text{sen}(\varphi)$ se deduce que:

$$\begin{cases} \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \cos(\varphi) \\ \\ \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \text{sen}(\varphi) \end{cases}$$

Estas fórmulas son conocidas como fórmulas de Euler. Veremos ahora una notación para los complejos sumamente cómoda para efectuar las operaciones de división y multiplicación.

Proposición 51 *Todo número complejo $z = a + ib$, puede ser representado como $z = \rho e^{i\varphi}$ donde $\rho = |z|$ y φ es un argumento de z.*

Demostración. $z = a + ib$. Recordemos la notación polar: $a = \rho\cos(\varphi)$, y $b = \rho\text{sen}(\varphi)$, de donde: $z = \rho(\cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi))$. Como $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi) \Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}$

♠

Utilizando las propiedades de la exponencial es ahora muy fácil multiplicar y dividir dos complejos. Sea $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho e^{i\varphi_2}$

$$z_1 z_2 = (\rho_1 e^{i\varphi_1})(\rho_2 e^{i\varphi_2}) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\varphi_1}}{\rho_2 e^{\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

1.5.2. Aplicaciones geométricas

Consideremos la función del plano complejo en sí mismo dada por $F(z) = \alpha z + \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Estudiaremos qué interpretación geométrica tiene esta transformación del plano en el plano.

Caso 1. $\alpha = 1, \beta$ arbitrario. En este caso $F(z) = z + \beta$ representa una traslación de vector β en el plano, como se observa en la Figura 1.7

Caso 2. $\beta = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, se trata de una homotecia de centro $(0, 0)$ y razón α como se observa en la Figura 1.8.

Caso 3. $\beta = 0$, $\alpha = e^{i\theta}$. Si $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces $\alpha z = \rho e^{i(\theta+\varphi)}$, de donde (ver Figura 1.9), la función equivale a una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ.

Caso 4. $\beta = 0$, $\alpha = \rho_0 e^{i\theta}$. A partir de los casos 2 y 3 se deduce que la función $F(z) = \alpha z$ representa la composición de una rotación de ángulo θ y una homotecia de razón ρ_0, es decir una rotohomotecia en el plano.

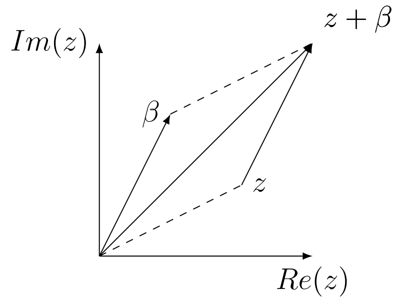


Figura 1.7: Traslación del complejo z por el complejo β, con resultado $z+\beta$.

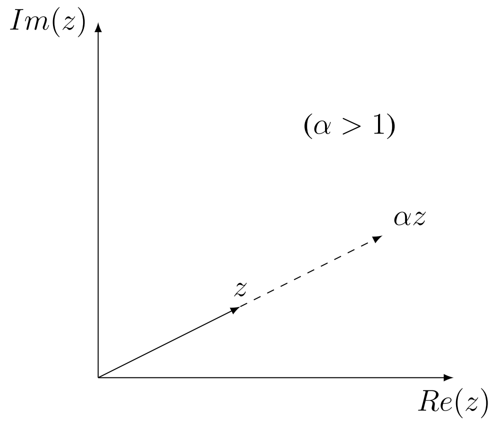


Figura 1.8: Multiplicación del complejo z por el factor real α, con resultado αz.

Caso 5. El caso general se deduce de los anteriores. Se trata de la composición de una rotohomotecia con una traslación, lo que equivale a una semejanza directa en el plano.

Excepto en el caso de una traslación ($\alpha = 1$), se sabe que una tal semejanza tiene un único punto unido (z_0 es un punto unido de F si $F(z_0) = z_0$). Obtengámoslo: De $z = F(z) = \alpha z + \beta$ se tiene $z = \beta/(1-\alpha)$, punto unido de F.

Ejercicio 52 *Mostrar que $F(z) = iz$ representa una rotación en el plano de centro (0,0) y de ángulo $\frac{\pi}{2}$.*

Ejercicio 53 *Sea $F(z) = 21z + (1-2i)$. Hallar como ejercicio el punto unido y la imagen del eje imaginario.*

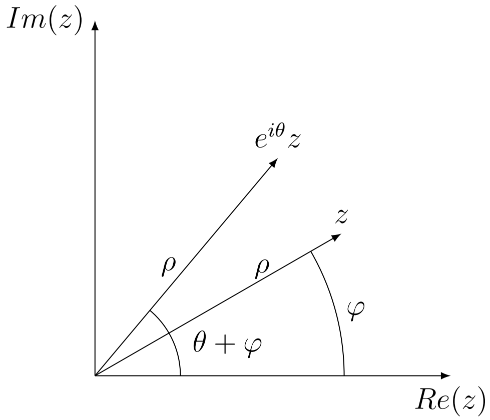


Figura 1.9: Rotación del complejo z por un ángulo θ, con resultado $ze^{i\theta}$.

1.5.3. Potencias enteras y raíces

Definición 54 *Dados un número complejo z y un entero, definimos la n-ésima potencia de z como sigue*

$$\begin{cases} z^0 = 1;\ z^{n+1} = z^n z & \textit{si } n \geq 0 \\ z^{-n} = (z^{-1})^n & \textit{si } z \neq 0 \textit{ y } n > 0 \end{cases}$$

Esta definición permite mantener las reglas usuales de exponente, es decir si m y n son enteros y $z \neq 0$:

$$z^n z^m = z^{n+m} \quad \text{y } (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$$

Es fácil realizar la demostración por inducción completa y queda a cargo del lector.

Ejemplo 55 *Calcular las potencias de i: $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$. Observamos que $i^4 = i^0$, de donde $i^{4k+j} = i^j\ \forall\ k, j$. Es decir, las potencias de i se repiten cada cuatro, solo tomando los valores* $1, i, -1, -i$.

En coordenadas polares, si $z = \rho e^{i\varphi}$ entonces $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$. La potencia queda expresada en forma mucha más compacta que en notación binómica. La Figura 1.10 ilustra geométricamente la potencia compleja en notación polar.

Ejercicio 56 *Probar el teorema de De Moivre: Sea n un número entero, entonces*

$$(\cos(\varphi) + i\mathrm{sen}(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\mathrm{sen}(n\varphi)$$

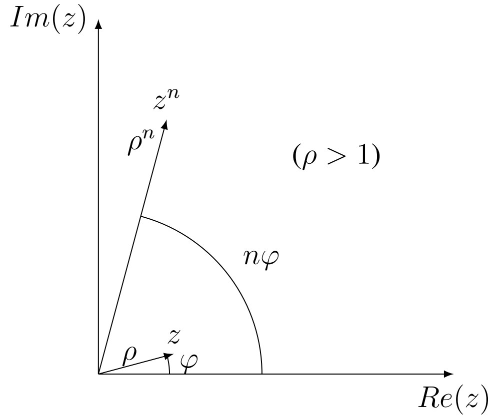


Figura 1.10: Representación polar de la potencia z^n de un complejo z.

Aplicar lo anterior para demostrar que:

$$sin(3\varphi) = 3\cos(\varphi)^2 \mathrm{sen}(\varphi) - \mathrm{sen}(\varphi)^3$$
$$\cos(3\varphi) = \cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi)^2$$

El siguiente teorema da una fórmula para la raíz n-ésima de un complejo.

Proposición 57 *Si $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\varphi}$ y si n es un entero positivo, entonces existen exactamente n números complejos distintos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (llamados raíces n-ésimas) tales que:*

$$\begin{cases} z_k^n = z \textit{ para cada } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ z_k = \rho_k e^{i\varphi_k} \textit{ con } \rho_k = \rho^{\frac{1}{n}} \textit{ y } \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} (k = 0, 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Demostración. Es evidente que los n números z_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ verifican que $z_k^n = z$ pues $z_k^n = \rho_k^n e^{in\varphi_k} = \rho e^{i\varphi}$.
Hay que probar que son los únicos números que cumplen esto. Supongamos que $w = Ae^{i\alpha}$ verifica que $w^n = z$. Entonces $A^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\alpha}$ de donde $A^n = \rho$ (y por tanto $A = \rho^{\frac{1}{n}}$) y $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ para algún k, de donde $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$. Pero si k toma todos los valores enteros w solo toma valores $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

♠

La proposición anterior prueba que un complejo tiene n raíces n-ésimas, que tienen todas el mismo módulo y argumentos que difieren en múltiplos de $2\pi/n$. Desde el punto de vista geométrico las n raíces ocupan los vértices de un polígono regular (ver Figura 1.11).

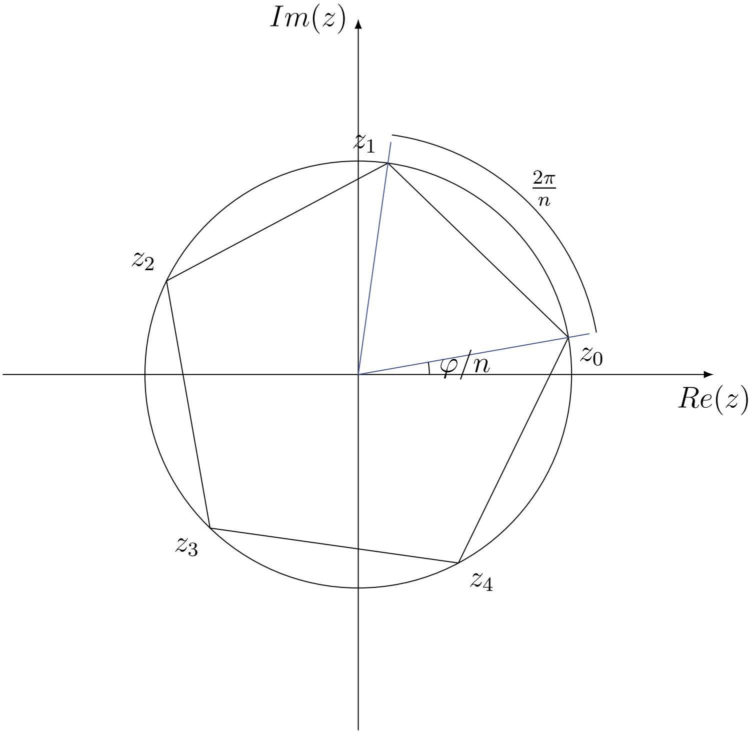


Figura 1.11: Las n raíces $\sqrt[n]{z}$ del complejo z ocupan los vértices de un polígono. En el ejemplo $n = 5$

Ejemplo 58 *Las 4 raíces cuartas de* 1 *son* $z_k = 1e^{i(2k\pi/4)}$, $k = 0, 1, 2, 3$. *O sea:* $1, i, -1, -i$. *Graficarlas.*

1.6. Logaritmo complejo

Ya hemos visto que $e^z \neq 0$. Sin embargo 0 es el único número que e^z no puede tomar jamás. Esto se ve en el siguiente resultado que al mismo tiempo sirve para justificar la definición del logaritmo complejo.

Proposición 59 *Si* $z \neq 0$ *es un número complejo entonces existen infinitos números complejos* w *tales que* $e^w = z$. *Además estos números tienen la forma*

$$\log|z| + i(arg(z) + 2\pi n), \text{ con } n \text{ entero}$$

.

Demostración. Como $e^{\log|z| + iarg(z)} = e^{\log|z|}e^{iarg(z)} = |z|e^{iarg(z)} = z$, vemos que $w = \log|z| + iarg(z)$ es una solución de la ecuación $e^w = z$. Si w_0 es otra solución

entonces:
$e^w = e^{w_0}$ y $w - w_0 = 2k\pi i$.

♠

Queda justificado entonces lo siguiente:

Definición 60 *Sea $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\varphi}$. Denotamos por $\log(z)$ al conjunto de los logaritmos de z, es decir:*

$$\log(z) = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log(\rho) + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Nótese que lo anterior no define una función, ya que existen infinitos logaritmos para un complejo z. Se dice a veces que $\log(z)$ es una función multiforme aunque en rigor no es una función.
Para definir una función, hace falta elegir uno de los logaritmos, lo que equivale a elegir uno de los argumentos de z. Si se elige el argumento principal, se define la función logaritmo principal:

Definición 61 $z \neq 0$. *La función $\log(z) = \log|z| + iarg(z)$ se llama logaritmo principal de z.*
Si z es real positivo entonces $z = x + 0i \Rightarrow \log(z) = \log(x)$ pues $|z| = x$ y $arg(z) = 0$. Lo cual muestra que el logaritmo principal complejo extiende la definición del logaritmo real al campo complejo.

1.7. Seno y coseno complejo

Definición 62 *Definimos la función seno, coseno y tangente compleja como:*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

Estas definiciones extienden las fórmulas de Euler al campo complejo. Es fácil observar que las funciones trigonométricas complejas cuando z es real coinciden con las trigonométricas reales y además el seno y coseno complejo son periódicas de período 2π y la tangente es periódica de período π.

Al obtener fórmulas para las funciones trigonométricas en notación binómica, aparecen las funciones hiperbólicas reales. Las repasaremos brevemente.

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(seno, coseno y tangente hiperbólicas respectivamente). Tales funciones son representadas en la Figura 1.12: Se cumple que $\cosh(x)^2 - \operatorname{senh}(x)^2 = 1$

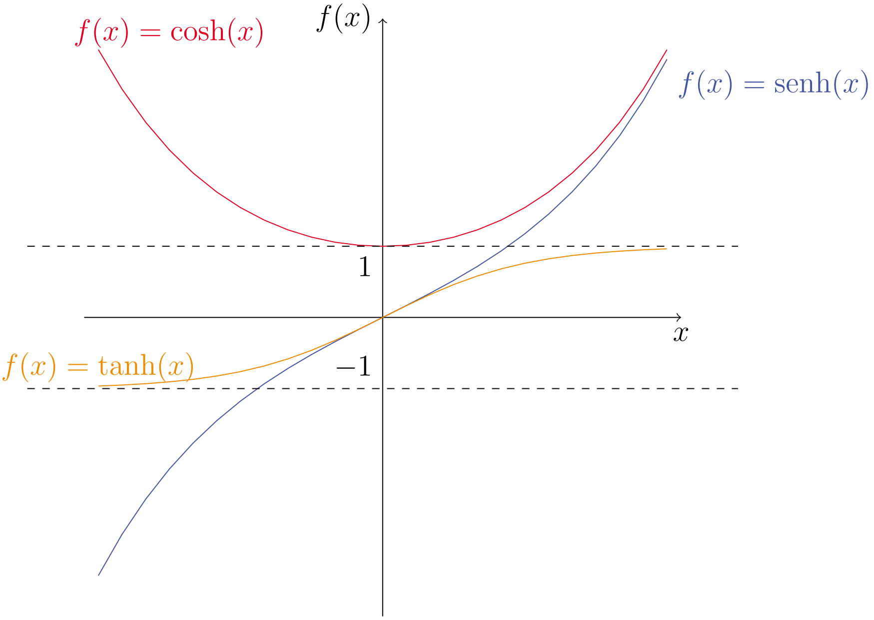


Figura 1.12: Representación gráfica de las funciones $\cosh(x)$, $\operatorname{senh}(x)$ y $\tanh(x)$.

La siguiente proposición da una fórmula cómoda para las funciones trigonométricas complejas.

Proposición 63 *Sea $z = a + ib$, entonces tenemos:*

1. $\cos(z) = \cos(a)\cosh(b) - i\operatorname{sen}(a)\operatorname{senh}(b)$

2. $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(a)\cosh(b) + i\cos(a)\operatorname{senh}(b)$

3. $\tan(z) = \frac{\tan(a)+i\tanh(b)}{1-i\tan(a)\tan(b)}$

Demostración. $2\cos(z) = e^{iz}+e^{-iz} = e^{-b}(\cos(a)+i\mathrm{sen}(a))+e^{b}(\cos(a)-i\mathrm{sen}(a)) = \cos(a)(e^{b}+e^{-b}) + i\mathrm{sen}(a)(e^{-b}-e^{b}) = 2\cos(a)\cosh(b) - 2i\mathrm{sen}(a)\mathrm{senh}(b)$

♠

Análogamente se demuestran las otras igualdades.
Ejercicios. Probar las siguientes identidades:

1. $\mathrm{sen}(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$
2. $\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\mathrm{sen}(w)$
3. $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \mathrm{sen}(z)\mathrm{sen}(w)$
4. $\mathrm{sen}(2z) = 2\mathrm{sen}(z)\cos(z)$
5. $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \mathrm{sen}(z)^2$
6. si $z = a+ib \Rightarrow \begin{cases} |\mathrm{sen}(z)|^2 = \mathrm{sen}(a)^2 + \mathrm{senh}(b)^2 \\ |\cos(z)|^2 = \cos(a)^2 + \mathrm{senh}(b)^2 \end{cases}$
   de donde se deduce que $|\mathrm{sen}(z)|$ y $|\cos(z)|$ no son acotados.

Capítulo 2

Sucesiones y series

2.1. Introducción

Los temas cubiertos en este capítulo corresponden en su mayor parte a los cursos de secundaria. El objetivo de lo que sigue es ofrecer un breve repaso de algunos puntos y complementar con más profundidad otros.
En este sentido, el estudio de límites de sucesiones, en lo referente al cálculo de límites, es tratado en forma breve y a modo de repaso de prerrequisitos. El desarrollo no es, por lo tanto, una fuente adecuada para quien no conozca nada del tema. Nos remitimos para ello a la bibliografía.
Nos detendremos con más detalle en otros aspectos (subsucesiones, sucesiones de Cauchy, series) donde se dará un enfoque más autocontenido.

2.2. Sucesiones

2.2.1. Sucesiones y límites en $\mathbb{R}$

Definición 64 *Sea* $a \in \mathbb{R}$*, y* $r > 0$*. Llamamos* entorno de centro a y radio r *al conjunto*

$$E(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$$

. *Llamamos* entorno reducido de centro a y radio r *al conjunto*

$$E'(a,r) = E(a,r) - \{a\} = (a-r,a) \cup (a, a+r).$$

Definición 65 *Una sucesión real es una función de* $\mathbb{N}$ *(naturales) en* $\mathbb{R}$*. Se denota* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a la sucesión* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tal que* $a_n = a(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación 66

1. *La definición responde a la idea de un ordenamiento infinito de números reales, uno por cada natural.*

2. *La sucesión no puede ser sobreyectiva, es decir que no es posible recorrer los reales con una sucesión. Se dice que $\mathbb{R}$ es un conjunto* no numerable.
No entraremos en detalle sobre esto aunque es conveniente que el lector recuerde que los números reales son "muchos más" que los naturales y los racionales (estos también forman un conjunto numerable). El lector interesado puede ver en [2], Sección 2.11.

Ejemplo 67 $a_n = 0, \forall\, n$

Ejemplo 68 $a_n = (-1)^n$

Ejemplo 69 $a_n = 2^{n(-1)^n}$

Ejemplo 70 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Ejemplo 71 $a_n = \frac{n^n}{n!}$ *($n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$)*

Ejemplo 72 *Sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{b}{a_n}}{2}$, $\forall\, n \geq 0$, ($b \in \mathbb{R}$, $b > 0$). En este caso, por inducción queda bien definido a_n para cada $n \in \mathbb{N}$, pero no tenemos una fórmula explícita.*

Definición 73 *Límite de una sucesión*
Sea $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\, E(L,\varepsilon), \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, a_n \in E(L,\varepsilon).$$

Es decir, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite L si fijado cualquier entorno de L la sucesión permanece en él a partir de cierto índice. En los ejemplos anteriores, las sucesiones de los ejemplos 67 y 70 tienen límite 0 y 1 respectivamente, como es fácil de verificar. En la sucesión del Ejemplo 68, los términos pares valen 1 y los impares -1. Para cualquier L, eligiendo $\varepsilon < 1$ la sucesión no permanece en $E(L,\varepsilon)$ a partir de algún n_0. Por lo tanto, la sucesión del Ejemplo 68 no tiene límite. Algo similar ocurre en el Ejemplo 69. Los ejemplos 71 y 72 serán estudiados más adelante.

Proposición 74 (Unicidad del límite)
Si existe $\lim_{n\to+\infty} a_n$, entonces es único.

Demostración. Si existen dos límites $L \neq L'$, eligiendo $\varepsilon = \frac{|L-L'|}{2}$ obtenemos dos entornos $E(L, \varepsilon)$ y $E(L', \varepsilon)$ que son disjuntos: $E(L, \varepsilon) \cap E(L', \varepsilon) = \emptyset$.
Pero $\forall\, n \geq n_0,\, a_n \in E(L, \varepsilon)$, y $\forall\, n \geq n_1, a_n \in E(L', \varepsilon)$.
Entonces $\forall\, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, $a_n \in E(L, \varepsilon) \cap E(L', \varepsilon)$, lo que es absurdo.

♠

Definición 75 *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si y solo si $\exists\, k : |a_n| \leq k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 76 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite L, está acotada.*

Demostración. Elegido $\varepsilon > 0$ cualquiera, $\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, a_n \in E(L, \varepsilon)$.
Entonces, $\forall\, n \geq n_0, L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ de donde $|a_n| \leq |L| + \varepsilon$.
Tomando $K = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |L|+\varepsilon\}$, se cumple que $|a_n| \leq K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

♠

Observación 1 *El recíproco de la Proposición 76 no es cierto, como lo muestra el Ejemplo 68 $a_n = (-1)^n$, que es una sucesión acotada que no tiene límite. Se verá una versión más débil del recíproco en la Sección 2.2.4.*

Definición 77 *(Límites infinitos)*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\, K \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, a_n \geq K,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\, K \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, a_n \leq K.$$

Es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ ($-\infty$) si fijada cualquier "barrera", la sucesión termina permaneciendo encima (debajo) de la barrera.

Ejemplo 78 *$a_n = n, \forall\, n$, verifica que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.*

Observaciones y notaciones 1

1. *Diremos que una sucesión* converge *si tiene límite finito, que* diverge *si tiene límite infinito, y que* oscila *en caso de no tener límite.*

2. *Las siguientes notaciones son equivalentes:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L;\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} L;\ a_n \xrightarrow{n} L.$$

(la notación análoga se aplica para límites infinitos).

Ejercicio 79 *Probar que si $a_n \leq b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, entonces $A \leq B$.*

Ejercicio 80 *Probar que si $a_n \leq b_n$, $a_n \xrightarrow{n} +\infty$ entonces $b_n \xrightarrow{n} +\infty$. Aplicarlo al Ejemplo 71.*

2.2.2. Sucesiones monótonas

Definición 81 *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice monótona creciente (decreciente) si y solo si*

$$a_n \leq (\geq) a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

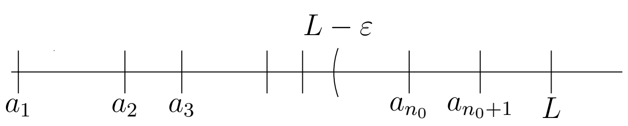
Notación 82 *$(a_n) \nearrow$ $[(a_n) \searrow]$ indica (a_n) monótona creciente (decreciente).*

Teorema 1 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona creciente.*

1. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente ($a_n \leq K$, $\forall\, n$), entonces converge.*
2. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente, entonces diverge a $+\infty$.*

Demostración.

1. Sea $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n \leq L$, $\forall\, n$. Dado $\varepsilon > 0, \exists\, n_0 : a_{n_0} > L - \varepsilon$ (de otro modo no sería extremo superior). Como a_n es creciente, $a_n > L - \varepsilon, \forall\, n \geq n_0$, por lo que $a_n \in E(L, \varepsilon), \forall\, n \geq n_0$.



2. Si a_n no es acotada superiormente, $\forall\, K\, \exists\, n_0 : a_{n_0} \geq K \xrightarrow{(a_n)\nearrow} a_n \geq K, \forall\, n \geq n_0$.

♠

Nota 83 *Análogamente, las sucesiones decrecientes convergen o divergen a $-\infty$ según estén o no acotadas inferiormente.*

Ejemplo 84 *Sean $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.*
Como $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq b_n$, $(b_n) \nearrow$.
Además, $b_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 3$.
Por lo tanto, b_n es acotada superiormente y converge. Al límite se lo llama número e.
Para estudiar (a_n), desarrollemos por el binomio de Newton. Recordamos la fórmula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

donde $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Hemos escrito a_n como suma de términos positivos. Cada sumando crece con n, y además el número de sumandos crece con n. Luego a_n es creciente. Además, claramente $a_n \le b_n \le e$, por lo que (a_n) converge, y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le e$.

En la sección siguiente veremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

Definición 85 *Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman un par de sucesiones monótonas convergentes (PSMC) si y solo si:*

(1) $(a_n) \nearrow$; $(b_n) \searrow$.

(2) $a_n \le b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$.

Proposición 86 *Si $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$ forman un PSMC, entonces convergen al mismo límite.*

Demostración. Probemos primeramente que $a_n \le b_m \forall\ m, n \in \mathbb{N}$. De hecho, si $n \ge m : a_n \le b_n \le b_m$. En caso contrario, cuando $n < m$, $a_n \le a_m \le b_m$.
Luego, (a_n) está acotada superiormente, y por hipótesis, $(a_n) \nearrow$. Estamos en las condiciones del Teorema 1, por lo que $a_n \xrightarrow{n} L$. Dado que $(b_n) \searrow$ y está acotada inferiormente, $b_n \xrightarrow{n} L'$. Se deduce además fácilmente que $L \le L'$.
Si $L \neq L'$ entonces $a_n \le L < L' \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que contradice (3) tomando $\varepsilon = L' - L$.

♠

Ejemplo 87 *(Sucesión de intervalos cerrados encajados)*
Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos tales que $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \ldots$ y además $long(I_n) = b_n - a_n \xrightarrow{n} 0$. Entonces las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman un PSMC de límite común L. Como $a_n \le L \le b_n$, $L \in I_n, \forall\, n \Rightarrow\ L = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

2.2.3. Propiedades algebraicas de límites

Teorema 2 *Si* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ *y* $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$*, entonces:*

(1) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B$

(2) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = A - B$

(3) $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = AB$

(4) $\lim_{n\to+\infty}(a_n/b_n) = A/B$*, si* $B \neq 0$.

Demostración.

(1) $|A + B - (a_n + b_n)| \leq |A - a_n| + |B - b_n|$.
Fijado $\varepsilon > 0$ podemos obtener $n_0 : \forall\, n \geq n_0, |A - a_n| < \varepsilon/2, |B - b_n| < \varepsilon/2$ y entonces $|A + B - (a_n + b_n)| < \varepsilon$.

(2) Es análogo a (1).

(3) $|AB - a_n b_n| = |AB - Ab_n + Ab_n - a_n b_n| \leq |A||B - b_n| + |b_n||A - a_n|$.
Como b_n converge, es acotada, por lo que la última expresión puede acotarse por $K(|B - b_n| + |A - a_n|)$.
La prueba termina en forma similar a (1).

(4) Se deduce de (3) si se prueba que $\lim_{n\to+\infty} 1/b_n = 1/B$:

$$\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{b_n}\right| = \frac{|B - b_n|}{|B||b_n|}.$$

Puesto que $b_n \to B$, se puede obtener $n_0 : \forall\, n \geq n_0, |b_n| \geq |B|/2$. Luego:

$$\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{b_n}\right| \leq \frac{2}{|B|^2}|B - b_n|, \forall\, n \geq n_0,$$

de donde se sigue como en casos anteriores.

Ejercicio 88 *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y* $b_n \overset{n}{\to} 0$*, probar que* $a_n b_n \overset{n}{\to} 0$.

El teorema anterior cubre el caso de límite finito. Las siguientes tablas extienden lo anterior para incluir límites infinitos. En ellas se supone que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$, donde α y β pueden ser finitos, $+\infty$ o $-\infty$, y se da el límite de $a_n + b_n$, $a_n b_n$. Los casos $a_n - b_n$ y a_n/b_n son similares y se deducen de allí. Para el cociente, si

Cuadro 2.1: Límite de una suma de sucesiones, en función de α (columna) y β (fila).

$\alpha \vert \beta$	B	$+\infty$	$-\infty$
A	$A+B$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Cuadro 2.2: Límite del producto de sucesiones, en función de α (columna) y β (fila).

$\alpha \vert \beta$	0	$B \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	?	?
$A \neq 0$	0	AB	$[A]$	$-[A]$
$+\infty$	?	$[B]$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$-[B]$	$-\infty$	$+\infty$

$b_n \to \infty$ es fácil ver que $1/b_n \xrightarrow{n} 0$. Omitimos la demostración, que no ofrece nuevas dificultades.

El símbolo $[A]$ denota infinito, con el signo de A. Los casos indicados con "?" son llamados límites *indeterminados*; no existe aquí una regla general para el resultado, que puede dar, según el caso, alguna de las alternativas o incluso no existir límite.

Los ejemplos que siguen muestran, entre otros, algunos casos importantes en que se resuelve la indeterminación.

Ejemplo 89 *Volviendo al Ejemplo 84, se probó que $a_n \leq b_n$, y ambas tienen límite, siendo $\lim b_n = e$, $\lim a_n = A \leq e$. Sea p fijo.*
Si $n \geq p$, $a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \ldots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{p-1}{n})$. Si tomamos límites en ambos lados, deducimos que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \geq b_p$.
(los factores que multiplican a cada sumando tienden a 1.)
Si $A = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $b_p \leq A \Rightarrow \lim\limits_{p \to +\infty} b_p \leq A \Rightarrow e \leq A \Rightarrow A = e$. Ambas sucesiones tienen, por lo tanto, el mismo límite e.

Ejemplo 90 *Volvemos a la sucesión definida por recurrencia: $a_{n+1} = \frac{a_n + b/a_n}{2}$, $b > 0$, del Ejemplo 6, con $a_0 = 1$). Suponiendo que la sucesión tiene límite $L \neq 0$, se deduce del Teorema 2 que: $L = \frac{L + b/L}{2}$, y despejando se tiene que $L^2 = b$, o $L = \pm\sqrt{b}$. Como $a_1 > 0$, $b > 0$, se deduce por inducción que $a_n > 0, \forall\, n$, lo que descarta el límite $-\sqrt{b}$. También se puede descartar un posible límite 0.*
Lo anterior prueba que si existe límite, debe ser $L = \sqrt{b}$. Para verificar que la sucesión tiene límite, hace falta un método indirecto. Por ejemplo, estudiamos monotonía po-

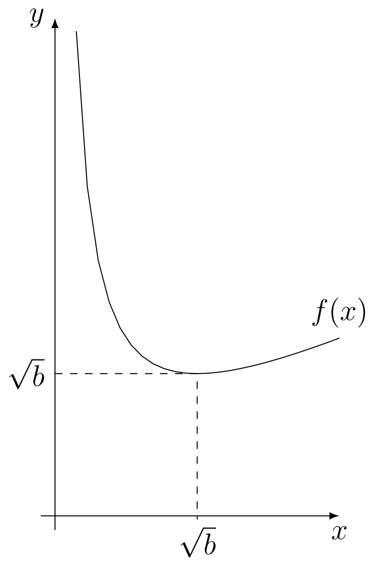


Figura 2.1: Figura del Ejemplo 90

niendo $a_{n+1} = f(a_n)$, donde $f(x) = \frac{x+b/x}{2}$, y estudiamos el crecimiento de f. La gráfica de f tiene la forma de la Figura 2.1, de donde deducimos que $a_n \geq \sqrt{b}, \forall\, b > 0$.

Como en $x \geq \sqrt{b}$ se cumple $f(x) \leq x$ (verificarlo), $(a_n) \searrow$ y $a_n \geq \sqrt{b}$, por lo que a_n converge, y $a_n \to \sqrt{b}$.
La recurrencia anterior es un método útil para el cálculo de una raíz cuadrada.

Ejemplo 91 *$a_n = \frac{a^n}{n}$, con $a > 1$ (es un límite indeterminado). Poniendo $a = 1 + h,\ h > 0$ y desarrollando el binomio, se tiene para $n \geq 2$:*

$$a_n = \frac{(1+h)^n}{n} \geq \frac{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}{n} \geq \frac{n-1}{2}h^2.$$

Como $\frac{n-1}{2}h^2 \to +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Análogamente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$, para $\alpha > 0$ cualquiera.

Ejemplo 92 *$a_n = \frac{a^{x_n}}{(x_n)^\alpha}$, donde $a > 1$, siendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que tiende a $+\infty$. Sea i_n la parte entera de x_n, es decir el entero tal que $i_n \leq x_n < i_n + 1$.*

$$a_n = \frac{a^{x_n}}{(x_n)^\alpha} \geq \frac{a^{i_n}}{(i_n+1)^\alpha} = \frac{1}{a}\frac{a^{i_n+1}}{(i_n+1)^\alpha} = b_n.$$

Dado $K \in \mathbb{R}$, $\exists\, i_0 : \forall\, i \geq i_0, \frac{a^i}{i^\alpha} > K a$ (porque $\frac{a^i}{i^\alpha} \xrightarrow{i} +\infty$)
Como $i_n \to +\infty$, $\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, i_n + 1 \geq i_0 \Rightarrow\ b_n > K$.
Por lo tanto $b_n \to +\infty$, y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Ejemplo 93 $a_n = \frac{(\log(n))^\alpha}{n^\beta}, \alpha > 0, \beta > 0$ *(*$\log$*: logaritmo en base* e*). Es otro caso indeterminado, pues* $\log(n) \xrightarrow{n} +\infty$*. Sea* $x_n = \log(n) \Rightarrow\ n = e^{x_n}$*:*

$$\frac{(\log(n))^\alpha}{n^\beta} = \frac{(x_n)^\alpha}{(e^{x_n})^\beta} = \frac{1}{\frac{(e^\beta)^{x_n}}{(x_n)^\alpha}} \xrightarrow{n} 0,$$

ya que por el Ejemplo 13, el denominador tiende a infinito.

Ejemplo 94 $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 1$
Calculamos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n} 0$

$$\Rightarrow\ \forall\, n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \forall\, n \geq n_0, a_n \leq \frac{a_{n_0}}{2^{n-n_0}} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow\ a_n \xrightarrow{n} 0.$$

Ejemplo 95 *Límites de potencias* $(a_n)^{b_n}$, $a_n > 0$*.*
Se resuelven en general poniendo $(a_n)^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)}$*, y resolviendo* $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n \log(a_n))$*.*
Se utiliza además que si:

$$a_n \xrightarrow{n} c \Rightarrow e^{a_n} \xrightarrow{n} e^c;$$

$$a_n \xrightarrow{n} +\infty \Rightarrow e^{a_n} \xrightarrow{n} +\infty;$$

$$a_n \xrightarrow{n} -\infty \Rightarrow e^{a_n} \xrightarrow{n} 0.$$

Por ejemplo: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(n)} \xrightarrow{n} 1$*, ya que* $\frac{\log(n)}{n} \xrightarrow{n} 0$*.*

Ejemplo 96 *Si* $a_n \xrightarrow{n} a$ *entonces* $\sqrt{a_n} \xrightarrow{n} \sqrt{a}$ *(con* $a_n \geq 0$*).*
Si $a = 0$*, se prueba directamente por definición de límite.*
Si $a > 0$, $\forall\, n \geq n_0, a_n > a/4$*, y como consecuencia:*

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\frac{3}{2}\sqrt{a}} \xrightarrow{n} 0.$$

Definición 97 *Dos sucesiones* a_n *y* b_n*, ambas con límite* ∞ *(o ambas con límite* 0*) se dicen equivalentes si y solo si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$*.*

Ejemplo 98 $n^4 + 3n + 1 \sim n^4$*. En efecto,* $\frac{n^4+3n+1}{n^4} = 1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4} \xrightarrow{n} 1$*.*
En general, un polinomio en n *(o en* a_n*, con* $a_n \xrightarrow{n} +\infty$*) es equivalente a su término de mayor grado. Un polinomio en* a_n*, con* $a_n \xrightarrow{n} 0$*, es equivalente al término de menor grado.*

Ejemplo 99 *Si* $a_n \xrightarrow{n} 0$*, mencionamos sin demostración los siguientes equivalentes:*

$$e^{a_n} - 1 \sim a_n; \; \log(1 + a_n) \sim a_n; \; \sin(a_n) \sim a_n; \; 1 - \cos(a_n) \sim \frac{a_n^2}{2}.$$

La sustitución por equivalentes es un método útil para el cálculo de límites. La única precaución es que no es válida la sustitución cuando se tiene la diferencia de 2 equivalentes.
No entramos en detalles sobre este punto, que puede verse en el siguiente capítulo, para el caso de funciones. Veamos en su lugar algunos ejemplos.

Ejemplo 100 $\lim\limits_{n\to+\infty} n[\log(n+1) - \log(n)] = 1$*, ya que*

$$\log(n+1) - \log(n) = \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 101 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin(\frac{1}{n}) = +\infty.$

Ejemplo 102

$$\lim_{n\to+\infty} n[n - \sqrt{n^2-1}] = \lim_{n\to+\infty} n\frac{[n^2-(n^2-1)]}{n+\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{2},$$

ya que $\sqrt{n^2-1} \sim n$*.*

Obsérvese que no es válido sustituir $\sqrt{n^2-1}$ por n en la expresión inicial (lo que llevaría incorrectamente a límite 0), por tratarse de diferencia de dos equivalentes.

2.2.4. Subsucesiones

Definición 103 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión, y* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números naturales que tiende a infinito. La sucesión* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *es una subsucesión de* (a_n)*.*

Observación 104 *Intuitivamente, una subsucesión equivale a elegir algunos (infinitos) términos de la sucesión original.*
En lenguaje formal, la sucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *es la función de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$ *que resulta de componer las sucesiones* (a_n) *y* (n_k)*.*

Ejemplo 105 *La sucesión del Ejemplo 68,* $a_n = (-1)^n$*, no tiene límite.*
Sin embargo, las subsucesiones $a_{2k} = 1$ *y* $a_{2k+1} = -1$ *son convergentes.*
En el Ejemplo 69, $a_n = 2^{n(-1)^n}$*,* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k} = +\infty$*;* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k+1} = 0$*.*

Teorema 3 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = L$ *para toda subsucesión* (a_{n_k})*.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, |L - a_n| < \varepsilon$.
Como $n_k \xrightarrow{k} +\infty$, $\exists\, k_0 : \forall\, k \geq k_0, n_k \geq n_0$.

$$\Rightarrow \forall\, k \geq k_0, |L - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

♠

Como conclusión del Teorema 3 y del Ejemplo 105, si la sucesión original tiene límite, sus subsucesiones lo "heredan". Pero algunas subsucesiones pueden converger aunque no lo haga la solución original.
Se comentó en la Sección 2.1 que las sucesiones acotadas pueden no converger. Sin embargo, resulta intuitivo que en un intervalo acotado no hay "espacio para que todos los elementos de la sucesión estén separados entre sí". Parecería que "algunos" (una subsucesión) deberían "acumularse" y converger.
Formalizamos las ideas anteriores a continuación.

Definición 106 *(Punto de acumulación)*
Sea $A \in \mathbb{R}$ un conjunto, y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que a es un punto de acumulación de A si y solo si:

$$\forall\, \varepsilon > 0, E'(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

(todo entorno reducido de a tiene puntos de A)

Ejemplo 107 $A = (a, b)$. *Todos los puntos de $[a, b]$ son de acumulación de A.*

Ejemplo 108 $A = \mathbb{Q}$ *(racionales). Todo real es punto de acumulación de $\mathbb{Q}$.*

Ejemplo 109 $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. *El único punto de acumulación de A es 0.*

Ejemplo 110 $A = \mathbb{N}$. *A no tiene punto de acumulación.*

Teorema 4 *(Bolzano-Weierstrass) Todo conjunto infinito y acotado tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Sea A un conjunto infinito, $A \subset [a, b]$. Sea $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$. Consideramos su punto medio $\frac{a+b}{2}$. Por ser A infinito, al menos uno de los semi-intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$ tiene infinitos puntos de A. Definimos $I_1 = [a_1, b_1]$ como ese intervalo. Repetimos este procedimiento por inducción, definiendo una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ que son encajados ($I_{n+1} \subset I_n$) y su longitud $(b-a)2^{-n}$ tiende a 0. Además, cada I_n tiene infinitos puntos de A. La Figura 2.2 ilustra el procedimiento de bipartición. Por el Ejemplo 87 tenemos que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{L\}$. Veremos que L es un punto de acumulación de A.
Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $n : (b - a)2^{-n} < \varepsilon$. Como $L \in I_n$, $I_n \subset E(L, \varepsilon)$. Finalmente, puesto que I_n tiene infinitos puntos de A, hay (infinitos) puntos de A en $E'(L, \varepsilon)$.

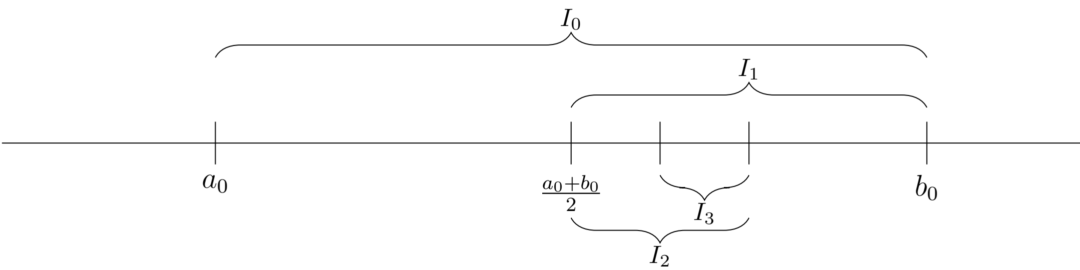
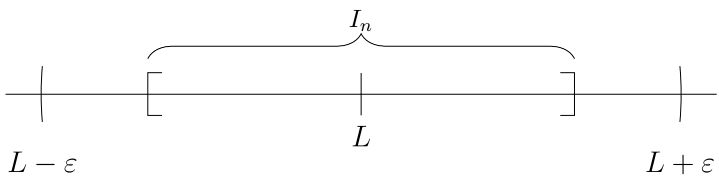


Figura 2.2: Procedimiento de bipartición



♠

Volvemos a las sucesiones, y deducimos un corolario del teorema, que será de utilidad en desarrollos posteriores.

Teorema 5 *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ el recorrido de la sucesión. A es acotado. Si A es finito, debe existir un punto de A por donde la sucesión "pasa" infinitas veces. En otras palabras, existe $x \in A$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n = x\}$ es infinito. Ordenando en forma creciente los naturales de ese conjunto se obtiene una subsucesión constante (de valor x), que converge a x.
En caso contrario A es infinito, y por el Teorema 4 obtenemos un punto de acumulación L. Como en cada $E(L, \varepsilon)$ hay infinitos puntos de A, es posible elegir $a_{n_k} \in E'\left(L, \frac{1}{k}\right)$, con $n_{k+1} > n_k$. De esta forma, hemos construido una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a L.

♠

2.2.5. Sucesiones de Cauchy y convergencia

Si se quiere probar la convergencia de una sucesión por medio de la definición de límite, hace falta conocer a priori el valor del límite.
El criterio de Cauchy, que desarrollamos a continuación, permite dar una condición de convergencia en términos de la sucesión exclusivamente.

Definición 111 *Una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy si y solo si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 : \forall\, n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Teorema 6 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente* $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $n_0 : \forall\, n \geq n_0, |a_n - L| < \varepsilon/2$.
Si $n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon/2$. Si $m \geq n_0$ también tenemos que $|a_m - L| < \varepsilon/2$.
Entonces $|a_n - a_m| = |a_n - L + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

♠

Ejemplo 112 *La sucesión* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *es de Cauchy.*

Para una sucesión real, vale el recíproco del Teorema 6.

Teorema 7 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy* $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Demostración.

1) Veamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. En efecto, tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$, tenemos que

$$\exists\, n_0 : \forall\, n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < 1.$$

$$\Rightarrow\ \forall\, n \geq n_0, |a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(a_{n_0}, 1).$$

Como el conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ es finito, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

2) Por el Teorema 5, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente: $\exists\, (a_{n_k}) : a_{n_k} \xrightarrow{k} L$.

3) Veamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.
Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $n_0 : \forall\, m, n \geq n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon/2$ y $n_{k_0} : \forall n_k \geq n_{k_0} : |a_{n_k} - L| < \varepsilon/2$. Sea $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$.

$$\Rightarrow |a_n - L| = |(a_n - a_{n_{k_0}} + (a_{n_{k_0}} - L)| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - L| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_1$.

♠

Notas 1 *Para sucesiones reales, los conceptos de convergencia y sucesión de Cauchy son equivalentes; el criterio de Cauchy puede servir para probar convergencia de una sucesión sin conocer el límite. Sin embargo, corresponde señalar que las sucesiones pueden definirse en otros contextos donde no siempre es válida esta equivalencia.*
Por ejemplo, si consideramos sucesiones en $\mathbb{Q}$ (racionales), los conceptos de límite, etc, pueden definirse sin problemas. La sucesión $a_n = \frac{n-1}{n}$ es, por ejemplo, convergente y de Cauchy. Sin embargo, la sucesión $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, que es de Cauchy, como se dijo, no es convergente en $\mathbb{Q}$, ya que $e \notin \mathbb{Q}$. El conjunto de los racionales es "incompleto", ya que le faltan límites de algunas sucesiones de Cauchy.
El conjunto de los reales es, en este sentido, completo. *Todas las sucesiones de Cauchy convergen.*

2.2.6. Sucesiones complejas

Definición 113 *Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$.*

Las sucesiones $z_n = (i)^n$; $z_n = \frac{1+i}{n}$; $z_n = 1 + 2ni$ son ejemplos de sucesiones complejas. La definición de límite es idéntica al caso real, donde ahora $|.|$ denota el módulo complejo.

Definición 114 *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{C}$.*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0, |z_n - z| < \varepsilon.$$

Tanto para estudiar la existencia de límites como para calcularlos, es útil el siguiente resultado, que reduce el problema a sucesiones reales.

Proposición 115 *Si $z_n = a_n + ib_n$ son los términos de una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ y $z = a + ib$, entonces:*

$$z_n \stackrel{n}{\to} z \Leftrightarrow a_n \stackrel{n}{\to} a,\ b_n \stackrel{n}{\to} b.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) $|a_n - a| \leq |z_n - z|$, por lo que $a_n \stackrel{n}{\to} a$ por la definición de límite.
El caso de b_n es análogo.

($\Leftarrow$) Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, por las propiedades ya vistas de límites deducimos que $|z_n - z| \stackrel{n}{\to} 0$. Por la Definición 114, esto equivale a que $z_n \stackrel{n}{\to} z$.

♠

Ejemplo 116 $z_n = 1 + (-1)^n i$ *no converge pues no lo hace la parte imaginaria.*

Pueden extenderse en forma idéntica los conceptos de subsucesiones, sucesiones de Cauchy, y los teoremas correspondientes. No nos extendemos en ellos porque los resultados son un caso particular de sucesiones en $\mathbb{R}^n$, que se verán en cursos posteriores.

Ejercicio 117 *Hallar cuatro subsucesiones convergentes de $z_n = (i)^n$.*

2.3. Series

En numerosos problemas aparece con naturalidad la suma de infinitos números reales, $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$. Para dar una definición razonable de esta suma, un procedimiento natural es "cortar" la suma anterior en un número finito de términos $a_0 + \ldots + a_n$ y ver si estas sumas finitas se aproximan a algún valor (si tienen límite) al crecer n.

Definición 118 *Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión real o compleja, se llama serie de término general a_n (notación $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$) a la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $s_n = a_0 + \ldots + a_n$. A cada s_n le llamamos reducida n-ésima de la serie.*
La serie se dice convergente, divergente u oscilante según lo sea la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En el caso de convergencia, $S = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ se llama suma de la serie, y se escribe $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Ejemplo 119 *$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, donde $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}$ (serie geométrica)*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Es fácil verificar que $\frac{q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n} 0$, ya que $|q| < 1$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge y suma $\frac{1}{1-q}$

2.3.1. Series telescópicas

Supongamos que tenemos una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n = b_{n+1} - b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$s_n = b_1 - b_0 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_0$$

y deducimos que $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ (b_n) converge, y en ese caso la suma vale $L - b_0$, siendo $L = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

Ejemplo 120 *a)* *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *De modo que* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. *En este caso* $b_n = -\frac{1}{n}$.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

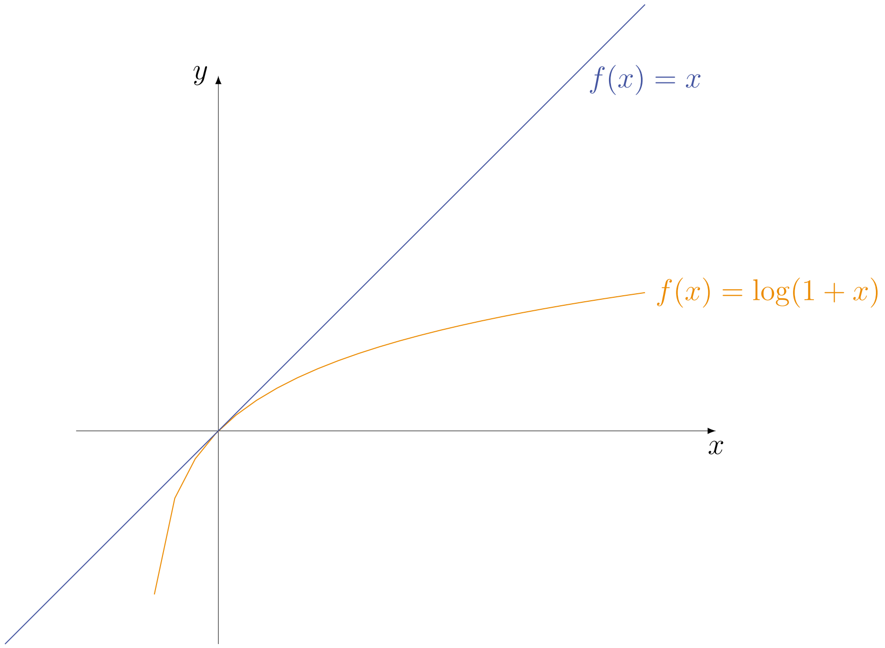
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$. *Escribimos*

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n)$$

De donde $s_n = \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1) \xrightarrow[n]{} +\infty$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \textit{ diverge a } +\infty$$

Ejemplo 121 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *(Llamada serie armónica).*
Veremos que esta serie diverge a $+\infty$. *Para eso, si graficamos* $f(x) = \log(1+x)$ *vemos que se cumple que* $\log(1+x) \leq x$. *por lo tanto*



$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{i}\right) = \log(n+1)$$

Ejemplo 122 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$. *La sucesión* s_n *es* $(1,0,1,0,1,0,\dots)$ *que oscila.* $\Rightarrow$ *la serie oscila.*

Proposición 123 *(Condición necesaria de convergencia)*

$$\sum a_n \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Demostración. $a_n = s_n - s_{n-1},\ \forall\, n \geq 1$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = S - S = 0$$

♠

Ejemplo 124 $\sum e^{\frac{1}{n}}$ *no converge ya que* $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

Es importante señalar que la condición *no es suficiente* ($\lim a_n = 0$ *no alcanza* para asegurar que $\sum a_n$ converge). Un ejemplo de este hecho es la serie armónica (Ejemplo 121) que diverge, pero su término general $\frac{1}{n}$ tiene límite 0.

Propiedad 125 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ *son de la misma clase (convergente, divergente u oscilante).*

Propiedad 126 $\left.\begin{array}{l} \alpha,\ \beta \text{ números} \\ \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ convergen} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *converge*

Propiedad 127 *(Condición de Cauchy)*

$$\sum a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \text{ dado } \varepsilon > 0, \exists\, n_0 :\ \forall\, m \geq n_0,\ p \geq 1, \left|\sum_{n=m+1}^{n=m+p} a_n\right| < \varepsilon$$

Propiedad 128 $\sum z_n$ *serie compleja,* $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$

$$\sum z_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum x_n \text{ y } \sum y_n \text{ convergen.}$$

Propiedad 129 *(Propiedad asociativa).*
Si en la serie convergente $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$ *se asocian términos consecutivos de la forma* $(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}) + (a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1}) + (\cdots + a_{n_2}) + \ldots$

$\Rightarrow$ *la nueva serie converge a la misma suma.*

Para esto basta observar que si s_n son las reducidas de la serie original, las reducidas de la nueva serie son $s_{n_0}, s_{n_1}, \ldots$, una subsucesión de (s_n), y por tanto converge al mismo límite.

El mismo argumento sirve para demostrar que si la original diverge a $+\infty$ (o $-\infty$), también lo hace la nueva serie.

En virtud de la Propiedad 128, nos restringiremos de aquí en adelante, salvo indicación expresa en contrario, a series reales.

2.3.2. Series de términos no negativos

Se considera la serie $\sum a_n$, donde $a_n \geq 0$, $\forall\, n$.
Una consecuencia inmediata es que en este caso la sucesión $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ es monótona creciente, y por tanto, converge o diverge a $+\infty$ según esté o no acotada superiormente (Teorema 1) (no hay otra posibilidad).

Proposición 130 *Si* $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \geq p$, *entonces:*

1. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *converge* $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge*

2. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *diverge* $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *diverge*

Demostración. Sean $A_n = a_0 + \cdots + a_n$, $B_n = b_0 + \cdots + b_n$.
Entonces $A_n - A_p \leq B_n - B_p$, $\forall\, n > p$.

1. Si B_n converge $\Rightarrow$ B_n acotada superiormente $\Rightarrow$ A_n acotada superiormente $\Rightarrow$ A_n converge

2. Si $A_n \to +\infty \;\Rightarrow\; B_n \to +\infty$

Ejemplo 131 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n}$ *diverge a* $+\infty$ *ya que* $\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 3$

Teorema 8 $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0$

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0 \;\Rightarrow\; \sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son de la misma clase*

2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,\ \sum b_n$ *converge* $\Rightarrow \sum a_n$ *converge*

Demostración.

1. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ \exists\, n_0 / \ \forall\, n \geq n_0,\ \frac{k}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3k}{2} \underset{(b_n \geq 0)}{\Rightarrow} b_n \frac{k}{2} \underset{(i)}{\leq} a_n \underset{(ii)}{\leq} \frac{3k}{2} b_n$
   Si $\sum b_n$ converge, la desigualdad *(ii)* y el criterio de comparación implican que $\sum a_n$ converge.
   Si $\sum b_n$ diverge, la desigualdad *(i)* y el criterio de comparación implican que $\sum a_n$ diverge.
   Como no hay otra posibilidad, son de la misma clase.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \forall k > 0 \exists n_0 : \forall\, n \geq n_0,\ \frac{a_n}{b_n} \leq k$. El resto sigue como en 1.

♠

Como consecuencia del teorema, a los efectos de determinar la convergencia o no de una serie, se puede sustituir el término general a_n por un equivalente. Por este motivo, en general es más sencillo decidir si converge o no ("clasificar" la serie) que hallar su suma en caso de convergencia.

Ejemplo 132 $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge, ya que* $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$

Ejemplo 133 $\sum \sin(\frac{1}{n})$ *diverge*

Ejemplo 134 $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$ *diverge*

Ejemplo 135 *Estudiamos* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$*, donde* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ya sabemos que $\sum \frac{1}{n}$ *diverge,* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

- *Si* $\alpha \geq 2,\ \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ *y por lo tanto* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge por comparación*
- *Si* $\alpha \leq 1,\ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ *y por lo tanto* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge por comparación*

Nos falta clasificar para $\alpha \in (1,2)$*. Como para* $\alpha \in (1,2)$ *se cumple que* $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n}$*, no es posible realizar una comparación. El siguiente criterio permitirá hacer la clasificación.*

Teorema 9 (Criterio del 2^k)
$a_n \geq 0$, $a_n \searrow$ *(monótona decreciente). Entonces:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ es de la misma clase que } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

Demostración. $\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n = a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$ tiene 2^k sumandos, y como $(a_n) \searrow$, cada sumando es $\begin{cases} \leq a_{2^k} \\ \geq a_{2^{(k+1)}} \end{cases}$
Deducimos que

$$2^k a_{2^{(k+1)}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{(k+1)}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k}$$

Observemos que $2^k a_{2^{(k+1)}} = \frac{1}{2} 2^{k+1} a_{2^{(k+1)}}$. Sumando en $k = 0, \ldots, k_0$ tenemos:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_0+1} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{2^{(k_0+1)}-1} a_n \leq \sum_{k=0}^{k_0} 2^k a_{2^k}$$

Si llamamos: $\begin{cases} s_n \text{ a la reducida } n\text{-ésima de } \sum 2^k a_{2^k} \\ A_n \text{ a la reducida } n\text{-ésima de } \sum a_n \end{cases}$
hemos probado:

$$\frac{1}{2}(s_{k_0+1} - s_0) \leq A_{2^{(k_0+1)}-1} - a_0 \leq s_{k_0}$$

Estudiando el límite con $k_0 \to +\infty$, se prueba el teorema.

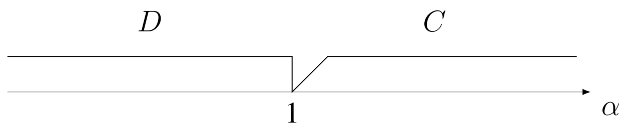
♠

Ejemplo 39. (cont.)
Nos faltaba clasificar $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *para* $\alpha \in (1,2)$. *Como* $\frac{1}{n^\alpha}$ *es una sucesión monótona decreciente, aplicamos el Teorema 9*

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

Si $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, para $\alpha > 1$ se cumple que $q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge.

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge para } \alpha > 1, \text{ y diverge para } \alpha \leq 1$$



2.3.3. Criterio de la raíz y del cociente

Teorema 10 $a_n \geq 0$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a_n} \leq k < 1 & \textit{para } n \geq n_0 \quad \Rightarrow \sum a_n \textit{ converge} \\ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 & \textit{para } n \geq n_0 \quad \Rightarrow \sum a_n \textit{ diverge} \end{cases}$$

Demostración. $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$, para $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq k^n,\ k < 1$.
Por comparación con la serie geométrica, $\sum a_n$ converge. Si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge, ya que a_n no tiene límite 0.

♠

Corolario 136 $a_n \geq 0,\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$

$$\begin{cases} \textit{Si } R < 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ converge} \\ \textit{Si } R > 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ diverge} \end{cases}$$

Ejemplo 137 $a_n = \frac{n^3}{2^n},\ \sqrt[n]{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \Rightarrow \sum a_n$ *converge*

Ejemplo 138 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{n}, & \sqrt[n]{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ b_n = \frac{1}{n^2}, & \sqrt[n]{b_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$ *En estos casos el criterio no permite decidir*

Teorema 11 $a_n > 0$

Si para $n \geq n_0$ $\begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ converge} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ diverge} \end{cases}$

Demostración. $a_{n+1} \leq k a_n, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq k^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} k^n$

- Si $k < 1$, $\sum k^n$ converge $\underset{comparacion}{\Longrightarrow} \sum a_n$ converge
- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n,\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > 0,\ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge (a_n no tiende a 0)

♠

Corolario 139 $a_n > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$$\begin{cases} \textit{Si } L < 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ converge} \\ \textit{Si } L > 1 & \Rightarrow \sum a_n \textit{ diverge} \end{cases}$$

Ejemplo 140 $a_n = \frac{n!}{n^n},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *converge.*

Ejemplo 141 $a_n = \frac{1000^n}{n!},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1000}{n+1} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \sum a_n$ *converge*

Ejemplo 142 $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n^2},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1.$ *El criterio no decide.*

Observación 143 *Los criterios anteriores deciden (como se ve en la prueba) en el caso en que la serie puede compararse con una geométrica, o casos en que no tiende a cero. Se trata de series que convergen o divergen "fuertemente". Para estudiar series que no tienen un comportamiento tan claro, es conveniente usar otros criterios, como el de* 2^k
Existen otros criterios comparables a este último (por ejemplo, criterios de Raabe). No entraremos en ellos.

Ejemplo 144 $\sum \frac{1}{n(\log(n))^\beta}$. *Verificar que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(\log(n))^\beta}} = 1$
Por el criterio de 2^k*:*

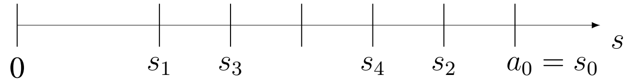
$$2^k a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k \log(2^k)^\beta} = \frac{1}{(k\log(2))^\beta} = \frac{1}{k^\beta(\log(2))^\beta} \begin{cases} C & \textit{para } \beta > 1 \\ D & \textit{para } \beta \leq 1 \end{cases}$$

2.3.4. Series alternadas

Sea $a_n \geq 0$, estudiamos la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Teorema 12 *(Criterio de Leibnitz) Si* a_n *es monótona decreciente y* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*, entonces* $\sum(-1)^n a_n$ *converge, y si* S *es la suma,* $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Demostración. $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$. Si observamos la sucesión (s_n), vemos que al agregar un término par crece; al agregar un impar decrece. Sin embargo, esta oscilación gradualmente decrece, por lo que (s_n) tiene aparentemente límite. Formalizando:



1. La sucesión (s_{2k}) de términos pares, es decreciente:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+2} - a_{2k+1}) \leq s_{2k}$$

2. La sucesión (s_{2k+1}) de términos impares, es creciente:

$$s_{2k+3} = s_{2k+1} + (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \geq s_{2k+1}$$

3. $s_{2k+1} \leq s_{2k}$, ya que $s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} \geq 0$.

4. Dado $\varepsilon > 0, \exists\, k_0 : s_{2k_0} - s_{2k_0+1} < \varepsilon$, porque $s_n \xrightarrow{n} 0$.

Por lo tanto, las sucesiones (s_{2k}) y (s_{2k+1}) forman un par de sucesiones monótonas convergentes (PSMC) de límite común S. Es fácil deducir de aquí que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$.
Además, como $s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k} \Rightarrow 0 \leq s_{2k} - S \leq a_{2k+1}$
Análogamente $s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k+2} \Rightarrow 0 \leq S - s_{2k+1} \leq a_{2k+2}$.
Entonces, en general es cierto que $|S - s_n| \leq a_{n+1}$.

♠

Ejemplo 145 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge, ya que* $(\frac{1}{n}) \searrow 0$.

Ejemplo 146 *Idem para* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *con* $\alpha > 0$.

Ejemplo 147 $\sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$. *Sea* $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$
Una primera tentación es sustituir a_n *por su equivalente* $\frac{1}{n}$, *pero debe tenerse en cuenta que la serie no es de términos no negativos, condición en la que se dedujo esa propiedad. Por otra parte, el criterio de Leibnitz no puede usarse ya que* (a_n), *aunque tiende a cero, no es monónota:*

$$a_2 = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{1}{2}; a_4 = \frac{1}{5}.$$

Para clasificar, tomamos la diferencia de $(-1)^n a_n$ *con su equivalente* $\frac{(-1)^n}{n}$*:*

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{n(-1)^n - (-1)^n(n+(-1)^n)}{n(n+(-1)^n)} = \frac{-1}{n(n+(-1)^n)}$$

$$\Rightarrow (-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n+(-1)^n)} = b_n - c_n$$

Hemos escrito el término general $(-1)^n a_n$ *como diferencia de dos sucesiones. Sabemos por el Ejemplo 145 que* $\sum b_n$ *converge, y* $\sum c_n$ *es una serie de términos no negativos, que puede clasificarse por su equivalente* $\sum \frac{1}{n^2}$, *que converge. Entonces* $\sum a_n$ *converge.*

Ejercicio 148 *Clasificar* $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2.3.5. Series de términos cualesquiera

Se considera $\sum a_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ de cualquier signo.

Definición 149 $\sum a_n$ *es una serie absolutamente convergente (A.C.) si y solo si la serie* $\sum |a_n|$ *converge.*

Teorema 13 *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea $\sum a_n$ absolutamente convergente. Definimos las sucesiones siguientes a partir de (a_n):

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \textit{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \textit{si } a_n < 0. \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} 0 & \textit{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \textit{si } a_n < 0. \end{cases}$$

Luego (a_n^+) y (a_n^-) son sucesiones no negativas, y se cumple:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^+ - a_n^- \\ |a_n| &= a_n^+ + a_n^- \end{aligned}$$

Luego $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, y $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, de donde las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen por comparación. Entonces, la serie $\sum(a_n^+ - a_n^-)$ converge.

♠

Ejemplo 150 $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ *converge absolutamente, ya que* $\frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Ejemplo 151 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge, pero no es A.C. (pues* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge).*

Observación 152 *El Ejemplo 151 muestra que el recíproco del Teorema 13 no se cumple: una serie puede converger pero no ser A.C.. Observando la prueba del teorema, vemos que esto ocurre cuando* $\sum a_n^+$ *y* $\sum a_n^-$ *divergen y* $\sum(a_n^+ - a_n^-)$ *converge. Una serie con esta propiedad (converge pero no es A.C.) se llama* condicionalmente convergente.

El caso complejo

La Definición 149 se aplica también a series de términos complejos, donde se interpreta $|a_n|$ como el módulo complejo. El Teorema 13 se mantiene válido: para eso basta observar que si $z_n = a_n + ib_n$ es un complejo, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ se cumple $|a_n| \leq |z_n|$ y $|b_n| \leq |z_n|$.
Si $\sum |z_n|$ converge, $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen por comparación y luego (Teorema 13) $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen y también entonces $\sum z_n$.

Ejemplo 153 *Si $|z| < 1, z \in \mathbb{C}$, entonces $\sum n^\alpha z^n$ converge absolutamente. Para probarlo, clasificamos la serie $\sum n^\alpha |z|^n$ (de términos no negativos) por el criterio de la raíz:*

$$\sqrt[n]{n^\alpha |z^n|} = (\sqrt[n]{n})^\alpha |z| \xrightarrow{n} |z| < 1,$$

por lo que $\sum n^\alpha |z|^n$ converge.

Ejemplo 154 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n n^2 i}$ *es A.C., ya que* $\sum |\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n n^2 i}| = \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^4}}$ *converge* $[\frac{1}{\sqrt{n+n^4}} \sim \frac{1}{n^2}]$.

Ejemplo 155 $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$*:*
Para $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$ y la serie converge por Leibnitz.
Para $\alpha \leq 0$, la serie no converge $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right.$ no tiende a 0$\left.\right)$.
Para $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, y la de estudio es entonces A.C. En la Figura 2.3 se muestra la clasificación según $\alpha \in \mathbb{R}$.

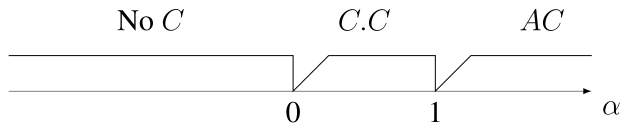


Figura 2.3: Intervalos de convergencia, de absoluta convergencia, y de no convergencia

Los Ejemplos 153 y 154 muestran la ventaja del estudio de convergencia absoluta: se pueden emplear para $\sum |a_n|$ todos los métodos de términos no negativos. Sin embargo, si $\sum |a_n|$ diverge no puede decidirse por este medio el comportamiento de $\sum a_n$.

2.3.6. Reordenación de series

Una propiedad habitual de la suma de un número finito de números es la conmutativa: el orden de estos no altera la suma. Es decir, si $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y φ :

$\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una permutación cualquiera de los números $\{1, \ldots, n\}$, entonces $A = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \ldots + a_{\varphi(n)}$.
Intentamos ver si esta propiedad es válida para una suma de infinitos números (una serie). Para eso en primer lugar extenderemos el concepto de reordenación.

Definición 156 *Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva, y $b_n = a_{\varphi(n)}$. La serie $\sum b_n$ es una reordenada de $\sum a_n$.*

La pregunta es entonces, la siguiente: si $\sum a_n$ converge, suma S, ¿es cierto lo mismo para $\sum b_n$? Como veremos, no siempre es así, sino solo en el caso de *convergencia absoluta*. Trabajemos con $a_n \in \mathbb{R}$.

Teorema 14 *Si $a_n \geq 0 \, \forall \, n$, $\sum a_n$ converge con suma S y $\sum b_n$ es reordenada de la serie anterior, entonces $\sum b_n$ converge, a la misma suma S.*

Demostración. Sean $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ y $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$. $A_n \nearrow S$ por ser $a_n \geq 0$. Como los $\{b_i\}_{i=1,\ldots,n}$ son un número finito de los a_n, existe $m = m(n)$ tal que $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \subset \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, por lo que $B_n \leq A_m \leq S$.
Entonces $\sum b_n$ (de términos no negativos) converge a cierto valor $S' \leq S$ (por tener reducidas acotadas). Pero $\sum a_n$ es a su vez una reordenada de $\sum b_n$, de donde por el mismo argumento $S \leq S'$. Se concluye entonces que $S' = S$.

♠

Corolario 157 *Si $\sum a_n$ A.C. con suma S y $\sum b_n$ es reordenada de $\sum a_n$, entonces $\sum b_n$ A.C. con suma S.*

Demostración. Como $\sum |a_n|$ converge, su reordenada $\sum |b_n|$ converge por el Teorema 14. Volviendo a la notación del Teorema 12, $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen. Sea $S^+ = \sum a_n^+$ y $S^- = \sum a_n^-$. Se tiene que $S = S^+ - S^-$. Pero $\sum b_n^+$ es una reordenada de $\sum a_n^+ \xrightarrow{Teorema\ \mathbf{14}}$ suma S^+. Análogamente, $\sum b_n^-$ suma S^-, por lo que $\sum b_n$ suma S.

♠

Ejemplo 158 *La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, como ya se vio. Sea S la suma. Tenemos $S = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ldots$. Multiplicando por $\frac{1}{2}$ se tiene que $\frac{S}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\ldots$.
Es fácil deducir que $\frac{S}{2} = 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{8}\ldots$.
Sumando la última serie a la original: $\frac{3}{2}S = -1 + 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7}$.. de donde $\frac{3}{2}S = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9}\ldots$
La última serie es una reordenada de la original, como puede probarse con algo de trabajo. Su suma, sin embargo, es $\frac{3}{2}S \neq S$ ($S \neq 0$ ya que $|S - a_n| \leq a_{n+1}$; en este caso $|S - (-1)| \leq a_{n+1}$). El anterior es un ejemplo de serie convergente con una reordenada que no suma lo mismo. No hay contradicción con el Teorema 14. El hecho sorprendente, como muestra el siguiente teorema, es que en el caso de convergencia condicional, se puede ordenar para obtener* cualquier *suma.*

Teorema 15 (Riemann) *Si C es un real arbitrario y $\sum a_n$ converge condicionalmente, entonces existe una reordenada de $\sum a_n$ que suma C.*

Demostración. Sea $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la sucesión de términos no negativos de (a_n), en el orden que aparecen, y $(-q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la de los negativos. Como la serie $\sum a_n$ converge condicionalmente, tenemos que $\sum p_m$ y $\sum q_k$ divergen a $+\infty$[1].
Además, como $a_n \xrightarrow{n} 0$, $p_m \xrightarrow{m} 0$ y $q_k \xrightarrow{k} 0$. Reordenamos la serie $\sum a_n$ de la siguiente forma: ponemos en primer lugar tantos términos positivos como hagan falta para superar por primera vez a C. Es decir: $p_1 + \ldots + p_{m_1} > C$ y $p_1 + \ldots + p_{m_1-1} \leq C$. Esto es posible porque $\sum p_m$ diverge a $+\infty$.
Agregamos después términos negativos hasta pasar nuevamente por debajo de C (posible pues $\sum -q_k$ diverge a $-\infty$):

$$(p_1 + \ldots + p_{m_1}) - (q_1 + \ldots + q_{k_1}) < C,$$
$$(p_1 + \ldots + p_{m_1}) - (q_1 + \ldots + q_{k_1-1}) \geq C.$$

Luego agregamos nuevamente positivos:

$$(p_1 + \ldots + p_{m_1}) - (q_1 + \ldots + q_{k_1}) + (p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2}) > C,$$

$$(p_1 + \ldots + p_{m_1}) - (q_1 + \ldots + q_{k_1}) + (p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2-1}) \leq C,$$

y se repite el procedimiento. Veremos que la reordenada de $\sum a_n$ así obtenida converge a C. Sea (s_n) su reducida. La construcción anterior implica que (a_n) crece entre $s_{m_j+k_j}$ y $s_{m_{(j+1)}+k_j}$, y decrece entre $s_{m_{(j+1)}+k_j}$ y $s_{m_{(j+1)}+k_{(j+1)}}$. Basta probar entonces que $s_{m_j+k_j} \xrightarrow{j} C$ y $s_{m_{(j+1)}+k_j} \xrightarrow{j} C$.
Pero $|s_{m_{(j+1)}+k_j} - C| < p_{m_{j+1}} \xrightarrow{j} 0$, y $|s_{m_j+k_j} - C| < q_{k_j} \xrightarrow{j} 0$, por lo que $s_m \xrightarrow{m} C$.

♠

Observación 159 *Modificando ligeramente el procedimiento anterior se construyen ordenadas que divergen a $+\infty$ y $-\infty$.*

2.3.7. Producto de Cauchy de series

Si pensamos extender la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, el producto $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$ daría origen a los siguientes sumandos, correspondientes a los productos término a término. La siguiente matriz contiene todos los productos posibles de términos generales a_n y b_n:

[1] Se probó, en rigor, que $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen. Las series $\sum p_m$ y $\sum q_k$ se obtienen de ellas eliminando ceros, así que también divergen

$$\begin{array}{cccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \dots & a_0b_n & \dots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n & \dots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n & \dots \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_nb_0 & & \dots & & a_nb_n & \dots \\
\vdots & & & & & \vdots
\end{array}$$

Para obtener una serie con estos términos, el método de cauchy consiste en agrupar y sumar los elementos de las diagonales indicadas, definiendo $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. Suponiendo que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen a A y B respectivamente, la pregunta que se plantea es si $\sum c_n$ converge a AB. Una vez más, pueden darse ejemplos en que lo anterior no se cumple, y solo tendremos esa propiedad en el caso de convergencia absoluta.

Teorema 16 *Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son A.C. sumando A y B respectivamente, y $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_jb_{n-j}$ es el producto de Cauchy, entonces $\sum c_n$ es A.C. con suma AB.*

Demostración. Elegimos un orden para recorrer la tabla de productos, generando una nueva sucesión $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de la siguiente manera: $d_1 = a_0b_0$, $d_2 = a_0b_1$, $d_3 = a_1b_1$, $d_4 = a_1b_0$, $d_5 = a_2b_0$, de modo que:

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} d_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j. \tag{2.1}$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} |d_k| = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \sum_{j=0}^{n} |b_j|. \tag{2.2}$$

Como $\sum |a_n|$ y $\sum |b_n|$ convergen, el segundo miembro de (2.2) está acotado. Deducimos que $\sum |d_k|$ converge. Volviendo a (2.1) y tomando límite en n, $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = AB$. Para obtener la serie $\sum c_n$ a partir de $\sum d_k$, hace falta reordenar los términos a_ib_j, y luego asociar los que cumplen $i + j = n$. El primer paso puede hacerse por el Corolario 157, pues $\sum d_k$ es A.C.. El segundo por la propiedad asociativa (es fácil ver en este caso que no se pierde la convergencia absoluta).

♠

Capítulo 3

Repaso de Funciones de una Variable

3.1. Introducción

En forma similar al Capítulo 2, tratamos aquí temas que (a excepción de la Sección 3.3) corresponden a los cursos de Secundaria. Los conceptos de límites, continuidad y derivadas se tratan en forma rápida, con énfasis en los conceptos principales y no en los aspectos de cálculo. Por una versión más completa consultar la bibliografía. Nos detendremos más en la continuidad uniforme (Sección 3.3) y en el desarrollo de Taylor. En lo que sigue, suponemos conocido el concepto de función, dominio, codominio o recorrido, función compuesta. Por un repaso de estos conceptos nos referimos a las notas de Geometría y Álgebra Lineal. Trabajamos en este capítulo con funciones de una variable y variables en $\mathbb{R}$ ($f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$).

3.2. Límites y continuidad

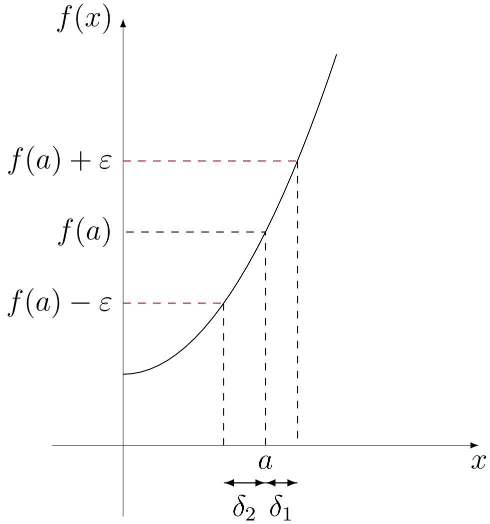
Intuitivamente, el límite de $f(x)$ con $x \to a$ es el valor al cual se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a. Para que esto pueda tener sentido, x debe poder acercarse a a en puntos del dominio de f. Formalizamos la definición.

Definición 160 *$f : D \to \mathbb{R}$, a punto de acumulación de D, $L \in \mathbb{R}$.*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 \neq |x-a| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists\, E'(a,\delta) : f(E'(a,\delta) \cap D) \subset E(L,\varepsilon).$$

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K, \exists\, \delta > 0 : 0 \neq |x-a| < \delta, x \in D \Rightarrow f(x) > K.$



$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

Nota 161

i) *Si $a \in D$, el valor de la función en a no interviene en la definición de límite (interesa lo que ocurre “al acercarse” a a).*

ii) *En forma similar se definen $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, etc. Por ejemplo, si $f : [b,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M > b : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$*

El siguiente teorema permite relacionar lo anterior con límites de sucesiones (hay versiones análogas para los otros límites).

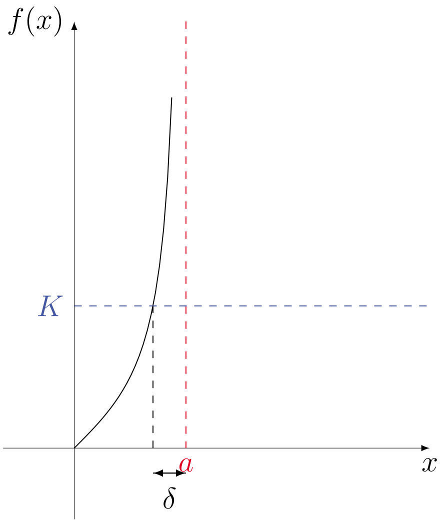
Teorema 17

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D - \{a\} \forall n, \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = L.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una tal sucesión, y $\varepsilon > 0$. Por la Definición 160 podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $x \in D, 0 \neq |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
Como $x_n \overset{n}{\to} a$, elegimos $n_0 : \forall n \geq n_0, |f(x) - L| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Supongamos por absurdo que $f(x)$ no tiene límite L.
Entonces existe $E(L,\varepsilon) : \forall\delta > 0, \exists x_\delta \in E'(a,\delta) \cap D, f(x_\delta) \notin E(L,\varepsilon)$. Tomamos $\delta = 1/n$, y sea x_n el x_δ correspondiente. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $D - \{a\}$, $x_n \overset{n}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \to L$. Pero $f(x_n) \notin E(L,\varepsilon)$, lo que es absurdo.



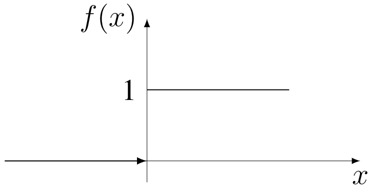
♠

Ejemplo 162

1) $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$. *En efecto, si* $x_n \xrightarrow{n} 0$, $-1/x_n^2 \xrightarrow{n} -\infty$ *y* $e^{-1/x_n^2} \xrightarrow{n} 0$.
Como consecuencia del teorema 17 (y sus extensiones para límites infinitos o con $x \to \infty$*), se deduce que los límites de funciones tienen las mismas propiedades algebraicas que las que se presentaron en 2.2.3 para el caso de sucesiones. No nos extenderemos entonces en el cálculo de límites.*
Mencionamos que el concepto de equivalentes es análogo (si $f(x)$ *y* $g(x)$ *tienen ambos límite* 0 *o* ∞*, se dicen equivalentes cuando* $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$*) y tiene las mismas propiedades.*

3.2.1. Límites laterales

La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ no tiene claramente límite cuando $x \to 0$, pero



sí cuando x se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda. Esto nos lleva a definir:

Definición 163 $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists\delta : f(a, a+\delta) \subset E(L,\varepsilon)$;

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists\delta : f(a-\delta, a) \subset E(L,\varepsilon).$$

En el ejemplo, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
Se definen análogamente límites laterales infinitos. Como ejercicio calcule los límites laterales $\lim_{x\to 0^\pm} e^{-1/x}$.

3.2.2. Continuidad

El concepto de continuidad de una función responde a la idea de que ésta no varía bruscamente; en otras palabras si $a \in D$ y x se acerca a a, la función debe ser tal que $f(x)$ se acerque a $f(a)$.
La siguiente definición formaliza estas ideas:

Definición 164 *Sea $a \in D$*
$f(x)$ es continua en a $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : |x-a| < \delta, x \in D \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall E(f(a),\varepsilon), \exists E(a,\delta) : f(E(a,\delta)) \subset E(f(a),\varepsilon).$$

f es continua en (en D) si y solo si es continua en a, $\forall a \in D$.

Nota 165 *Para a punto de acumulación de D (caso habitual) la definición anterior equivale a pedir* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Lo anterior reduce el concepto de continuidad al de límite. Hay también una versión de la continuidad en términos de sucesiones.

Teorema 18 *Sea $a \in D$*
f es continua en a $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D \forall n, \lim_n x_n = a \Rightarrow \; \lim_n f(x_n) = f(a)$

Demostración. Análoga al teorema 17.
Las observaciones anteriores permiten asegurar la continuidad de numerosas funciones.
En primer lugar, los polinomios son continuos, y las funciones racionales (cocientes de polinomios) lo son en todos los puntos que no sean raíces del denominador. Esto es consecuencia de las propiedades algebraicas de los límites.
La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua $\forall x \geq 0$ (ver ejemplo (17) del Capítulo 2). Se puede ver también (no lo haremos aquí) que las funciones $x^a, e^x, \log(x), \operatorname{sen}(x), \cos(x)$ son continuas en sus respectivos dominios.
Por otra parte, la composición de funciones continuas es continua, como surge de la siguiente

Proposición 166 *Si $f : D \to D'$ continua en $a \in D$ y $g : D' \to \mathbb{R}$ continua en $b = f(a)$, entonce $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ es continua en a.*

Demostración. Es sencilla por el Teorema 18.
Si $x_n \overset{n}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{n}{\to} f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \overset{n}{\to} g(f(a))$.

♠

Ejemplo 167

2) $e^{\mathrm{sen}(\sqrt{x})}$ *es continua en* $x \geq 0$.

3.2.3. Teoremas para funciones continuas en un intervalo

Teorema 19 *(Bolzano)*
f continua en $[a,b]$, $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo (no nulo), o $f(a)f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

Demostración. Sean por ejemplo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (el otro caso es análogo). Recurrimos al método de bipartición introducido en la Sección 2.2.4.
Tomamos $a_0 = a$, $b_0 = b$. Sea $c_0 = \frac{a+b}{2}$.
Si $f(c_0) = 0$ ya encontramos la raíz buscada. En caso contrario, si $f(c_0) > 0$

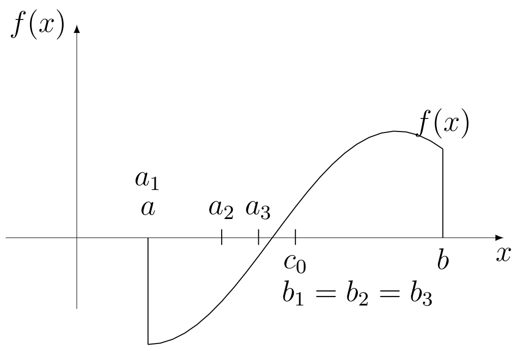


Figura 3.1: Ejemplo teorema de Bolzano

definimos $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$; en el caso que $f(c_0) < 0$ definimos $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$. Se repite el procedimiento por inducción. Si no tuvimos una raíz en un número finito de pasos (en cuyo caso terminó el teorema), entonces generamos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ con $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Además, como se vio en el Capítulo 2, por este procedimiento se obtienen sucesiones (a_n) y (b_n) que forman un PSMC. Sea c el límite común. Como f es continua, $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n) = f(c)$. Como $f(a_n) \leq 0$, $\lim_n f(a_n) \leq 0$. Análogamente, como $f(b_n) \geq 0$, $\lim_n f(b_n) \geq 0$. Como deben coincidir, se tiene que $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n) = f(c) = 0$.

♠

Corolario 168 *Sean f continua en $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$ y λ un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$ ($f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(a) > \lambda > f(b)$ según el caso).*
Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \lambda$.

Demostración. La función $g(x) = f(x) - \lambda$ cumple las hipótesis del Teorema de Bolzano, por lo que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = f(c) - \lambda = 0$, y entonces $f(c) = \lambda$.

♠

Teorema 20 *(Weierstrass)*
Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow$ f tiene máximo y mínimo en $[a,b]$:

$$\exists m, M : m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a,b], m = f(x_m), M = f(x_M).$$

Demostración.

i) Veamos en primer lugar que f es acotada superiormente en $[a,b]$. Si no fuera así, se podría construir una sucesión $f(x_n)$, con $x_n \in [a,b]$, tal que $\lim_n f(x_n) = +\infty$.
Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como es acotada, del Teorema 5 del Capítulo 2 deducimos que existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge, $x_{n_k} \xrightarrow{k} L$.
Como $a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow$ $a \leq L \leq b$ y $L \in [a,b]$.
$\Rightarrow$ f es continua en $L \Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k} f(L)$, lo que contradice lo supuesto ($f(x_n) \to \infty$).

ii) Sea $M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$. Como M es el supremo del conjunto $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ es fácil construir $(f(x_n))$ con límite M. (Basta tomar $f(x_n)$ tal que $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$, que siempre existe por ser M el supremo). Una vez más, $\exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \xrightarrow{k} x_M \Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_M) \Rightarrow M = f(x_M)$. El razonamiento es análogo para el mínimo.

♠

Ejercicio 169

a) *Dar un ejemplo de f continua en $(a,b]$ y no acotada.*

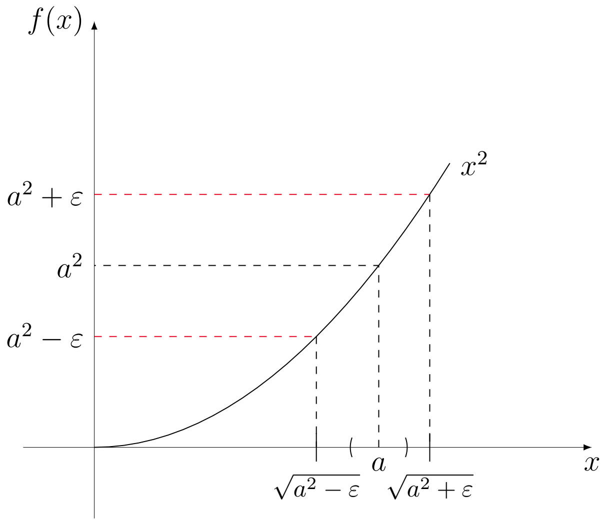
b) *Si f es continua en $[a,b]$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, probar que f tiene mínimo en $[a,b]$.*

3.3. Continuidad uniforme

Volvemos a la definición de continuidad. Si f es continua en un punto a, sabemos que fijado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta$ implique $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. El número δ representa entonces la cercanía que debemos imponer entre x y a para garantizar que $f(x)$ no se aleje más que ε de $f(a)$.
Fijado ε, el valor posible para δ no es en general único, ya que si un valor para δ nos sirve entonces nos servirá cualquier otro menor. Sin embargo, existe en general un máximo δ que no podemos superar si queremos tener $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 170

3) Sean $f(x) = x^2$ y $a > 0$. Para obtener $|x^2 - a^2| < \varepsilon$, x debe estar en el intervalo $(\sqrt{a^2-\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon})$. Luego δ debe cumplir $\delta \leq \sqrt{a^2+\varepsilon} - a$ y $\delta \leq a - \sqrt{a^2-\varepsilon}$. Se puede ver que la primera condición es más restrictiva, por lo que $\delta_{max} = \sqrt{a^2+\varepsilon} - a$.



El ejemplo pone de manifiesto que para un ε dado, el valor δ_{max} depende (además de ε) del punto a en que se esté considerando la continuidad.
Para muchas aplicaciones (en particular en el cálculo integral, como se verá) resulta útil obtener un δ que dependa de ε pero que valga para todos los puntos a de un intervalo. Esto es algo más exigente que la continuidad.
Si obtuviéramos un tal δ, resultará que para todo par de puntos $x, x' \in I$ que disten entre sí menos que δ, se cumpliría $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Llegamos a la definición:

Definición 171 *f es uniformemente continua en un intervalo $I \Leftrightarrow$*

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) : \forall x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

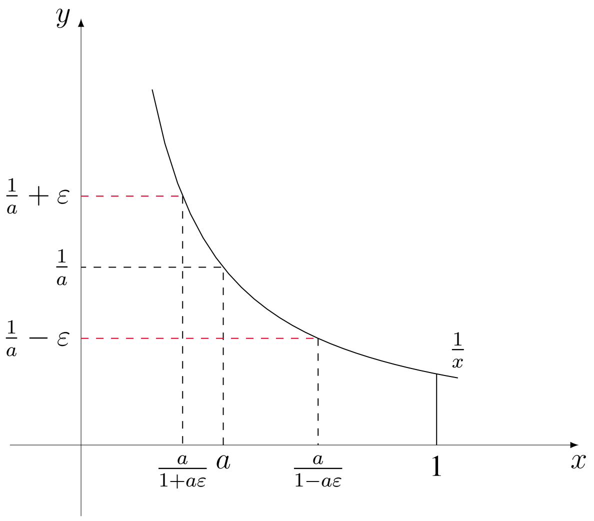
Ejemplo 172

3) *Continuación: Si consideramos $I = [0, +\infty)$ en el caso $f(x) = x^2$, deberíamos obtener $\delta(\varepsilon) \leq \delta_{max}(a, \varepsilon), \forall a \in I$. Pero $\delta_{max}(a, \varepsilon) = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+a} \xrightarrow{a\to+\infty} 0$, de modo que lo anterior no es posible. En otras palabras, la restricción de cercanía de x y a se vuelve más exigente al crecer a (lo que se visualiza con por el incremento de pendiente de la función) y es imposible dar un valor de δ uniforme para todo $a \in I$. La función no es uniformemente continua en I.*
Si restringiéramos el problema a $I' = [1, k]$ la situación cambia: tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2+\varepsilon}+k}$, cumple $\delta < \delta_{max}$ para todo $a \in I'$.

Claramente, la Definición 171 nos asegura que una función uniformemente continua en I es continua en todo $a \in I$ (basta con tomar $x' = a$ en la definición). El ejemplo anterior muestra que el recíproco no es cierto, al menos para un intervalo infinito.

Ejemplo 173

4) *$f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0, 1]$. Claramente f es continua en I. Para tener $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$, hace falta que $x \in \left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\varepsilon}, \frac{1}{\frac{1}{a}-\varepsilon}\right) = \left(\frac{a}{1+a\varepsilon}, \frac{a}{1-a\varepsilon}\right)$. Luego, δ debe cumplir $\delta \leq \frac{a}{1-a\varepsilon} - a = \frac{a^2\varepsilon}{1-a\varepsilon}$ y $\delta \leq a - \frac{a}{1+a\varepsilon} = \frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}$. La segunda condición es más*



restrictiva, y $\delta_{max} = \frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}$. Puesto que $\delta_{max} \xrightarrow{a\to 0} 0$, no es posible obtener $\delta(\varepsilon) < \delta_{max} \forall a \in I$. La función no es uniformemente continua en I.

El ejemplo 4) nos muestra que una función continua en un intervalo acotado ($(0, 1]$ en el ejemplo) puede no ser uniformemente continua. Como veremos a continuación, si el intervalo es cerrado y acotado, entonces la continuidad implica la continuidad uniforme.

Teorema 21 *(Cantor) f continua en $[a, b] \Rightarrow$ f uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos por absurdo que f no es uniformemente continua. La negación lógica de la Definición 171 nos conduce a que $\exists \varepsilon : \forall \delta, \exists x_\delta, x_{\delta'} \in I$ con $|x_\delta - x_{\delta'}| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(x_{\delta'})| \geq \varepsilon$. En otras palabras, para un ε particular, no existe δ uniforme y puedo encontrar puntos tan cercanos como quiera con imágenes que distan más que ε.
Particularmente con cada $\delta = 1/n$ podemos construir sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$|x_n - x_{n'}| < \frac{1}{n}, |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon \ (*)$$

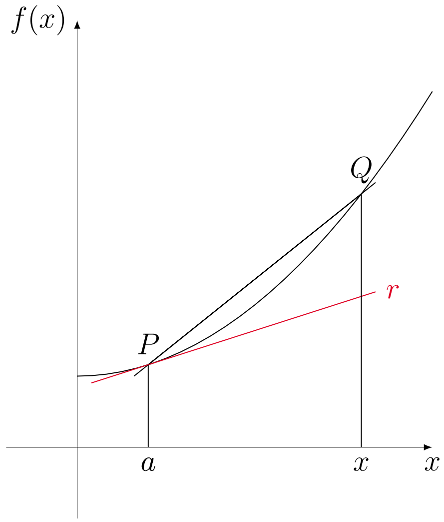
Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tiene (Teorema 5) una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, y $\text{lím}_k\, x_{n_k} = L \in [a, b]$. Como $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k} 0 \Rightarrow$ $\text{lím}_k\, x'_{n_k} = L$.
Como f es continua en L sabemos que $\text{lím}_k\, f(x_{n_k}) = \text{lím}_k\, f(x'_{n_k}) = f(L)$. Pero entonces $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \xrightarrow{k} 0$, lo que es absurdo por $(*)$.

♠

3.4. Derivadas

La noción de derivada responde a la idea de la "velocidad con que cambia" la función $f(x)$. En un intervalo, esta velocidad puede expresarse por la razón: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, llamado cociente incremental. Si buscamos una versión local, es decir la velocidad con que está variando $f(x)$ en el punto a, lo natural es tomar límite con $x \to a$.
Geométricamente, esto equivale a considerar la pendiente de la recta por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (x, f(x))$ y al tomar límite, si éste existe, obtener la pendiente de la recta r, tangente en el punto P.
Llegamos a la siguiente definición:

Definición 174 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ función, a tal que existe $E(a, r) \subset D$. f es derivable en a si y solo si existe $\text{lím}_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*
En ese caso, al límite se le llama derivada de f en el punto a *y se lo denota $f'(a)$ (o también $\frac{df}{dx}(a)$).*



Obsérvese que esta definición es eqivalente a la existencia de un número A tal que

$$f(x) = f(a) + (x-a)A + (x-a)\varepsilon(x) \text{ tal que } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Naturalmente $A = f'(a)$. Esta manera de definir la derivabilidad es la que se generaliza para funciones de más variables.

Una consecuencia inmediata de la Definición 174 es que toda función derivable es continua. En efecto:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

De hecho, la derivabilidad es una condición más exigente que la continuidad, como lo muestra el ejemplo $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$. En ese caso, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = sg(x)$, que no tiene límite en $x = 0$.

Ejemplo 175

5)

$$f(x) = e^x \frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a \frac{(e^{x-a}-1)}{(x-a)} \xrightarrow{x\to a} e^a \Rightarrow f'(a) = e^a.$$

La función exponencial tiene derivada en cualquier punto y $(e^x)' = e^x$.

En forma similar se puede probar que:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};\ (\log|x|)' = \frac{1}{x};\ (\mathrm{sen}(x))' = \cos(x);\ (\cos(x))' = -\mathrm{sen}(x).$$

Proposición 176 *Si f, g son derivables en a, también lo son $f+g$, $f-g$, fg y f/g si $g(a) \neq 0$, y se cumple:*

(i) $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

(ii) $(fg)' = f'g + fg'$.

(iii) $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Demostración. Veamos por ejemplo (ii), los otros son similares:

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$
$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

Tomando límite con $x \to a$, el segundo miembro tiende a $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

♠

3.4.1. Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)

Teorema 22 *Sean f derivable en a y g derivable en $b = f(a)$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en a, y $(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$.*

Demostración. Una primera aproximación a la prueba es la siguiente:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Cuando $x \to a$, $f(x) \to f(a)$ y los dos factores del segundo miembro tienden respectivamente a $g'(b)$ y $f'(a)$.
Un inconveniente de este argumento es que $f(x) - f(a)$ podría anularse para x arbitrariamente cerca de a, en el caso $f'(a) = 0$.
Sea $\varepsilon(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y-b} - g'(b)$ definido para y en un entorno reducido. Por definición de derivada, $\lim_{y \to b} \varepsilon(y) = 0$. Si definimos $\varepsilon(b) = 0$ ($\varepsilon(y)$ continua en b), la igualdad $g(y) - g(b) = (y-b)(g'(b) + \varepsilon(y))$ vale para y en un entorno de b, incluso en el punto b. Ponemos $y = f(x)$, y dividimos por $x - a$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(g'(b) + \varepsilon(f(x)))$$

Tomando límite con $x \to a$, se prueba la tesis.

♠

Deducimos del teorema que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Ejemplo 177

6) $(e^{\operatorname{sen}(x)})' = e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)$.

3.4.2. Extremos relativos y derivadas

Definición 178 *f tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto a si y solo si existe un entorno $E(a,\delta)$ en el dominio de f tal que $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in E(a,\delta)$.*

Ejemplo 179 *$f(x) = |x|$ tiene un mínimo relativo e $x = 0$.*

Proposición 180 *Si existe derivada en un extremo relativo, debe valer 0.*

Demostración. Supongamos que $f'(a) > 0$. Entonces para todo x en un entorno $E(a,\delta)$ se cumple $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, y por lo tanto $f(x) - f(a)$ es del mismo signo que $x - a$. Esto significa que $f(x) > f(a)$ si $x \in (a, a+\delta)$, mientras que $f(x) - f(a)$ si $x \in (a-\delta, a)$. Pero entonces a no es extremo relativo.
Si $f'(a) < 0$, se cumple análogamente que a no es extremo relativo.

♠

Nota 181 *La condición $f'(a) = 0$ no alcanza para asegurar que f tiene extremo en a, como lo muestra el ejemplo $f(x) = x^3$ en el punto $x = 0$.*

Teorema 23 (Teorema del valor medio o de Lagrange)
Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

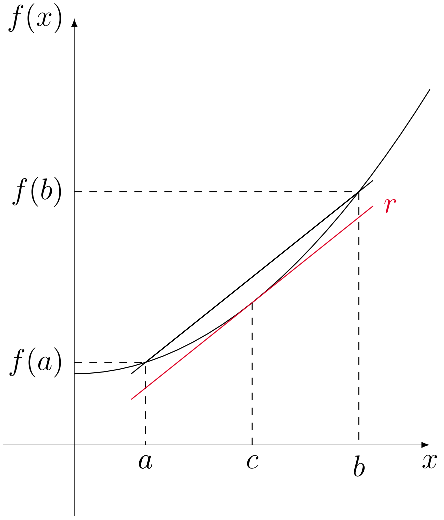
i) Veamos en primer lugar el caso $f(b) = f(a)$ (Teorema de Rolle). Por el Teorema 20 de Weierstrass, existen máximo M y mínimo m de f en $[a,b]$. Si ambos ocurren en los extremos a y b del intervalo, como $f(a) = f(b)$ tendríamos $m = M$, y por lo tanto la función sería constante en $[a,b]$. En ese caso $f'(c) = 0 \forall c \in (a,b)$.

   Supongamos ahora que uno de ellos (por ejemplo el máximo) se da en un punto de (a,b): es decir, $f(c) = M, c \in (a,b)$. Entonces f tiene un máximo relativo en c y por lo tanto $f'(c) = 0$.
   En cualquier caso, existe $c \in (a,b) : f'(c) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ii) En el caso general, sea $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. La función g así definida cumple las hipótesis del caso i), ya que $g(a) = g(b) = f(a)$.
   Entonces, $\exists\, c \in (a,b) : f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

♠

Un corolario útil del Teorema 23 es que el signo de la derivada en un intervalo determina el crecimiento de la función.



Proposición 182 *Si f es derivable en un intervalo (a, b), $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en (a, b), es decir $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.*

Demostración. Sean $x, x' \in (a, b)$, $x < x'$. Si fuese $f(x) \geq f(x')$, se deduce que $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq 0$. Por el Teorema de Lagrange, existe $c \in (x, x')$ tal que $f'(c) \leq 0$, lo que es absurdo por hipótesis.

♠

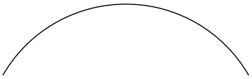
Nota 183 *En forma análoga, si $f'(x) < 0$ en (a, b), f es estrictamente decreciente en (a, b).*

De lo anterior surge que estudiando el signo de $f'(x)$ se puede bosquejar el crecimiento de la función $f(x)$. Para una representación gráfica más completa de una función, es usual estudiar la *concavidad*, que nos indica si la pendiente de la curva está creciendo o decreciendo con x.

Concavidad positiva

Como la pendiente es $f'(x)$, su crecimiento está dado por el signo de la derivada de $f'(x)$, si ésta existe. A la derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda de f, y se denota f'' o también $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Concavidad negativa



No entremos aquí en más detalles (asíntotas, etc.) del estudio analítico y representación gráfica de funciones, que es un tema usual en los cursos de secundaria. Terminamos la sección con dos resultados que serán empleados en la Sección 3.6.

Teorema 24 (Cauchy)
Si f, g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b),

$$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

.

Demostración. Sea $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Luego $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Por el Teorema 23, existe $c \in (a, b) : h'(c) = 0$.

♠

Teorema 25 (Regla de L'Hópital)
Si f y g son continuas en $E(a, \delta)$, $f(a) = g(a) = 0$, y derivables en $E'(a, \delta)$, $g'(x) \neq 0$ en $E'(a, \delta)$ entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Demostración. Sea $x > a$. Aplicando el Teorema 24 de Cauchy a f y g en $[a, b]$, tenemos para algún $c \in (a, x)$: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Si $x \to a^+$, $c \to a^+$, y por tanto $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Puede procederse igual para $x \to a^-$.

♠

Ejemplo 184 *Buscamos* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Derivando, se tiene $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3.5. Funciones inversas

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva ($f(x) \neq f(x')$ para $x \neq x'$) y $D' = f(D)$ es el recorrido, puede definirse una función inversa $f^{-1} : D' \to D$ tal que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$: o en otras palabras, $f^{-1} \circ f = id_x$; $f \circ f^{-1} = id_y$, donde id es la función identidad ($id_x(x) = x, id_y(y) = y$).

Un caso particular en que la inyectividad está asegurada es el de una función estrictamente monótona (creciente o decreciente). Una pregunta natural es la siguiente: si f es continua o derivable, ¿lo será también f^{-1}? Los Teoremas 26 y 27 dan resultados sobre este punto.

Teorema 26 *Si f es continua y estrictamente monótona en un intervalo I. Entonces, el recorrido de f es un intervalo J, y $f^{-1} : J \to I$ es continua y estrictamente monótona.*

Demostración. $J = f(I)$ es un intervalo por el Corolario 168, que asegura que si f (continua) toma dos valores distintos entonces toma todos los valores intermedios. La monotonía es también sencilla. Sea por ejemplo f estrictamente creciente. Consideramos $y < y'$. Si fuese $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$ tendríamos a partir de la monotonía de f que $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$, o que $y \geq y'$, lo que es absurdo. Entonces, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Veamos ahora la continuidad. Sea $y_0 \in J$, estudiamos $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y)$. Como para $y < y_0$ se tiene que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$, y además $f^{-1}(y)$ crece con y, se deduce fácilmente que existe $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = L$, y además $L \leq f^{-1}(y_0)$. Si fuese $L < f^{-1}(y_0)$ entonces se tendría que $f^{-1}(y) \leq L < f^{-1}(y_0)\, \forall y < y_0$, y aplicando f que $y \leq f(L) < y_0\, \forall y < y_0$, lo que es absurdo. Entonces $\displaystyle\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.
Análogamente, $\displaystyle\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

♠

Teorema 27 *Sea f derivable en $I = (a, b)$, $f'(x) > 0$ en I, y $J = f(I)$. Entonces f^{-1} es derivable en J, y $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

Demostración. Por la Proposición 182, f es estrictamente creciente (de donde se deduce además que J es un intervalo abierto). Por el Teorema 26, existe f^{-1} continua. Sea $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$:

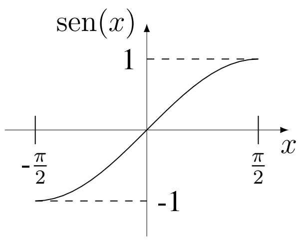
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

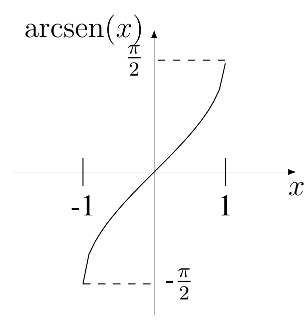
Por la continuidad de f^{-1}, cuando $y \to y_0$ entonces $x \to x_0$ y el segundo miembro tiene límite $\frac{1}{f'(x_0)}$. Entonces $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

♠

Nota 185 *La expresión* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ *permite deducir que si* f *tiene derivadas de mayor orden (derivadas segunda, tercera, etc.), también las tiene* f^{-1}*, y pueden obtenerse derivando la fórmula anterior por la regla de la cadena.*

Ejemplo 186 $f(x) = \mathrm{sen}(x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
$f^{-1}(y) = \mathrm{arcsen}(y), y \in (-1, 1)$.
$(x = \mathrm{arcsen}(y)) \Leftrightarrow y = \mathrm{sen}(x)$.
$(\mathrm{arcsen}(y))' = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$*, donde la última igualdad se deduce del hecho que si* $x = \mathrm{arcsen}(y)$*,* $y = \mathrm{sen}(x)$ *y* $\sqrt{1-y^2} = \cos(x) = \cos(\mathrm{arcsen}(y))$*.*





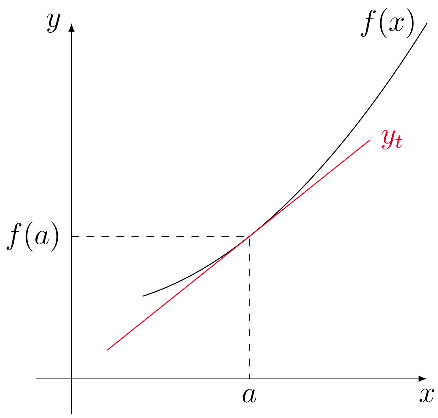
3.6. Desarrollo de Taylor

Comenzamos con la siguiente reinterpretación de la noción de derivada: si f es derivable en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$, y podemos escribir $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, donde se verifica que $\frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} 0$. Se dice que $r(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $(x-a)$, lo que implica que para x suficientemente próximo a a, $r(x)$ será despreciable frente a $(x-a)$.

En otras palabras, la recta tangente $y_t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ aproxima a $f(x)$ de tal modo que el error cometido $r(x)$ resulta, cerca de a, despreciable frente a $(x-a)$. El desarrollo de Taylor permite extender las ideas anteriores para obtener aproximaciones mejores.

3.6.1. Órdenes de infinitésimos

Definición 187 *Sean* $f(x), g(x)$ *con límite* 0 *cuando* $x \to a$*. Se dice que* $f(x)$ *es de mayor orden que* $g(x)$ *(y se denota* $f(x) = o(g(x))$*) si y solo si* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.



Ejemplo 188 $x^2 = o(x)$, *y en general* $x^\alpha = o(x^\beta)$ *siempre que* $\alpha > \beta$.

Ejemplo 189 $x^2 = o(\operatorname{sen}(x))$, *ya que* $\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} = x\frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \xrightarrow{x\to 0} 0$.

Proposición 190 *Con* $x \to a$, *se verifica*

a) $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$.

b) $o(kg(x)) = o(g(x))$, *si* $k \neq 0$.

c) $o(o(g(x))) = o(g(x))$.

d) $h(x)o(g(x)) = o(g(x))$ *si* h *es acotada en* $E(a, r)$.

e) $[o(g(x))]^n = o(g^n(x))$.

f) *Si* $h(x) \approx g(x)$ *con* $x \to a$, *entonces* $o(h(x)) = o(g(x))$.

La notación debe interpretarse de la siguiente manera. Por ejemplo, en el caso a), si $f_1(x) = o(g(x))$ y $f_2(x) = o(g(x))$ entonces $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$. En otras palabras, la suma de infinitésimos de mayor orden que $g(x)$ es también de mayor orden que $g(x)$.

La prueba de las propiedades es sencilla. Veamos por ejemplo e). Sea $f(x) = o(g(x))$. Queremos probar que $(f(x))^n = o(g(x)^n)$:

$$\frac{(f(x))^n}{(g(x))^n} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n \xrightarrow{x\to a} 0,$$

donde el último paso es válido porque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to a} 0$. Dejamos el resto como ejercicio.

Retomando el planteo inicial, podemos decir que si f es derivable en a, $f'(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, con $r(x) = o(x-a)$. Aproximando f con un polinomio de primer grado en $(x-a)$, obtuvimos un error de mayor orden que $(x-a)$. Si queremos una aproximación mejor, con un error que sea $o((x-a)^n)$, parece natural aproximar por un polinomio de grado n en $(x-a)$. Para que esa aproximación sea válida, deberemos pedir más regularidad a f: que tenga n derivadas en a.

3.6.2. Teorema de Taylor

Teorema 28 (Taylor)
Sea f derivable hasta el orden n en $x = a$. Entonces existe un único polinomio $P_n(f,a)$, de grado n en $(x-a)$, tal que $f(x) = P_n(f,a) + r_n(x)$, con $r_n(x) = o((x-a)^n)$.

Además, $P_n(f,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (polinomio de Taylor de f en a).

$r_n(x)$ se denomina *resto del desarrollo de Taylor de f de orden n en $x = a$.*

Demostración.

(i) Veamos en primer lugar la unicidad. Supongamos que $f(x) =$

$$a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+r_n(x) = b_0+b_1(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^n+R_n(x)$$

con $r_n(x) = o((x-a)^n), R_n(x) = o((x-a)^n)$. Como $r_n(x)$ y $R_n(x)$ tienen límite 0 para $x \to a$, se cumple que $f(a) = a_0 = b_0$. Luego $a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n+r_n(x) = b_1(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^n+R_n(x)$. Dividiendo por $(x-a)$ y tomando límite con $x \to a$, se obtiene que $a_1 = b_1$, ya que $r_n(x) = o((x-a))$ y $R_n(x) = o((x-a))$. Repitiendo el procedimiento por inducción, se llega a que $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, lo que prueba la unicidad.

(ii) Para la existencia, razonamos por inducción completa. Para $n = 1$, el teorema equivale a la observación que se hizo al principio de la sección. Suponiendo el teorema válido para $n-1$, lo probaremos para n. Debe probarse que $f(x) = P_n(f,a)+r_n(x)$, con $r_n(x) = o((x-a)^n)$. En otras palabras, tomando la primera ecuación como definición de $r_n(x)$:

$$r_n(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n]$$

se debe probar que $\frac{r_n(a)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x\to a} 0$. Derivando la expresión anterior en un entorno de a (f es derivable), tenemos: $r_n'(x) =$

$$= f'(x)-[f'(a)+f''(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}] = f'(x)-P_{n-1}(f',a).$$

Aplicando la hipótesis inductiva a la función f', siendo la expresión dentro del paréntesis recto el desarrollo de Taylor de f' de orden $n-1$, resulta que $r'_n(x)$ es el resto de Taylor de f' de orden $n-1$ en $x=a$ y por tanto $\frac{r'_n(x)}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow{x\to a} 0$ o también $\frac{r'_n x}{n(x-a)^{n-1}} \xrightarrow{x\to a} 0$. Aplicando la regla de L'Hopital obtenemos $\frac{r_n(a)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x\to a} 0$.

♠

Ejemplo 191 $P_n(e^x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 192 $P_{2k+1}(\operatorname{sen}(x),0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Ejemplo 193 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 194 $P_n(\frac{1}{1-x},0) = 1+x+x^2+\ldots+x^n$. *Para verlo sin calcular las derivadas, observar que*

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Como $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ *y* $\frac{1}{1-x}$ *es derivable infinitas veces en* 0*, el polinomio de Taylor surge de la unicidad del desarrollo.*

Ejemplo 195 $P_4(e^{x^2},0) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$*, ya que* $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + r(u)$, $r(u) = o(u^2)$*, lo que implica que* $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + r(x^2)$, $r(x^2) = o(x^4)$.

Ejemplo 196 $P_4(e^{\operatorname{sen}(x)},0)$. *Para calcularlo, escribimos:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{\operatorname{sen}(x)} = 1 + \operatorname{sen}(x) + \frac{(\operatorname{sen}(x))^2}{2!} + \frac{(\operatorname{sen}(x))^3}{3!} + \frac{(\operatorname{sen}(x))^4}{4!} + o(x^4),$$

ya que $o((\operatorname{sen}(x))^4) = o(x^4)$ *por propiedad (f). Sustituimos ahora* $\operatorname{sen}(x)$ *por su desarrollo:*
$e^{\operatorname{sen}(x)} = 1+(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))^2+\frac{1}{3!}(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4))^3+\frac{1}{4!}(x+o(x^2))^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$*, donde se desarrollaron las expresiones y se unieron los términos de mayor orden que* x^4*. Entonces:* $P_4(e^{\operatorname{sen}(x)},0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$

El Ejemplo 193 mostró una aplicación del desarrollo de Taylor al cálculo de límites indeterminados. Veamos una aplicación al estudio de extremos relativos de funciones. Como se vio en la Sección 3.4, en un extremo relativo se anula la derivada (si existe). Sin embargo, la anulación de la derivada no alcanza para saber si el punto es un máximo, un mínimo o si no es ni siquiera un extremo. De hecho, veremos que la primera derivada no nula, si existe, clasifica el punto:

Proposición 197 *Si f es derivable hasta el orden n en a, $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$ entonces:*

a) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

b) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

c) Si n es impar, f no tiene extremo en a.

Demostración. Por Taylor: $f(x) = f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$, y reescribiendo: $f(x) - f(a) = (x-a)^n[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}]$. Como $\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x\to a} 0$, en $E'(a,\delta)$ el signo del paréntesis recto es el de $f^{(n)}(a)$. Si n es par, este es el signo de $f(x) - f(a)$, de donde se deduce $a)$ y $b)$. Si n es impar, $(x-a)^n$ cambia de signo a un lado y otro de a, por lo que también lo hace $f(x) - f(a)$.

♠

3.6.3. Fórmula de Lagrange para el resto

Para diversas aplicaciones resulta útil tener una expresión para el resto $r_n(x)$ en términos de la función f. Existen varias formas, pero nos limitaremos a la más usada, la forma de Lagrange, que generaliza el Teorema 23 del valor medio. Nótese que hace falta hipótesis más fuertes para f (derivada de orden $n+1$ en un entorno de a).

Teorema 29 *Si f tiene derivada de orden $n+1$ en $E(a,\delta)$, entonces $f(x) = P_n(f,a)+ r_n(x)$, donde $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, para algún $c \in [a,x]$.*

Demostración. $P_n(f,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$. Definimos una función auxiliar $F(t)$ sustituyendo a por t:

$$F(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!},\ t \in E(a,\delta).$$

Se cumple $F(x) = f(x)$, $F(a) = P_n(f,a)$. Derivando, resulta

$$F'(t) = f'(t) - f'(t) + f''(t)(x-t) - f''(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} =$$

$\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$. Sea $G(t) = (x-t)^{n+1}$. Se cumple que $G(x) = 0$, $G(a) = (x-a)^{n+1}$. Aplicamos el Teorema 24 de Cauchy a F y G:

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!(-1)(n+1)(x-c)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-P_n(f,a)}{-(x-a)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Rightarrow r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

♠

Ejemplo 198 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *Si* $s_n(x)$ *es la reducida* n*-ésima de la serie,* $s_n(x) = P_n(e^x, 0)$*. Como* e^x *es infinitamente derivable, con derivadas* e^x*,* $e^x - s_n(x) = r_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$*, y* $|e^x - s_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$*.*

Nota 199 *No siempre es cierto que el desarrollo de Taylor de una función infinitamente derivable converge para* $n \to +\infty$ *a la propia función, ni siquiera en un entorno de* a *(no siempre ocurre que* $r_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$*).*

Capítulo 4

Integrales

4.1. Introducción

Los orígenes del cálculo integral se remontan a más de 2000 años, cuando los griegos calculaban áreas por el método de exhaución. La idea consiste en aproximar la región cuya área se quiere determinar por regiones poligonales de área conocida, y usar estas aproximaciones para obtener la fórmula exacta.

Veamos un ejemplo.

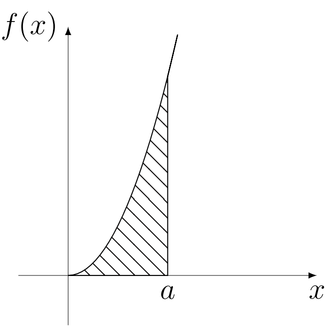
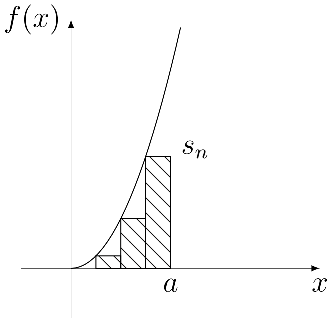


Figura 4.1: área debajo de una gráfica

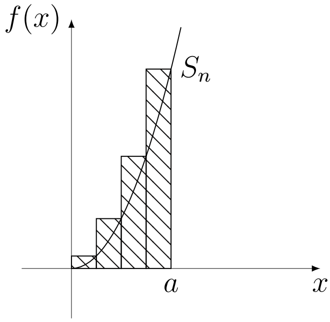
Se quiere hallar el área A de la región del plano comprendida entre el eje $0x$ y la parábola $y = x^2$, en el intervalo $[0, a]$ (región rayada en la Figura 4.1). Para eso se divide el intervalo $[0, a]$ en partes iguales $[\frac{a}{n}i, \frac{a}{n}(i+1)], i = 0, \ldots, n-1$.

En cada intervalo tomamos el mínimo valor de $f(x) = x^2$ y construimos la función "escalonada" por debajo de la parábola. El área debajo de esta escalera es una aproximación por defecto del área A (Figura 4.2(a)). Le llamamos s_n. Se tiene que:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a}{n}i\right)^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \leq A. \tag{4.1}$$



(a) Aproximación por defecto



(b) Aproximación por exceso

Figura 4.2: Aproximaciones del área debajo de una gráfica

Análogamente, construimos una aproximación por exceso del área A (Figura 4.2(b)), tomando en cada intervalo el valor máximo de $f(x) = x^2$. Se tiene:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{a}{n}(i+1)\right]^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \geq A. \tag{4.2}$$

Para evaluar las sumatorias, recurrimos a una fórmula: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$ que puede probarse por inducción completa. Se deduce que $\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$. Se obtiene entonces $s_n = \frac{a^3}{n^3}[\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}] = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}$, mientras que $S_n = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}$.

Teníamos $s_n \leq A \leq S_n$. Como s_n y S_n tienen límite $\frac{a^3}{3}$ cuando $n \to +\infty$, deducimos que $A = \frac{a^3}{3}$. En el razonamiento anterior, hemos utilizado con cierta libertad el concepto de área. De hecho hemos asumido que está bien definida el área como un número asociado a una región del plano, que si un área contiene a otra su área es mayor o igual, etc.

Si bien esto parece intuitivo, nos veríamos en dificultades ante la pregunta de cómo se *define* el área de un conjunto del plano. Un camino para dar la definición, es justamente el procedimiento anterior, al menos para regiones dadas por debajo de una función.

En lo que sigue, obtendremos a partir de una función f, por un procedimiento analítico como el anterior, un número real que llamaremos integral de f en un intervalo (en el ejemplo, $\frac{a^3}{3}$ es la integral de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$).

Luego *definiremos* el área debajo de una función f como ese número. Más allá de esta observación de carácter formal, importa rescatar del ejemplo el método a seguir: partir el intervalo, construir funciones escalonadas por encima y por debajo de la función, tomar límite afinando la partición. Estas son las ideas básicas para construir la integral.

4.2. Integración de funciones continuas

Consideramos en primera instancia una función f acotada en el intervalo $[a, b]$.

Definición 200 *Llamamos partición del intervalo $[a, b]$ a un conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Llamamos norma de la partición al número $|P| = \text{máx}_{i=0,\ldots,n-1}\{x_{i+1} - x_i\}$, longitud máxima de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$. Si P y Q son particiones de $[a, b]$ y $P \subset Q$, se dice que Q es un refinamiento de P.*

Definición 201 *Consideremos una función f acotada en $[a, b]$ y $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, y $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, $i = 0, \ldots, n-1$. A la suma $s(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ le llamaremos suma inferior de f respecto a P. A la suma $S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ le llamaremos suma superior de f respecto a P.*

Proposición 202

a) *Si Q es un refinamiento de P, $s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$.*

b) *$s(f, P) \leq S(f, Q)$ para particiones cualesquiera P y Q.*

Demostración.

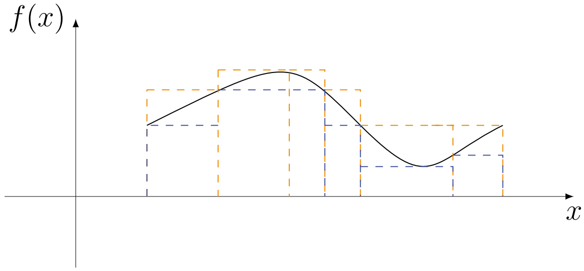
a) Basta probar las desigualdades para el caso que Q tiene un punto más que P (todo refinamiento puede obtenerse por un número finito de estos pasos).

   Sean $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ y $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, y, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$.
   $s(f, P) = \sum_{i=0;i\neq k}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + m_k(x_{k+1} - x_k)$, y
   $s(f, Q) = \sum_{i=0;i\neq k}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + m'_k(y - x_k) + m''_k(x_{k+1} - y)$,
   donde $m'_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_k, y]\}$, $m''_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in [y, x_{k+1}]\}$ y $m_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$.

   Claramente, $m_k \leq m'_k$, $m_k \leq m''_k$. Entonces $m_k(x_{k+1} - x_k) = m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) \leq m'_k(y - x_k) + m''_k(x_{k+1} - y)$,
   de donde $s(f, P) \leq s(f, Q)$.
   Se razona de forma análoga para probar $S(f, P) \geq S(f, Q)$.

b) Claramente, $s(f, P) \leq S(f, P)$ (pues $m_i \leq M_i, \forall i$). Para P y Q cualesquiera, $P \cup Q$ es un refinamiento de ambas. Entonces: $s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$.

♠



La proposición anterior nos muestra que cualquier suma inferior ("aproximación por defecto") es menor o igual que cualquier suma superior ("aproximación por exceso"). Guiándonos por el ejemplo $f(x) = x^2$, sería deseable que sumas superiores e inferiores encerraran un único número real. En otras palabras, que el extremo superior de las $s(f, P)$ coincidiera con el extremo inferior de las $S(f, P)$. (En principio, por (b) se tiene que $\sup_P\{s(f, P)\} \leq \inf_Q\{S(f, Q)\}$).

Definición 203 *Se dice que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada (no necesariamente continua) es integrable si* $\sup_P\{s(f, P)\} = \inf_Q\{S(f, Q)\}$. *A este número real se le llama integral de* f *en el intervalo* $[a, b]$ *y se denota por* $I = \int_a^b f$ *o también* $I = \int_a^b f(x)dx$ *(la ventaja de la segunda notación se verá más adelante).*

Las funciones continuas, que constituyen una clase muy amplia de funciones, son integrables.

Teorema 30 *Si* f *es continua en* $[a, b]$ *entonces es integrable; o sea* $\sup_P\{s(f, P)\} = \inf_Q\{S(f, Q)\}$.

La demostración surge en forma sencilla del siguiente lema:

Lema 204 *Si* f *es continua en* $[a, b]$ *entonces* $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tal que si* $|P| < \delta$ *entonces* $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Demostración. Se utiliza la continuidad uniforme de f en $[a, b]$. Por el Teorema 21 del Capítulo 3 (de Cantor), f es uniformemente continua en $[a, b]$, es decir que $\forall\rho > 0\exists\delta : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \rho$.

Sea $\varepsilon > 0$, elegimos $\rho = \frac{\varepsilon}{b-a}$ y δ cumpliendo la condición anterior. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición con $|P| \leq \delta$, entonces $\forall i, M_i - m_i \leq \rho$ (al ser f continua en $[x_i, x_{i+1}]$, alcanza su máximo y su mínimo en dos puntos que distan entre sí menos que δ). Entonces:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \rho\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon.$$

♠

Vamos a la demostración del Teorema 30:

Demostración. Sean $I = \sup_P s(f,P)$, $I' = \inf_P S(f,P)$. Se cumple $I \leq I'$. Si fuese $I < I'$, entonces tendríamos que $s(f,P) \leq I < I' \leq S(f,P)$, de donde $S(f,P) - s(f,P) \geq I' - I > 0$, lo que es absurdo por el Lema 204

♠

En el ejemplo de la parábola hemos visto que el área era el límite de una sucesión de sumas. Extendemos esta propiedad:

Definición 205 *Sea $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Un conjunto de números $X_P = \{\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}\}$ se llama conjunto admisible para P si y solo si se cumple $\overline{x_i} \in [x_i, x_{i+1}], \forall i = 0, \cdots n-1$ (es decir, X_P es una elección de puntos de los intervalos de P). Si f es acotada en $[a,b]$, llamaremos suma de Riemann de f asociada a P, X_P al número $SR(f,P,X_P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i)$.*

Teorema 31 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |P| < \delta \Rightarrow \ |I - SR(f,P,X_P)| < \varepsilon,$$

donde X_P es admisible para P.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos δ según el Lema 204.
Si $|P| < \delta$, $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Por definición, $s(f,P) \leq I \leq S(f,P)$. Además, si $X_P = \{\overline{x_0}, \dots, \overline{x_{n-1}}\}$ es un conjunto admisible, $m_i \leq f(\overline{x_i}) \leq M_i$, de donde $s(f,P) \leq SR(f,P,X_P) \leq S(f,P)$. Luego
$|I - SR(f,P,X_P)| \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

♠

Corolario 206 *Sea f continua en $[a,b]$. Si P_m es una sucesión de particiones tal que $|P_m| \xrightarrow{m} 0$ y X_m es admisible para P_m, entonces $SR(f,P_m,X_m) \xrightarrow{m} \int_a^b f(x)dx$.*

La demostración es inmediata acudiendo al Teorema 31.

Observación 2 *El Corolario 206 nos muestra que la integral es un límite de sumas $\sum f(x_i)\Delta x_i$ (aquí $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) cuando las longitudes de los intervalos Δx_i tienden a cero. Este es el origen de la notación $\int_a^b f(x)dx$ introducida por Leibniz, en que la sumatoria se sustituye por el símbolo integral $\int$, y Δx por dx para indicar paso al límite.*

Ejemplo 207 *$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$. En efecto, $f(x) = x^2$ es continua y por tanto las sumas $s(f,P_n)$ y $S(f,P_n)$ (que son sumas de Riemann) deben converger a $\int x^2dx$ siempre que $|P_n| \xrightarrow{n} 0$. Tomando P_n como en la introducción se encuentra que la integral es $\frac{a^3}{3}$.*

4.3. Propiedades de la Integral

Proposición 208

1. *Linealidad: si f y g son continuas en $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2. *Aditividad: si $a \leq b \leq c$ y f continua en $[a,c]$: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.*

3. *Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

4. *Si $f \geq g$ en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.*

5. *Si $a < b$ entonces $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)dx|$.*

Demostración. Probaremos cada una de las propiedades enunciadas:

1. $SR(\alpha f + \beta g, P, X_P) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha f(\overline{x_i}) + \beta g(\overline{x_i}))(x_{i+1} - x_i) = \alpha SR(f, P, X_P) + \beta SR(g, P, X_P)$. Tomando límite con una sucesión P_n tal que $|P_n| \to 0$, se prueba la linealidad.

2. Sea P es una partición de $[a,c]$ que contiene a b, es decir $P = \{x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$ con $x_k = b$. Entonces $SR(f, P, X_P) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=k}^{n-1} f(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) = SR(f, P', X_{P'}) + SR(f, P'', X_{P''})$, donde P' y P'' son particiones "heredadas" de $[a,b]$ y $[b,c]$, $X_{P'}$ y $X_{P''}$ conjuntos admisibles "heredados". Además $|P'| \leq |P|$, $|P''| < |P|$.

   Considerando P_n sucesión de particiones que contienen a b con $|P_n| \to 0$, se obtienen P'_n y P''_n tales que $|P'_n| \to 0$ y $|P''_n| \to 0$. Tomando límite en la igualdad anterior se prueba la aditividad.

3. Si $f \geq 0$ en $[a,b]$ entonces $SR(f, P, X_P) \geq 0, \forall P$, lo que implica que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. Si $f \geq g$ en $[a,b]$ entonces por el punto anterior $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$, y en consecuencia $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$.

5. $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, y luego $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Si $\int_a^b |f(x)|dx = k \geq 0$, entonces hemos probado que el número $\int_a^b f(x)dx$ está en el intervalo $[-k,k]$. Por lo tanto, su valor absoluto es menor o igual que k.

♠

La aditividad puede extenderse eliminando la restricción $a \leq b \leq c$, si se da una definición conveniente de $\int_a^b f(x)dx$ para $a > b$.

Definición 209 *Si $a > b$ y f es continua en $[b,a]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.*

Resulta entonces que si f es continua en un intervalo que contiene a a, b y c entonces $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. El caso $a \leq b \leq c$ ya se vio: para extenderlo a los otros casos hace falta discutir según las posibles ordenaciones de a, b y c. Sea por ejemplo $b \leq c \leq a$. Por la aditividad (prueba de la Proposición 208): $\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$. Al trasponer tenemos que $-\int_b^a f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$. Finalmente aplicando la Definición 209 se recupera la aditividad extendida. Los otros casos son similares.

También resulta $\int_a^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = 0$.

Ejemplo 210 *$\int_a^b (x^2+2)dx$. Por linealidad: $\int_a^b (x^2+2)dx = \int_a^b x^2dx + \int_a^b 2dx$. Además: $\int_a^b x^2dx = \int_0^b x^2dx - \int_0^a x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$. Como $\int_a^b 2dx = 2(b-a)$, entonces la integral de interés vale $\int_a^b (x^2+2)dx = \frac{b^3-a^3}{3} + 2(b-a)$.*

4.4. Extensión a funciones seccionalmente continuas

Hemos probado la integrabilidad y las propiedades elementales de la integral para el caso de funciones continuas. Una pregunta natural es en qué medida la integrabilidad puede extenderse a funciones con discontinuidades en el intervalo de integración $[a,b]$.

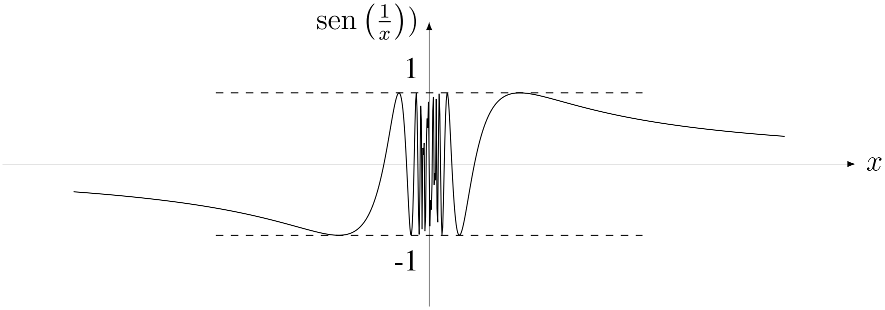
Para funciones acotadas, tenemos definidas las sumas superiores e inferiores $S(f,P)$ y $s(f,P)$ y las sumas de Riemann. Si se repasa la prueba de la integrabilidad para funciones continuas, se observa que la continuidad de la función es utilizada solo en el Lema 204, que afirma que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |P| < \delta \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. A partir del Lema 204 deducimos el Teorema 30 en que se prueba la integrabilidad de las funciones continuas.

Por otra parte, el Lema 204 vuelve a utilizarse en el Teorema 31 y su Corolario 206 para obtener a la integral como límite de sumas de Riemann y deducir de allí las propiedades. En otras palabras, si una función f cumple el Lema 204, puede probarse la integrabilidad para f y todas las propiedades que goza la integral de funciones continuas que hemos visto hasta el momento.

A continuación extendemos el Lema 204 para funciones seccionalmente continuas (continuas a tramos o a trozos).

Definición 211 *Una función f es seccionalmente continua si y solo si tiene a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad, con límites laterales finitos.*

Ejemplo 212 *La función dada por* $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$ *es seccionalmente continua.*



Ejemplo 213 *La función dada por* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ *no es seccionalmente continua, pues no existen los límites laterales en* $x = 0$.

Ejercicio 214 *Una función seccionalmente continua en un intervalo* $[a, b]$ *es acotada. Esto permite definir* $S(f, P)$ *y* $s(f, P)$ *para este caso.*

Lema 215 (Extensión del Lema 204) *Si* f *es seccionalmente continua en* $[a, b]$ *entonces*

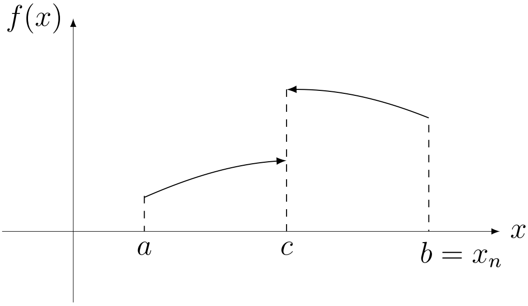
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |P| < \delta \Rightarrow\ S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Demostración. Por simplicidad, suponemos que f tiene un único punto de discontinuidad $c \in [a, b]$. Además, f es acotada (Ejercicio 214). Sean $k = \sup |f(x)|, x \in [a, b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Luego:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i).$$

El punto c pertenece a lo sumo a 2 intervalos $[x_i, x_{i+1}]$. No es difícil ver que se puede elegir δ tal que si $|P| < \delta$ se tiene en los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ que no contienen a c la siguiente desigualdad $(M_i - m_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Para hacerlo, definir $g(x) = f(x)$ para $x \in [a, c)$ y $g(c) = \lim_{x \to c^-} f(x)$, mientras que $h(x) = f(x)$ para $x \in (c, b]$, y $h(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$. Luego g y h son uniformemente continuas en $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente, donde se deduce lo anterior, ya que en los intervalos que no contienen a c, coinciden con f. Entonces:

$$\sum_{\{i \in \{0,\ldots,n-1\}:\ c \notin [x_i, x_{i+1}]\}} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$



En los intervalos que contienen a c (que pueden ser uno o dos), acotamos $(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < 2k\delta$. Como son a lo sumo dos, se deduce que $S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + 4k\delta$ si $|P| < \delta$. Si elegimos δ tal que además $\delta < \frac{\varepsilon}{8k}$, se tiene $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

♠

Corolario 216 *Funciones seccionalmente continuas en $[a,b]$ son integrables sobre $[a,b]$.*

Nota 217 *Es posible extender el Lema 215 (y por lo tanto la integrabilidad) a funciones más generales que las seccionalmente continuas. Se dice que una función es integrable (según Riemann) cuando esto puede hacerse. No estudiaremos esta generalización. Ver, por ejemplo, Capítulo 9 de [2]. En estos casos la tesis del Corolario 206 se puede tomar como la definición de la integrabilidad (Riemann).*

El siguiente ejemplo muestra que hay funciones que no son integrables.

Ejemplo 218 *La función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in [0,1], x \textit{ racional} \\ 0 & \textit{si } x \in [0,1], x \textit{ irracional} \end{cases}$ no es integrable, pues para todo intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se tiene $M_i = 1$ mientras que $m_i = 0$, ya que en todo intervalo hay racionales e irracionales. Luego $S(f,P) = 1$ y $s(f,P) = 0, \forall P$, y $0 = \sup_P s(f,P) < \operatorname{ínf}_P S(f,P) = 1$.*

Notar que la función de Dirichlet es discontinua en todo punto de $[0,1]$. Existen versiones más generales de la integral (integral de Lebesgue) que incluyen la función de Dirichlet, aunque no cualquier función. No entraremos en esto.

4.5. Teoremas fundamentales

4.5.1. Teorema del valor medio

Comencemos definiendo el valor medio de una función en un intervalo. Este representa la altura promedio de la gráfica (ver Figura 4.3 tal que el área por debajo de la constante μ coincide con el de la función.

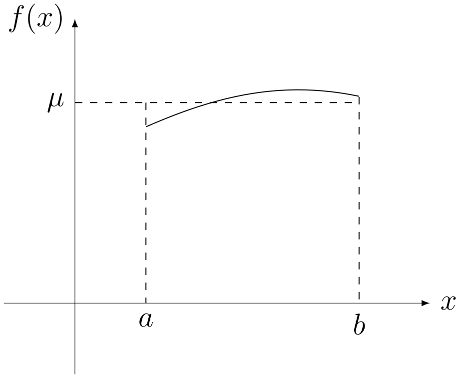


Figura 4.3: Valor medio de una función en un intervalo

Definición 219 *Sea f una función seccionalmente continua en $[a, b]$. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ al número $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.*

Teorema 32 (Teorema del Valor Medio) *Sea f continua en $[a, b]$, y μ su valor medio. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \mu$.*

Demostración. Sean M y m el máximo y mínimo de f en $[a, b]$. Integrando en $[a, b]$ y aplicando la propiedad 4, se tiene que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow \; m \leq \mu \leq M.$$

Como m y M son los valores de f en dos puntos de $[a, b]$ y f es continua, por el Corolario 168 del Capítulo 3, f debe tomar el valor μ en un punto intermedio.

♠

Ejercicio 220 *Dar un ejemplo de función seccionalmente continua en que el valor medio no sea alcanzado por f.*

4.5.2. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Hasta ahora tenemos una definición de integral con buenas propiedades, pero el procedimiento de cálculo (como límite), si bien puede ser útil desde el punto de vista de obtener aproximaciones numéricas, no es cómodo del punto de vista analítico.

Encaramos esto a continuación; como se verá, el cálculo se basa en el proceso inverso a la derivación.

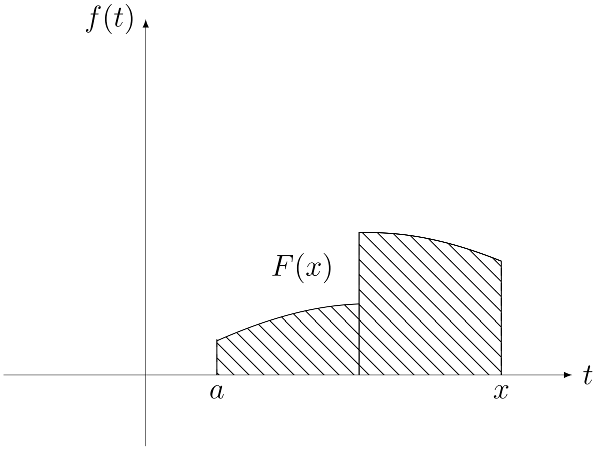
Definición 221 *$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en un intervalo I si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*

Proposición 222 *Si F y G son primitivas de f en un intervalo I, entonces difieren en una constante (es decir que $F(x) = G(x) + C, \forall x \in I$).*

Demostración. $F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0 \forall x \in I$. La función $H(x) = F(x) - G(x)$ tiene derivada idénticamente nula. Si suponemos $H(x_1) \neq H(x_2)$ entonces $\frac{H(x_1)-H(x_2)}{x_1-x_2} \neq 0$, y por el Teorema 23 de Lagrange, se obtendría un punto intermedio c tal que $H'(c) \neq 0$, lo que es absurdo.

♠

Sea f seccionalmente continua. Consideremos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, donde a es fijo y x variable (se utiliza la variable t, "variable muda" dentro de la integral para distinguir del extremo).



Teorema 33 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral) *Si f es seccionalmente continua en un intervalo abierto I, $a \in I$, y se considera $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in I$, entonces:*

1. *F es continua en I*

2. *Si f es continua en x_0, F es derivable en x_0, y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Demostración.

1. Sea $h > 0$, $|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|dt$. Puesto que f es seccionalmente continua, es acotada en un entorno de x ($|f(t)| \leq k$), y entonces $|F(x+h) - F(x)| \leq k|h|$. Si $h < 0$, se obtiene de todas formas que $|F(x+h) - F(x)| \leq k|h|$, de donde se deduce que F es continua.

2. Como f es continua en x_0 y f tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades, f es continua en $E(x_0, \delta)$. Para $|h| < \delta$:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0+eh),$$

con $e : 0 < e < 1$, gracias al Teorema 32 del valor medio, donde se debe distinguir entre los casos $h > 0$ y $h < 0$. Tomando límite con $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_0+eh) = f(x_0), \tag{4.3}$$

por lo que la derivada $F'(x_0)$ existe, y vale $F'(x_0) = f(x_0)$.

♠

Corolario 223 *Si f es continua en $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f en (a, b) (continua en los extremos a y b).*

Corolario 224 (Regla de Barrow) *Sea f continua en $[a, b]$ y G primitiva de f en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b$*

Demostración. Por la Proposición 222, G difiere de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ en una constante (F es otra primitiva):

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

para $x \in (a, b)$ (y para $x \in [a, b]$ por continuidad). Entonces $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$.

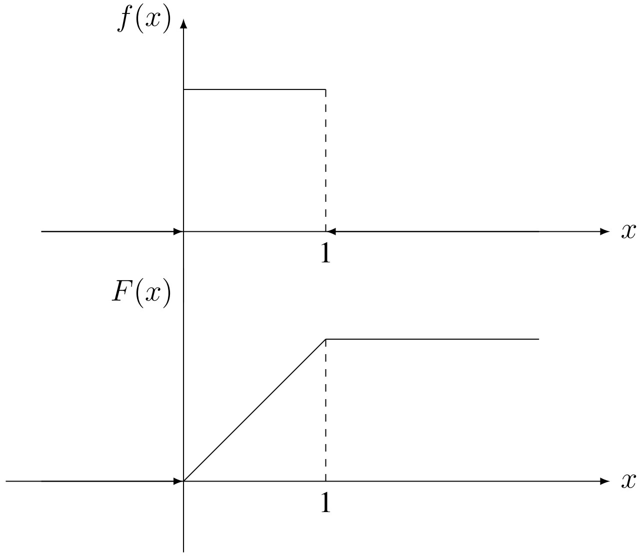
♠

4.5.3. Ejemplos

El interés de la Regla de Barrow es que cualquier primitiva, incrementada, nos da la integral. Veamos a continuación algunos ejemplos en que la primitiva es conocida. En la sección siguiente veremos métodos de cálculo de primitivas para más funciones.

Ejemplo 225 *Sean* $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, 1] \\ 0 & si\ x \notin [0, 1] \end{cases}$ *y* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Para $x \leq 0$, *claramente* $F(x) = 0$.
Para $x \in [0, 1]$, $F(x) = \int_0^x 1dt = x$
Para $x \geq 1$, $F(x) = \int_0^1 1dt + \int_1^x 0dt = 1$.

La función $F(x)$ es continua en todo punto y derivable en los puntos de continuidad de $f(x)$, en los que se cumple $F' = f(x)$. Se comprueba en este caso el Teorema Fundamental 33.

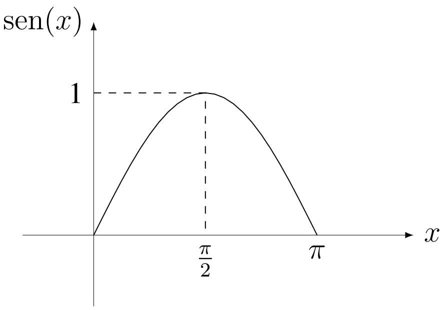


Ejemplo 226 $\int_0^a x^n$*. Aplicamos la Regla de Barrow con primitiva* $\frac{x^{n+1}}{n+1}$*:*

$$\int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Se puede comprobar que para el caso $n = 2$ *recuperamos el Ejemplo 207.*

Ejemplo 227 $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)dx = (-\cos(x))|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$*, y el valor medio de* $\operatorname{sen}(x)$ *en el intervalo* $[0, \pi]$ *es* $\frac{2}{\pi}$*.*



Ejemplo 228 $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log(x)|_1^b = \log(b)$.

Ejemplo 229 $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 230 *Hallar* c *y* f *continua tal que* $\int_c^x f(t)dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$.

Derivando a ambos lados tenemos que $f(x) = -\mathrm{sen}(x)$*, y por la Regla de Barrow:*

$$\int_c^x (-\mathrm{sen}(t))dt = \cos(t)|_c^x = \cos(x) - \cos(c), \tag{4.4}$$

por lo que c *debe cumplir* $\cos(c) = \frac{1}{2}$*. Por ejemplo,* $c = \frac{\pi}{3}$.

Ejemplo 231 *Si* $F(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^3}dt$ *y* $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{(1+t^2)^3}dt$*, hallar* $F'(x)$ *y* $G'(x)$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$*. Observando que* $G(x) = F(x^2)$*, podemos derivar la función compuesta mediante regla de la cadena:* $G'(x) = F'(x^2)2x = \frac{2x}{(1+x^4)^3}$.

4.6. Cálculo de primitivas

Notaremos por $\int f(x)dx$ al conjunto de las primitivas de $f(x)$. El problema es hallar una primitiva $F(x)$, para poder aplicar la Regla de Barrow. El camino a seguir es, conociendo un número reducido de primitivas (identificables como derivadas de funciones), mediante transformaciones y propiedades, escribir $\int f(x)dx$ en función de primitivas conocidas.

Es importante saber que el problema de hallar funciones elementales $F(x)$ (que son las resultantes de operar y/o componer polinomios, e^x, $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$ y sus inversas) que sean primitivas de otras funciones elementales, no siempre tiene solución.

En particular, existen funciones $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto cuya derivada V' es acotada, pero no integrable. Por tanto V es una primitiva de V' pero esa primitva no puede escribirse como la integral de V', como indica la fórmula de G en la demostración de la regla de Barrow. La llamada *función de Volterra* (cuya construcción está basada en la función $x^2\mathrm{sen}(1/x)$) es un ejemplo de esta situación.

El conjunto de partida para el cálculo explícito de primitivas es el de las llamadas *primitivas elementales*:

- $\int A dx = Ax + C$.
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.
- $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$.
- $\int e^x dx = e^x + C$.
- $\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$.
- $\int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) + C$.

- $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\cosh^2(x)} = \tanh(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2(x)} = \coth(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}(x) + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsenh}(x) + C = \log|x + \sqrt{1+x^2}| + C.$

4.6.1. Linealidad de la primitivaa

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[c, d]$. Entonces $\int (af + bg)dx = a \int f dx + b \int g dx$.

Si F es primitiva de $af+bg$, entonces $F = \int_c^x (af+bg) + C = a\int_c^x f + b\int_c^x g + C$. Por tanto F es primitiva de $a\int f + b\int g$ o sea, F es combinación lineal de una primitiva de f y una primitiva de g. (La inclusión en el otro sentido es semejante.)

Ejemplo 232 $\int (3\cos(x) + 2e^x)dx = 3\int \cos(x)dx + 2\int e^x dx = 3\sin(x) + 2e^x + C.$

Ejemplo 233 $\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$

Ejemplo 234 $\int \cos^2(x)dx$

Recordando las fórmulas trigonométricas $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ *y* $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \cos(2x)$ *se obtiene* $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$*, por lo que:*

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$$

4.6.2. Integración por sustitución

Si se tiene resuelto el problema de hallar una primitiva para una función $f(x)$ continua en un intervalo entonces también puede hallarse la primitiva de $f(g(t))g'(t)$ donde g es una función con derivada continua que puede componerse con f. En efecto, sea $\int f(x)dx = F(x) + C$ (F primitiva de f). Entonces $\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C$.

Esto se debe a que por la regla de la cadena, $(Fog)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 235 $\int t^3 \cos(t^4)dt = \frac{1}{4}\int(4t^3)(\cos(t^4))dt$.

En la segunda integral, considerando $x = g(t) = t^4$ *y* $f(x) = \cos(x)$ *tenemos* $\frac{1}{4}\int f(g(t))g'(t)$.

Resolvemos $\int f(x)dx = \int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C$, *y componiendo con* $g(t)$ *se obtiene* $\int t^3\cos(t^4) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) + C$.

La notación de Leibnitz para la integral resulta especialmente adecuada para tratar este procedimiento.

Si $x = g(t)$, escribimos $g'(t) = \frac{dx}{dt}$ o también $dx = g'(t)dt$.

Tenemos $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx = F(x) + C = F(g(t)) + C$.

El término dx en la integral sirve como recordatorio de que la variable de integración es x, y que si se realiza una sustitución $x = g(t)$, debe ponerse $dx = g'(t)dt$. De otro modo, nos sentiríamos inclinados a escribir

$\int f(x) = \int f(g(t))$, que NO es correcto.

Ejemplo 236 $\int \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)dt$. *Poniendo* $x = \cos(t)$. $dx = -\operatorname{sen}(t)dt$, *entonces:*

$$\int \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)dt = -\int x^2dx = -\frac{x^3}{3} + C = \frac{\cos^3(t)}{3} + C.$$

Ejemplo 237 $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt = 2\int \operatorname{sen}(u)du = -2\cos(u)+C = -2\cos(\sqrt{t})+C$, *donde se ha hecho el cambio de variable* $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Ejemplo 238 $\int tg(t)dt = \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}dt = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + C = -\log|\cos(t)| + C$, *donde se ha hecho el cambio de variable* $u = \cos(t)$, $du = -\operatorname{sen}(t)dt$.

Ejemplo 239 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C$, *donde se ha hecho el cambio de variable* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$.

Ejemplo 240 *Supongamos que se quiere calcular la integral definida* $\int_1^3 \frac{\log(x)}{x}dx$. *Calculamos la primitiva por cambio de variable:*

$$\int \frac{\log(x)}{x} = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\log(x))^2}{2} + C,$$

donde $u = \log(x)$, $du = \frac{dx}{x}$. *Luego, evaluamos la primitiva:*

$$\int_1^3 \frac{\log(x)}{x} dx = \left(\frac{(\log(x))^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \frac{(\log(3))^2}{2}.$$

Sin embargo, lo anterior puede hacerse de otro modo, incluyendo los extremos en el cambio de variables. Con el mismo cambio:

$$\int_1^3 \frac{\log(x)}{x} dx = \int_0^{\log(3)} u du = \frac{(\log(3))^2}{2}.$$

Como la segunda integral es en la variable $u = \log(x)$, se transformaron los extremos 1 y 3 en $\log(1)$ y $\log(3)$ respectivamente.

Justifiquemos este paso con una proposición de carácter general.

Proposición 241 *Sean* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua,* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *con derivada continua y* $g([a, b]) \subseteq I$. *Entonces* $\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$.

Demostración. Si $F(x)$ es primitiva de f, ya se vio que $F(g(t))$ es primitiva de $f(g(t))g'(t)$. Entonces:

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

♠

Ejemplo 242 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$. *Si se pone* $x = \operatorname{sen}(t)$, *para* $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ *se tiene que* $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$. *Además* $dx = \cos(t)dt$, *de donde:*

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2.$$

En los Ejemplos 242 y 240, se calculó la integral sin obtener la primitiva de la función, sino evaluando la integral en la nueva variable. El Ejemplo 242 muestra, sin embargo, una diferencia respecto a los anteriores. En los anteriores se sabía integrar $f(x)$ y se utilizaba el cambio para integrar $f(g(t))g'(t)$. En el Ejercicio 242, es exactamente al revés.

Si se quiere utilizar este procedimiento para calcular la primitiva de $\sqrt{1-x^2}$ (no solo la integral definida), estamos en el caso en que se dispone de $F(g(t))$ y se busca $F(x)$. Hace falta componer con la función inversa $t = g^{-1}(x)$, para lo cual ésta debe existir (en los anteriores cálculos de primitiva, esto no hacía falta).

En este caso $x = \text{sen}(t)$ tiene inversa $t = \arcsin(x)$, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \in [-1, 1]$. Se tiene entonces:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2\arcsin(x)), x \in [-1, 1].$$

En los ejercicios se verán más ejemplos de cálculo de integrales por cambio de variable. Como se ve de los ejemplos, no existe un método para encontrar un cambio de variable adecuado. Recurrimos a la intuición (que se desarrolla con la práctica) y a algo de tanteo. Por otra parte, no siempre puede resolverse una integral por este camino. Veremos a continuación otro ejemplo importante.

4.6.3. Integración por partes

Proposición 243 *Sean f y g funciones con derivada continua. Entonces:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Demostración. Como $(fg)' = fg' + f'g$, entonces $\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) + C$.

♠

Corolario 244 $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

La demostración es inmediata a partir de evaluación de las primitivas.

Las identidades anteriores dan un método para calcular integrales, transformando la integral de fg' en la de $f'g$. Si se sabe calcular esta última, resulta conveniente la integración por partes.

Ejemplo 245 $\int xe^x dx$. *Como se conoce primitiva de e^x, es conveniente poner $g'(x) = e^x$ y $f(x) = x$. Tenemos*

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$$

Ejemplo 246 $\int x^2\text{sen}(x)dx = -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)dx$, *donde se ha integrado por partes tomando $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \text{sen}(x)$. No conocemos aún $\int x\cos(x)dx$, pero la reducimos por una nueva integración por partes:*

$$\int x\cos(x)dx = x\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)dx = x\text{sen}(x) + \cos(x) + C.$$

Sustituyendo, tenemos entonces que:

$$\int x^2\text{sen}(x)dx = (2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + C.$$

Ejemplo 247 $\int \log(x)dx$. *Aquí aparece una sola función en el integrando, pero siempre podemos escribir* $\log(x) = 1\log(x)$. *Aprovechando que* $\log(x)$ *tiene derivada sencilla, ponemos* $f(x) = \log(x)$ *y* $g'(x) = 1$. *Entonces* $\int \log(x)dx =$

$$\int 1\log(x)dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + C = (x-1)\log(x) + C.$$

4.6.4. Primitivas de Funciones Racionales

Veremos a continuación la resolución completa del problema de hallar la primitiva de una función racional, es decir para un cociente de polinomios $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Una primera observación es que basta resolver el caso en que $gr(P) < gr(Q)$ (el grado del numerador es menor que el del denominador). Esto se debe a que siempre puede realizarse la división entera de los polinomios $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, donde $R(x) = 0$ o $gr(R) < gr(Q)$, por lo que $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

El primer sumando es un polinomio y su primitiva se obtiene fácilmente (Ejemplo 233). El problema se reduce entonces al segundo sumando.

Un teorema de la teoría de polinomios, que enunciamos a continuación sin demostración, permite reducir el problema a la primitiva de fracciones más simples.

Teorema 34 (Descomposición en fracciones simples) *Todo cociente de polinomios* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *con* $gr(P) < gr(Q)$, *puede descomponerse de forma única en suma de cocientes más simples, correspondiendo a cada raíz de* $Q(x)$, *las siguientes fracciones:*

1. *Raíz real simple* $\alpha \Rightarrow \frac{A}{x-\alpha}$.
2. *Raíz real de multiplicidad* $k \Rightarrow \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$.
3. *Raíces complejas simples* $\alpha \pm i\beta \Rightarrow \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.
4. *Raíces complejas* $\alpha \pm i\beta$ *con multiplicidad* $k \Rightarrow \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$

Omitimos la demostración, que corresponde a cursos anteriores. El lector interesado puede verla en la Sección 23.6 de Kudriávtsev [6] o Sección 3.12 del libro de Courant y John [5].

Observación. Si el denominador $ax^2 + bx + c$ tiene raíces complejas $\alpha \pm i\beta$, entonces: $ax^2 + bx + c = a((x-\alpha)^2 + \beta^2)$ y se usa la fracción $\frac{M_1x+N_1}{a((x-\alpha)^2+\beta^2)}$.

Ejemplo 248 *Descomposición de* $\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}$. *Por el Teorema 34 sabemos que existen* A, B, B_2 *y* B_3 *tales que:*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}$$

Para hallar los coeficientes:

1. *Multiplicamos a ambos lados por $(x-1)$ y tomamos límite en $x=1$. Resulta $A=1/8$.*

2. *Multiplicamos por $(x+1)^3$, tomamos límite en $x=-1$. Resulta $B_3=-\frac{1}{2}$.*

3. *Multiplicamos por x, tomamos límite con $x\to\infty$, y se consigue que $A+B_1=0$, $B_1=-1/8$.*

4. *Evaluamos en $x=0\Rightarrow\ -1=-A+B_1+B_2+B_3\Rightarrow\ B_2=-1/4$.*

Nota 249 *Los pasos anteriores son convenientes para simplificar los cálculos, pero conviene observar que los coeficientes pueden hallarse evaluando en puntos y resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales o tomando denominador común e identificando los coeficientes del numerador.*

Del Teorema 34 surge, entonces, que basta con conocer las primitivas de las fracciones simples para resolver cualquier función racional. Las obtenemos:

(i) $\int\frac{dx}{x-\alpha}=\log|x-\alpha|+C$.

(ii) $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k}=-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+C$, $(k>1)$.

(iii) $\int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\frac{M(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx+\int\frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$, donde es posible resolver por separado ambas integrales. La primera vale:

$$\int\frac{M(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{M}{2}\int\frac{du}{u+\beta^2}=\frac{M}{2}\log(u+\beta^2)+C,$$

siendo $u=(x-\alpha)^2$, mientras que para la segunda integral:

$$\int\frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{M\alpha+N}{\beta}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{M\alpha+N}{\beta}\arctan(u)+C,$$

donde $u=\frac{x-\alpha}{\beta}$. A partir de esto, tenemos que:

$$\int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{M}{2}\log((x-\alpha)^2+\beta^2)+\frac{M\alpha+N}{\beta}\arctan(\frac{x-\alpha}{\beta})+C.$$

Observación. En la pareja conjugada $\alpha\pm i\beta$ de raíces complejas en la integral de arriba el signo de β que uno elige es indiferente, ya que los sumandos del término de la derecha son funciones pares con respecto a β (la función inversa de la tangente -$\arctan$- es impar, por serlo la tangente).

(iv) $\int \frac{Mx+N}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}dx = \int \frac{M(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}dx + (M\alpha+N)\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$.
Nuevamente calculamos por separado cada una de las dos últimas integrales. La primera es igual a

$$\begin{aligned}\frac{M}{2}\int \frac{du}{(u+\beta^2)^k} &= -\frac{M}{2}\frac{1}{(k-1)(u+\beta^2)^{k-1}} + C \\ &= -\frac{M}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} + C,\end{aligned}$$

mientras que la segunda integral es igual a:

$$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k}}\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2/\beta^2+1)^k} = \frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}\int \frac{du}{(u^2+1)^k}$$

La integración del último término puede resolverse en forma iterativa reduciendo el orden de k mediante una integración por partes. Esto se verá en el curso práctico.

Ejemplo 250 (Continuación) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} + C.$

Terminamos el tema con un ejemplo completo.

Ejemplo 251 $\int \frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x+1)^2(x-2)(x^2+1)}dx$. *El primer paso es aplicar el Teorema 34:*

$$\frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x+1)^2(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Multiplicando por $(x-2)$ *y tomando* $x \to 2$*:* $A = 2$.
Multiplicando por $(x+1)^2$ *y tomando* $x \to -1$*:* $C = -1$.
Multiplicando por x^2+1 *y tomando* $x \to i$*:*

$$\frac{7-2i+7-6i+2}{(i+1)^2(i-2)} = Mi + N.$$

Operando se obtiene $8-4i = (2M-N)+(-2N-M)i$*, de donde se deduce que* $M = 4$ *y* $N = 0$.
Multiplicamos por x*, y tomamos* $x \to \infty$*:* $7 = A + B + M$*, por lo que* $B = 1$.
Reuniendo la información:

$$\int \frac{7x^4+2x^3-7x^2-6x+2}{(x+1)^2(x-2)(x^2+1)}dx = 2\log|x-2| + \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + 2\log(x^2+1) + C.$$

Existen métodos para encontrar primitivas de funciones no racionales de algunos tipos particulares. En [6] se dan algunos casos.

Sin embargo, no existe un método general que permita obtener primitivas de las funciones elementales, como ya se adelantó. Por ejemplo, las primitivas $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ no pueden expresarse en términos de las funciones elementales (hecho que no probaremos aquí).

Señalamos que esto no quiere decir que las primitivas no existan. La siguiente función:

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \tag{4.5}$$

que por cierto es muy utilizada en probabilidades, es una primitiva de e^{-t^2}. Lo que ocurre es que $\varphi(x)$ no puede escribirse como una función elemental.

Para evaluar integrales en estos casos, debe recurrirse inevitablemente a aproximaciones numéricas.

4.7. Métodos numéricos de integración

En las secciones anteriores se buscó calcular integrales por métodos analíticos, que nos den el valor de la integral en términos de funciones conocidas. Como se señaló, esto no siempre es posible. Por otra parte, si se buscan valores numéricos, de todas formas habrá que calcular estas funciones (por ejemplo, un logaritmo) en términos aproximados.

Los métodos numéricos de integración (antiguamente llamados de “cuadratura”) proveen aproximaciones numéricas al valor $\int_a^b f(x)\, dx$, independientemente del carácter elemental o no de la primitiva. Por otra parte, un buen método debe permitir acotar el error metido en la aproximación. Estos métodos han sido potenciados por el advenimiento de las computadoras y corresponden a una rama de la matemática, el análisis numérico. No pretendemos aquí adentrarnos en ella, sino dar ejemplos introductorios de algunos de sus métodos.

En principio, cualquier suma de Riemann es una aproximación numérica a la integral, en la que se ha dividido el intervalo $[a, b]$ de acuerdo a una partición, y se aproxima la función en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por una constante $f(\overline{x_i})$. Este seríaa un primer método. Si la función f es suficientemente regular, es de esperarse que la aproximación mejore si se utiliza una recta adecuada, por ejemplo, en lugar de una constante. Esto conduce a los métodos que presentamos a continuación.

Consideremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_i = a + h \cdot i$, $h = \frac{b-a}{n}$ partición en n intervalos iguales.

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} I_i,\ con\ I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

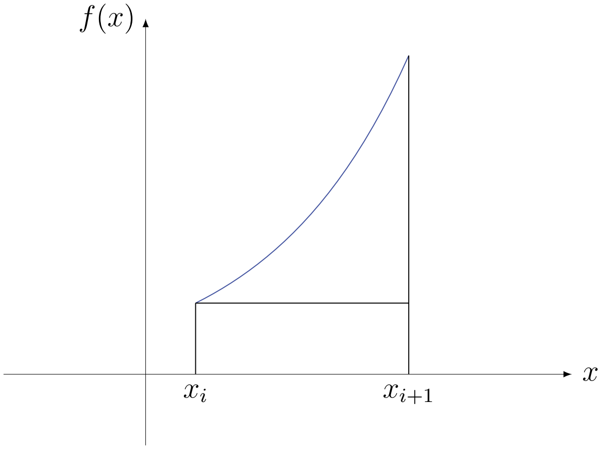
Notaremos f_i al valor $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. En cada método $I^{(n)}$ denotará la aproximación a la integral, con una partición de n intervalos. El error cometido es $I - I^{(n)}$.

4.7.1. Método de los rectángulos

Aproximamos I_i por $f(x_i)h$

$$\Rightarrow \ I^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h = h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$$

$I^{(n)}$ es una suma de Riemann (con $\overline{x}_i = x_i$) lo que asegura que $I^{(n)} \xrightarrow{n} I$



4.7.2. Método del trapecio

Aproximamos I_i por $\frac{f_i+f_{i+1}}{2}h$

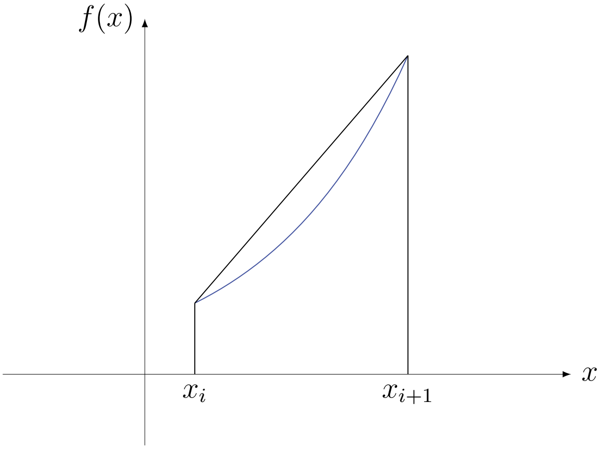
$$\Rightarrow I^{(n)} = \frac{h}{2}(f_0 + f_n) + h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1})$$

Es fácil ver que $I^{(n)} \xrightarrow{n} I$ (es el promedio de dos sumas de Riemann).

4.7.3. Método del punto medio o de la tangente

Aproximamos I_i por $f(\overline{x}_i)h$, con $\overline{x}_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.

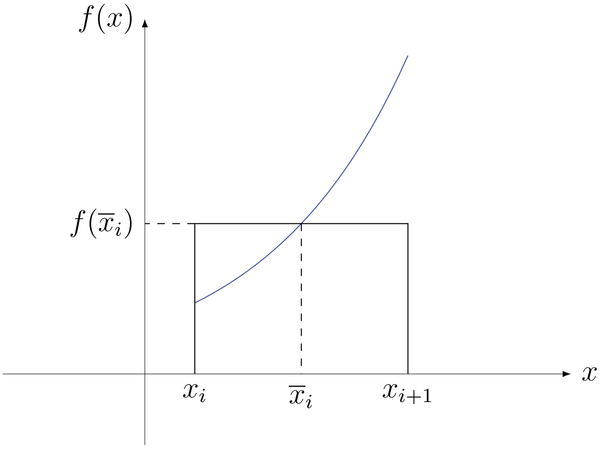
Esto equivale a tomar un rectángulo de altura $f(\overline{x}_i)$, o también un trapecio que se obtiene de la recta tangente en el punto medio (o cualquier otra recta en el punto



medio).

$$\Rightarrow I^{(n)} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)$$

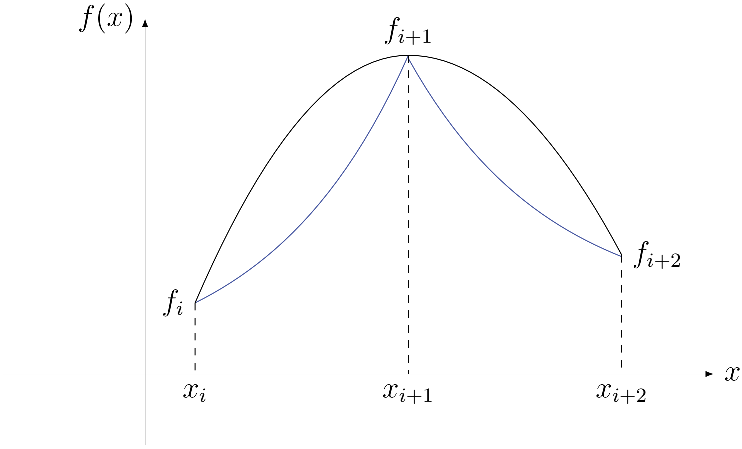
$I^{(n)} \xrightarrow{n} I$ por ser suma de Riemann.



4.7.4. Método de la parábola o regla de Simpson

Se toma $n = 2m$, y para i par, se aproxima $I_i + I_{i+1}$ por la integral de la parábola por los puntos $(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}), (x_{i+2}, f_{i+2})$.

Con algo de trabajo se encuentra que esta integral vale $\frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \Rightarrow I^{(n)} = \frac{h}{3}(f_0 + f_{2m}) + \frac{2h}{3}(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{4h}{3}(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1})$. Se verifica también $I^{(n)} \xrightarrow{n} I$. Este hecho nos da garantías de que asintóticamente, el método es



correcto. Pero, en la práctica se tiene un n limitado, y es útil saber medir lo cerca que se está del límite. Para eso se deben dar cotas para el error cometido. Esto solo es posible si se hacen hipótesis de regularidad sobre la función f, ya que de otro modo no hay garantías de que f se comporte de manera predecible en los puntos donde es evaluada.

Suponiendo que f tiene derivadas continuas hasta el orden k en $[a, b]$, se define:

$$M_k = \max\{|f^{(k)}(x)|, x \in [a, b]\}.$$

Se tienen las siguientes cotas para cada método, suponiendo en cada caso que f tiene las derivadas necesarias.

Método	**Cota de** $\lvert I - I^{(n)}\rvert$ **con** $h = (b - a)/n$
Rectángulo	$\frac{1}{2}M_1(b - a)h$
Trapecio	$\frac{M_2(b-a)}{12}h^2$
Tangente	$\frac{M_2(b-a)}{24}h^2$
Simpson	$\frac{M_4(b-a)}{180}h^4$

La prueba de las acotaciones se hace desarrollando a la función de Taylor en el intervalo, hasta el orden suficiente, y acotando la integral del resto.

La realizamos, a modo de ejemplo, en el caso del punto medio o tangente.

Proposición 252 *Sea f una función con derivada segunda continua en $[a, b]$. Entonces:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h \right| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)h^2,$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$.

Demostración. Sea $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$. Desarrollamos por Taylor a la función f entorno al punto $\overline{x_i} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, con el resto en la forma de Lagrange:

$$f(x) = f(\overline{x_i}) + f'(\overline{x_i})(x - \overline{x_i}) + \frac{f''(c)}{2}(x - \overline{x_i})^2,$$

siendo c un punto intermedio entre x_i y $\overline{x_i}$. Luego:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f(\overline{x_i})h + f'(\overline{x_i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \overline{x_i})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f''(c)}{2}(x - \overline{x_i})^2 dx$$

Como el segundo término es $f'(\overline{x_i}) \left.\frac{(x-\overline{x_i})^2}{2}\right|_{\overline{x_i}-\frac{h}{2}}^{\overline{x_i}+\frac{h}{2}} = 0$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} |I_i - f(\overline{x_i})h| &= \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f''(c)}{2}(x - \overline{x_i})^2 dx \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{f''(c)}{2} \right| (x - \overline{x_i})^2 dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \overline{x_i})^2 dx = \frac{M_2}{2} \int_{-h/2}^{h/2} u^2 du = \frac{M_2}{2} \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{M_2 h^3}{24}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})h \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |I_i - f(\overline{x_i})h| \leq \frac{M_2 h^3}{24} n = \frac{M_2 (b-a) h^2}{24}.$$

♠

Las acotaciones del error presentadas nos muerstran que el método más eficiente es el de Simpson, siempre que f tenga derivada cuarta, ya que el error es un infinitésimo de mayor orden en h. Si $h \to 0$ ($n \to +\infty$), el error en el método de Simpson será a la larga menor. Existen otros métodos (en los que no entraremos), que logran mayor eficiencia utilizando particiones no uniformes, adaptándose de acuerdo a la función.

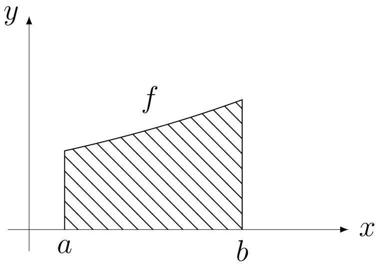
4.8. Aplicaciones de la integral definida

4.8.1. Áreas

Como la integral surgió del intento de calcular áreas, esta es una primera aplicacián natural.

Si $f(x) \geq 0$ es seccionalmente continua en $[a, b]$, definimos el área de la región de puntos del plano $\{(x, y) : \ 0 \leq y \leq f(x), \ x \in [a, b]\}$, como el número:

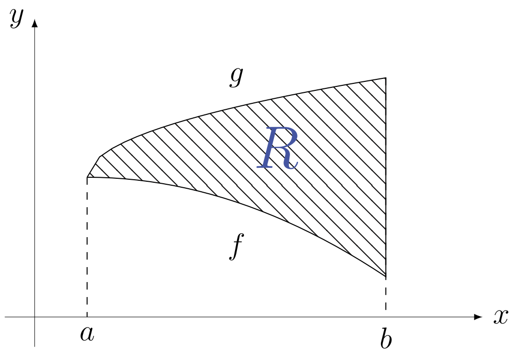
$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$



Si se quiere definir (y calcular) el área para una región R del tipo $R = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x),\ x \in [a, b]\}$, es natural tomar

$$A(R) = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

No nos dedicaremos aquí a extender la noción de área a conjuntos más complicados



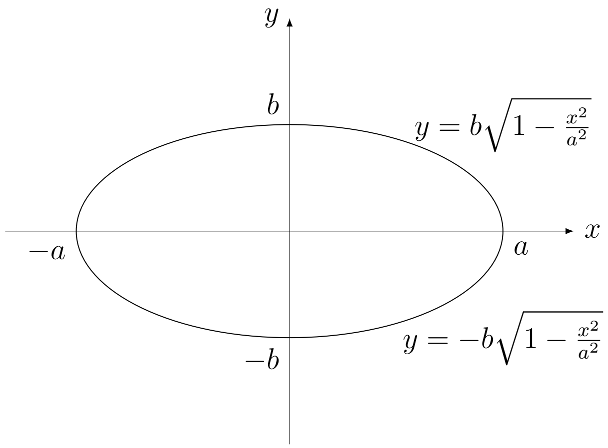
del plano. Se volverá sobre esto en el 2do. Curso.

Ejemplo 253 *área encerrada por la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$A = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx - \int_{-a}^{a} -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$\underset{u=\frac{x}{a}}{=} 2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - u^2}\,du = 2ab\frac{\pi}{2} = ab\pi$$

Observar que en el caso $a = b$ *(circunferencia de radio* a*), se obtiene la conocida fórmula* $A = a^2\pi$.

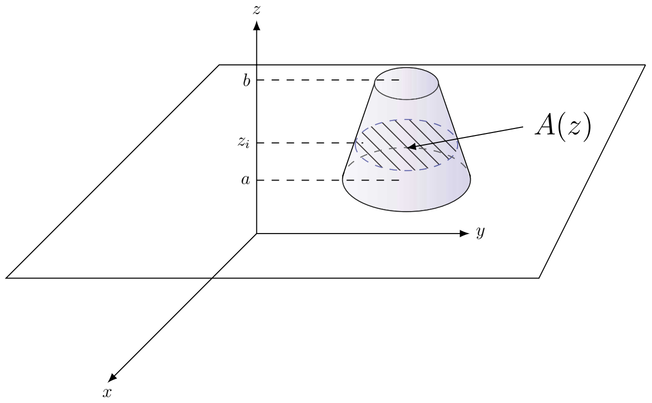


4.8.2. Volúmenes

Sea R un conjunto del espacio de tres dimensiones, que suponemos acotado. Buscamos una forma de calcular el volumen $V(R)$.

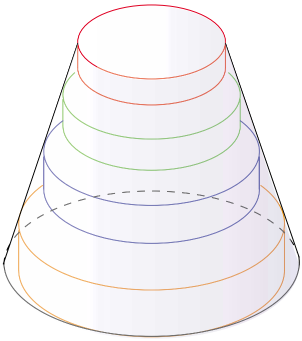
Una vez más, no hemos definido el volumen para tal conjunto. Este tema se retomará en el 2do. curso, pero veremos aquí un método plausible para calcular el volumen en algunos casos particulares, sin preocuparnos por formalizar.

Si R está acotado entre ls planos $z = a$ y $z = b$, suponemos que al cortar R con un plano de altura $z \in [a, b]$, se obtiene una región plana de área $A(z)$.



Consideremos una partición $P = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ de $[a, b]$, y aproximamos el volumen de la porción de R comprendida entre los planos $z = z_i$, $z = z_{i+1}$, por el volumen del cilindro de base $A(z_i)$ y altura $(z_{i+1} - z_i)$.

El volumen aproximado es $V_P = \sum_{i=0}^{n-1} A(z_i)(z_{i+1} - z_i)$. Si $A(z)$ es seccionalmente

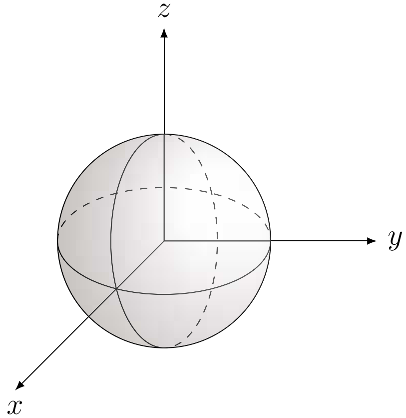


continua, $V_P \xrightarrow{|P|\to 0} \int_a^b A(z)\,dz$. Esto nos lleva a calcular el volumen como:

$$V = \int_a^b A(z)\,dz$$

Ejemplo 254 *[Volumen de la esfera]*
Tomamos como región R al conjunto de puntos $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Al cortar con un plano de altura z, se obtiene un círculo de radio $\sqrt{R^2 - z^2}$. Por lo tanto $A(z) = (R^2 - z^2)\pi$ con $z \in [-R, R]$.

$$V = \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\pi\,dz = \pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}R^3\pi$$



4.9. Volumen de sólidos de revolución

Calculamos el volumen del cuerpo engendrado girando una región del plano en torno a una recta.

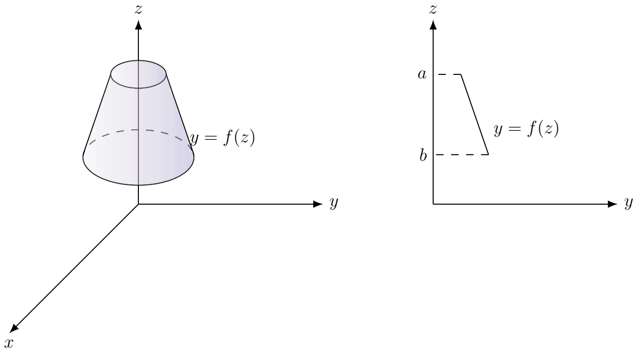
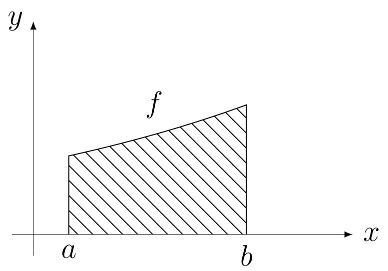


Figura 4.4: solido de revolucion

En la Figura 4.4, se ha girado la región comprendida entre el eje Oz y la función $y = f(z)$, ($z \in [a,b]$), en torno al eje Oz. Se tiene $A(z) = \pi f^2(z) \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(z)dz$.

Habitualmente se expresan las regiones al girar en el plano xy. El volumen engendrado por el área debajo de $y = f(x)$ al girar en torno a Ox es $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

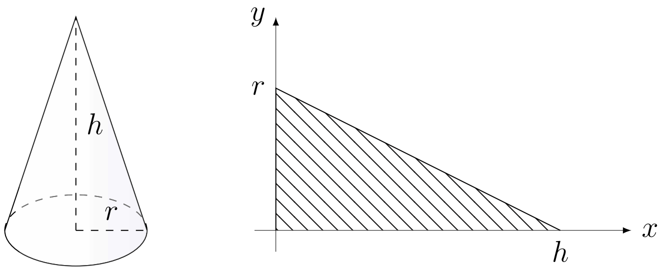


Ejemplo 255 *Volumen del cono recto de base circular (altura h, radio de la base r).*

Lo obtenemos girando la siguiente región en torno a Ox:

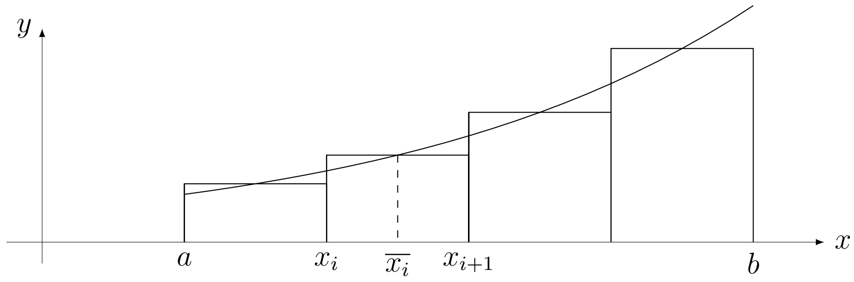
$$f(x) = \frac{-r}{h}(x-h)$$

$$\Rightarrow V_{ox} = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h (x-h)^2 \, dx = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

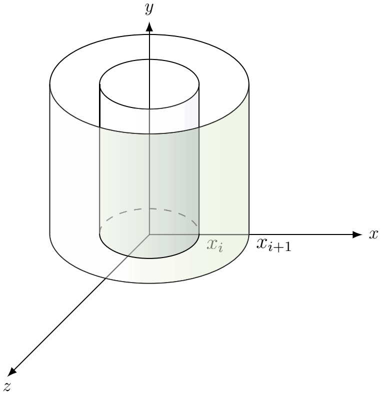


Ahora queremos girar la región debajo de la función $f(x)$ en torno a Oy (suponemos $a \geq 0$).

Consideramos una partición P en $[a, b]$. Para un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, aproximamos la región a girar por un rectángulo de altura $f(\overline{x_i})$, donde se tomó $\overline{x_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (punto medio).



El volumen V_i que se obtiene al girar ese rectángulo se puede calcular como la diferencia entre dos volúmenes cilíndricos, ambos de altura $f(\overline{x_i})$ y con radios $x_i,\ x_{i+1}$.



$$\Rightarrow V_i = \pi f(\overline{x_i})(x_{i+1}^2 - x_i^2)$$

$$\Rightarrow V_i = \pi f(\overline{x_i})(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) = 2\pi f(\overline{x_i})(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i)$$

La aproximación al volumen total es entonces:

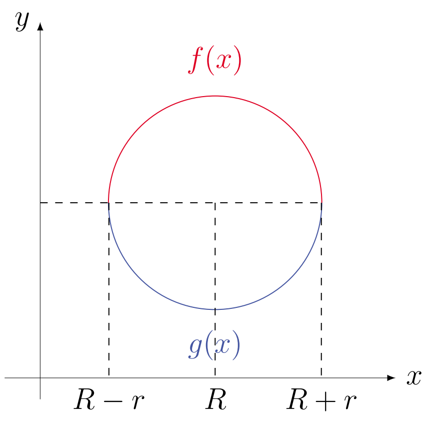
$$V_p = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \overline{x_i} f(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i)$$

Cuando $|P| \to 0$, la suma anterior tiende a:

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Ejemplo 256 (Volumen del toro)
Un toro es un cuerpo en forma de anillo que se obtiene girando una circunferencia en torno a un eje exterior. Por ejemplo la circunferencia $(x-R)^2 + (y-b)^2 = r^2$ en torno al eje Oy. ($r < R$).
Poniendo

$$f(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$$
$$g(x) = b - \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$$



$$V_{oy} = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x f(x) dx - 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x g(x) dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2 - (x-R)^2}\, dx$$

$$\underset{u=x-R}{=} 4\pi \int_{-r}^{r} (u+R)\sqrt{r^2-u^2}\, du = \underbrace{4\pi \int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}\, du}_{(I)} + \underbrace{4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-u^2}\, du}_{(II)}$$

(I) $\underset{\substack{v=r^2-u^2\\ dv=-2udu}}{=} 4\pi \int_0^0 \frac{-1}{2}\sqrt{v}dv = 0$

$$(II) = 4\pi Rr \int_{-r}^{r} \sqrt{1-\left(\frac{u}{r}\right)^2}\, du \underset{t=\frac{u}{r}}{=} 4\pi Rr^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt}_{=\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 Rr^2$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2$$

4.10. Integrales impropias

En diversas aplicaciones es necesario integrar funciones en intervalo del tipo $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, o $(-\infty,+\infty)$. Esto nos conducirá a introducir las integrales impropias de primera especie. También es posible que nos interesa integrar sobre un intervalo acotado, una función que no es seccionalmente continua (por ejemplo, que tiene una discontinuidad infinita); esto nos llevará a las integrales impropias de segunda especie.

4.10.1. Integrales impropias de primera especie

Supongamos que f es continua en $[a,+\infty)$. Queremos definir $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Un camino es integrar en el intervalo $[a,x]$, obtener $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y luego tomar el límite para $x \to +\infty$. Llegamos a la definición:

Definición 257 *Sea f continua en $[a,+\infty)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

1. *Si existe $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$ finito, decimos que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge y escribimos $\int_a^{+\infty} f(t)dt = L$.*

2. *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ es infinito, decimos que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.*

3. *Si no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, decimos que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ oscila.*

Existe una fuerte analogía de la definición anterior con las correspondientes para series. De hecho, el procedimiento para estudiar $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ es sumar hasta un cierto m, $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$, y estudiar el límite de s_m con $m \to +\infty$.

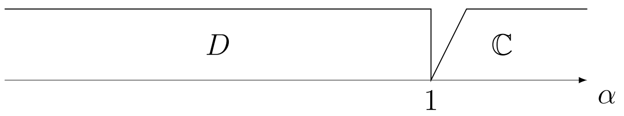
Esta analogía se explotará en lo que sigue. Al igual que en las series, el primer problema a abordar con una integral impropia es clasificarla en uno de los tres tipos.

Ejemplo 258 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right)\Big|_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right) & si\ \alpha \neq 1 \\ (\log(t))\Big|_1^x = \log(x) & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & si\ \alpha > 1 \\ +\infty & si\ \alpha < 1 \\ +\infty & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *converge* $\Leftrightarrow\ \alpha > 1$.



En el caso de convergencia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}$. *Comparar con la serie* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Ejemplo 259 $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ *oscila, ya que* $\int_0^x \cos(t)dt = \operatorname{sen}(x)$, *no tiene lḿite para* $x \to +\infty$

Si f es continua en $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$ el estudio se extiende de manera natural:

a) $\int_{-\infty}^b f(t)dt$. Se trata de forma análoga estudiando $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, donde $F(x) = \int_x^b f(t)dt$. Con el cambio $u = -t$ se reduce a $\int_{-b}^{+\infty} f(-u)du$, por lo que la teoría es aplicable.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Elegimos $a \in \mathbb{R}$ y estudiamos las impropias $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ y $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Definición 260 *Decimos que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *converge si* $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ *y* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *convergen, y en ese caso* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$

Queda como ejercicio verificar que la definición no depende de la elección de a.

Ejemplo 261 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left(\arctan(t)\right)\Big|_0^{+\infty} = 2(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi$.

Nota 262 *Si* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *converge, entonces* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. *Pero este límite puede existir aunque la integral impropia no sea convergente según la definición anterior. Por ejemplo* $\int_{-x}^x t\ dt = 0 \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, *pero* $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt$ *no converge. Se dice en este caso que la integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt$ tiene valor principal 0.

La analogía con las series hace pensar en extender las propiedades. Veamos algunas:

Proposición 263 (Linealidad) *Si* $\int_a^{+\infty} f(t)dt,\ \int_a^{+\infty} g(t)dt$ *convergen.*

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} (\alpha f(t)dt + \beta g(t))\, dt \text{ converge y vale } \alpha \int_a^{+\infty} f(t)dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\, dt$$

Proposición 264 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *y* $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ *son de la misma clase. (*f *continua en una semirrecta* $[c, +\infty)$ *con* $a \geq c$*,* $b \geq c$*).*

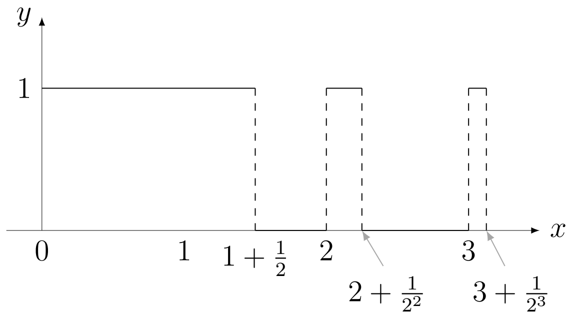
La demostración es sencilla y queda como ejercicio.

En el caso de las series, teníamos una condición necesaria de convergencia: $\sum a_n\, \mathbb{C} \Rightarrow a_n \overset{n}{\to} 0$. ¿ Será cierto que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$? El siguiente ejemplo prueba lo contrario.

Ejemplo 265

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [n, n + \frac{1}{2^n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

f *es seccionalmente continua en* $[0, x]$*,* $\forall\, x$*. Sea* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$*. Es claro que* F *es*

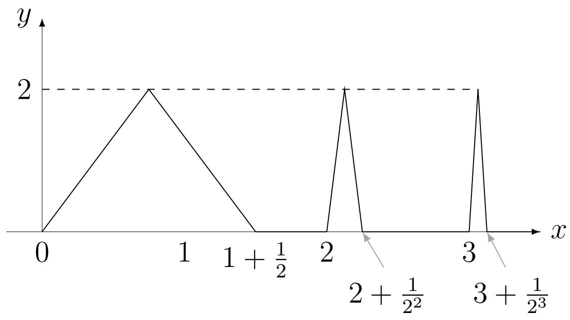


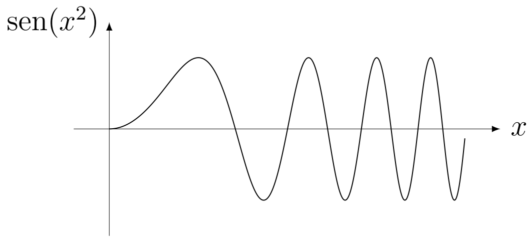
creciente. Además $F(n) = \int_0^n f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n\to+\infty} 2$*. Se concluye finalmente que* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2 = \int_0^{+\infty} f(t)dt$*. La integral impropia converge pero* f *no tiene límite con* $t \to +\infty$

Nota 266 *Si se quiere un ejemplo con* f *continua, se lo puede obtener con una ligera modificación en el anterior, por ejemplo utilizando triángulos de altura* 2 *y base* $\frac{1}{2^n}$*.*

Otro ejemplo, con apariencia menos "artificial", es la integral impropia de Fresnel $\int_0^{+\infty} \mathrm{sen}(t^2)dt$, con aplicaciones en óptica). Es claro que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{sen}(t^2)$ no existe. Probaremos más adelante que la integral impropia converge. En los ejemplos anteriores no existe el límite de $f(t)$ con $t \to \infty$. En caso de existir el límite es necesario que valga 0.

Ejercicio 267 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge,* $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = L$*. Probar que* $L = 0$*.*





4.10.2. Caso integrando no negativo

Al igual que en las series, un caso particular en que la clasificación es más simple es el caso $f(t) \geq 0$.

Proposición 268 *$f(t) \geq 0$ en $[a, +\infty)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, definida $\forall\ x > a$. Entonces F es creciente y por tanto: $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow$ F es acotada superiormente.*

Demostración.
Si $y > x \Rightarrow\ F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0 \Rightarrow\ F$ creciente.
Si F no es acotada superiormente, se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$
Si F es acotada superiormente, sea $\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} F(x) = L$. Se prueba fácilmente que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$

♠

Corolario 269 (Criterio de comparación) $0 \leq f(t) \leq g(t), \forall\ t > a$. *Entonces:*

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt\ C \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt\ C$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt\ D \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt\ D$$

Demostración.
Sean $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Se cumple que $F(x) \leq G(x) \; \forall \; x > a$, y ambas son crecientes. Por lo tanto:

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(t)dt \; C \Rightarrow G \text{ es acotada} \Rightarrow F \text{ es acotada} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \; C$$

El otro caso es análogo.

♠

Ejemplo 270 *$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt, \;\; n \geq 0$. Buscamos una comparación con otra integral impropia conocida, por ejemplo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$.*
Para todo α, se cumple que existe $t_0 \in \mathbb{R}$: $t^n e^{-t} < \frac{1}{t^\alpha} \; \forall \; t \geq t_0$. Esto se debe a que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{n+\alpha}e^{-t} = 0$. Poniendo $\alpha = 2$, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \; C \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^n e^{-t}dt \; C \Rightarrow \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt \; C$.

Si $n < 0$ se debería estudiar qué sucede con la integral de 2da especie (ver más adelante).

Corolario 271 $f(t) \geq 0, \; g(t) \geq 0, \; \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L > 0$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \;\; y \;\; \int_a^{+\infty} g(t)dt \;\; \textit{son de la misma clase.}$$

Demostración.
$\forall \; t > t_0$, $\frac{L}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3L}{2}$

$$\Rightarrow \frac{L}{2}g(t) \underset{(I)}{\leq} f(t) \underset{(II)}{\leq} \frac{3L}{2}g(t)$$

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt \; C \Rightarrow \; \int_a^{+\infty} f(t)dt \; C$ por (II)

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt \; D \Rightarrow \; \int_a^{+\infty} f(t)dt \; D$ por (I)

♠

Ejemplo 272 *$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}dt$ diverge, porque $\frac{t}{\sqrt{t^4+1}} \simeq \frac{1}{t}$ cuando $t \to +\infty$.*

Ejemplo 273 *$\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 - \frac{1}{t}\right) dt$ converge, ya que $\left(e^{\frac{1}{t}} - 1 - \frac{1}{t}\right) \simeq \frac{1}{2t^2}$ $(t \to +\infty)$*

4.10.3. Criterio integral para series

La analogía entre la teoría de integrales impropias y la de series, y en particular el ejemplo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ que se comporta exactamente como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, hace pensar en que se podría explotar esto para clasificar series a través de integrales impropias o viceversa.

Más precisamente, si f es una función en $[1, +\infty)$, y $a_n = f(n)$ sus valores en los naturales. ¿Es cierto que $\sum a_n$ e $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ son de la misma clase?

A primera vista la respuesta sería negativa ya que los valores $f(n)$ no determinan el comportamiento de f en $(n, n+1)$.

Si f es monótona, los valores intermedios están, sin embargo, controlados, y la conjetura es válida.

Teorema 35 (Criterio integral)
Sea $f(t) \geq 0$ monótona decreciente en $[k, +\infty)$ y sea $a_n = f(n), n \geq k$, donde $k, n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad y \quad \int_k^{+\infty} f(t)dt \ \textit{ son de la misma clase.}$$

Demostración.
Como f es decreciente se tiene $\forall\, t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i \underset{(I)}{\leq} \int_k^{n+1} f(t)dt \underset{(II)}{\leq} \sum_{i=k}^{n} a_i$$

Sea $F(x) = \int_k^x f(t)dt$.

- Si $\sum_k^{+\infty} a_n\ C \underset{(II)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1)$ es finito $\Rightarrow \int_k^{+\infty} f(t)dt\ C$
- Si $\sum_k^{+\infty} a_n\ D \underset{(I)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = +\infty \Rightarrow \int_k^{+\infty} f(t)dt\ D$

♠

Ejemplo 274 *Clasificar $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}$.*

$f(t) = \frac{1}{t\log(t)}$ es no negativa y decreciente. Entonces $F(t) =$

$$= \int_2^x \frac{1}{t\log(t)} dt \underset{u=\log(t)}{=} \int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{1}{u} du = (\log(u)) \Big|_{\log(2)}^{\log(x)} = \log(\log(x)) - \log(\log(2))$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \Rightarrow \sum_2^{+\infty} \frac{1}{t\log(t)} dt\ D \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}\ D$$

El ejemplo muestra la ventaja de clasificar la integral impropia: si se encuentra primitiva, esto es más sencillo que en el caso de series, donde no es fácil calcular la reducida.

4.10.4. Integrando con signo cualquiera

Para el caso en que $f(t) \leq 0 \, \forall \, t \geq t_0$, los resultados son análogos al caso $f(t) \geq 0$. Si $f(t)$ toma ambos signos para valores de t arbitrariamente grandes, los métodos anteriores (comparación, sustitución por equivalentes) no pueden aplicarse. Se introduce aquí, igual que para series, la convergencia absoluta.

Definición 275 *La integral impropia* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *es absolutamente convergente* $(\mathbb{A}.\mathbb{C}.)$ $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} |f(t)|dt \; C$.

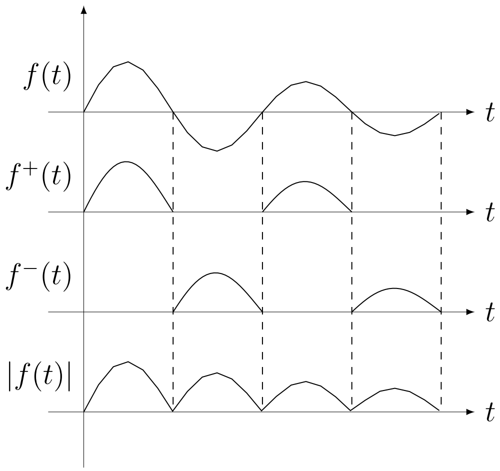
Teorema 36

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \; es \; \mathbb{A}.\mathbb{C}. \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \; C$$

Demostración.
Análogamente al caso de series, introducimos las funciones no negativas f^+ y f^-:

$$f^+(t) = \begin{cases} f(t) & si \; f(t) \geq 0 \\ 0 & si \; f(t) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(t) = \begin{cases} 0 & si \; f(t) \geq 0 \\ -f(t) & si \; f(t) < 0 \end{cases}$$



Se cumple que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$; y $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$.

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|dt \underset{comparacion}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \int_a^{+\infty} f^+(t)dt \; C \\ \\ \int_a^{+\infty} f^-(t)dt \; C \end{array} \right\} \underset{linealidad}{\Longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(t)dt \; C.$$

♠

Ejemplo 276 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}dt$ *es* $\mathbb{A}.\mathbb{C}.$ *ya que* $\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

Ejemplo 277 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$
Si estudiamos convergencia absoluta, la cota más sencilla de $\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right|$ *es* $\frac{1}{t}$*, que no sirve para comparar porque* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ *diverge.*

Una integración por partes permite resolver el problema. La fórmula

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = (f(t)g(t))\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

puede extenderse a:

$$\int_a^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt = (f(t)g(t))\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt$$

$\Big($*donde* $((f(t)g(t))\Big|_a^{+\infty}$ *denota* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)g(t) - f(a)g(a)\Big)$*, siempre que los límites para* $b \to +\infty$ *existan.*

En este caso $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt = \left(\frac{-\cos(t)}{t}\right)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$

La segunda integral converge absolutamente, y el primer término converge porque $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\cos(t)}{t} = 0.$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt\ C.$$

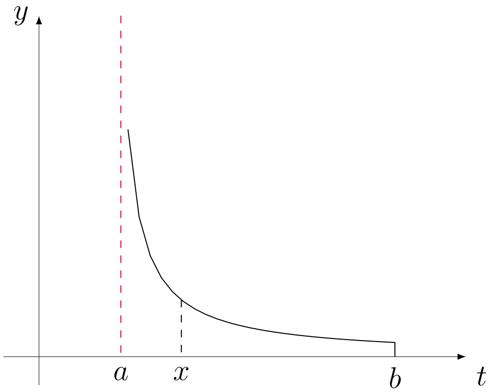
Ejemplo 278 *Clasificamos la integral de Fresnel* $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)dt$*, con una integración por partes.*

Para $t > 0$*, escribimos* $\operatorname{sen}(t^2) = \underbrace{2t\sin(t^2)}_{g'(t)}\underbrace{\frac{1}{2t}}_{f(t)}$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)dt = \left(-\frac{\cos(t^2)}{2t}\right)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}dt$$

Los dos términos convergen en forma similar al Ejemplo 277

Ejercicio 279 *Probar que* $\int_0^{+\infty} t\cos(t^4)dt$ *converge. Este es ejemplo de integral impropia convergente en que la función no está acotada en* $[0, +\infty)$



4.10.5. Integrales impropias de segunda especie

Supongamos que f es continua en $(a, b]$, pero $\lim_{t\to a^+} f(t)$ no existe o no es finito. Para definir $\int_a^b f(t)dt$, estudiamos $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$.

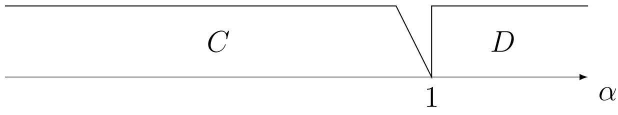
Definición 280 *f continua en $(a, b]$, $F(x) = \int_x^b f(t)dt$.*

$$\textit{Si } \lim_{x\to a^+} F(x) \left\{ \begin{array}{ll} = & L \textit{ finito} \\ = & \infty \\ \nexists & \end{array} \right\} \textit{ se dice que } \int_a^b f(t)dt \left\{ \begin{array}{l} C \\ D \\ \textit{oscila} \end{array} \right.$$

En el caso de convergencia, se denota $\int_a^b f(t)dt = L$.
La definición es análoga para f continua en $[a, b)$, considerando $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Ejemplo 281 $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$. $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) & si\ \alpha \neq 1 \\ -\log(x) & si\ \alpha = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & si\ \alpha < 1 \\ +\infty & si\ \alpha > 1 \\ +\infty & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt\ C \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Ejemplo 282 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

4.10.6. Cambios de variable

Es posible reducir una integral de segunda especie a una de primera especie utilizando un cambio de variable.

Supongamos que $\int_a^b f(t)dt$ es impropia en el punto a. Buscamos una nueva variable u tal que cuando $t \to a^+ \Rightarrow u \to +\infty$. Una posibilidad es el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{t-a} \\ t = a + \frac{1}{u}, \quad dt = -\frac{1}{u^2}du \end{cases}$$

Sea $x > a$:

$$\int_x^b f(t)dt = \int_{\frac{1}{x-a}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{-1}{u^2}du = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{x-a}} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}du$$

$$\xrightarrow{x \to a^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}du$$

Reducimos el problema a una integral de primera especie. Habitualmente, los pasos intermedios se omiten y se escribe directamente el cambio:

$$\int_a^b f(t)dt \underset{\substack{t=a+\frac{1}{u} \\ dt=-\frac{1}{u^2}du}}{=} \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}du$$

Ejemplo 283

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{sen}(t)}dt \underset{\substack{t=\frac{1}{u} \\ dt=-\frac{1}{u^2}du}}{=} \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{1}{u^2}du$$

diverge, ya que $\frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{1}{u^2} \sim \frac{1}{u}$ *cuando* $u \to +\infty$*, y el integrando es no negativo para* $u > \frac{2}{\pi}$.

Ejemplo 284 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$*. Aquí el problema es en* $t = 1^-$*. Elegimos el cambio*

$$\begin{cases} u = \frac{1}{1-t} \\ t = 1 - \frac{1}{u}, \quad dt = \frac{1}{u^2}du \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \underset{\substack{t=1-\frac{1}{u} \\ dt=\frac{1}{u^2}du}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{u}\right)^2}} \frac{1}{u^2}du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}}} \frac{1}{u^2}du$$

converge, ya que $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}}} \frac{1}{u^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2}u^{\frac{3}{2}}}$ *con* $u \to +\infty$*. Se reencuentra el resultado del Ejemplo 282*

En los ejemplos anteriores, se realizó el cambio de variable, y luego se clasificó la integral de la primera especie por equivalentes.

De hecho, se puede clasificar tomando equivalentes (o aplicando comparación) en la integral de segunda especie si esta es de integrando de signo constante (caso habitual). En el Ejemplo 283, $\frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sim \frac{1}{t}$ $(t \to 0)$, y la clasificación se reduce al Ejemplo 281.

Escribamos los criterios, cuya demostración es análoga al caso de primera especie. Supongamos que $\int_a^b f(t)dt$ y $\int_a^b g(t)dt$ son impropias en el punto a.

Propiedad 285 *Si* $0 \leq f(t) \leq g(t)$ *en* $(a, a+\delta)$

- *Si* $\int_a^b g(t)dt\ C \Rightarrow \int_a^b f(t)dt\ C$

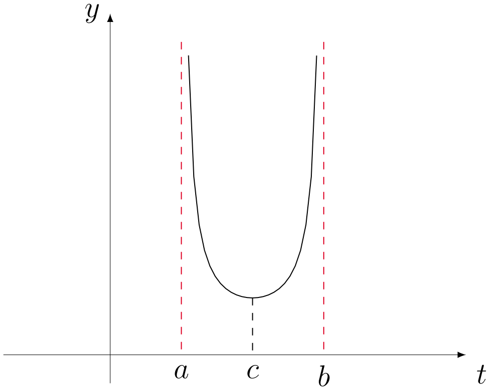
- *Si* $\int_a^b f(t)dt\ D \Rightarrow \int_a^b g(t)dt\ D$

Propiedad 286 $0 \leq f(t)$, $0 \leq g(t)$ *en* $(a, a+\delta)$, $f(t) \sim g(t)$ *con* $t \to a^+$ *entonces* $\int_a^b f(t)dt$ *y* $\int_a^b g(t)dt$ *son de la misma clase.*

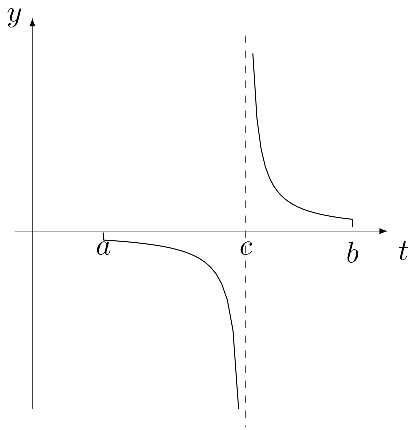
Para integrales impropias en b^-, los enunciados son análogos.

Existen otros casos de integrales de segunda especie.

- $\int_a^b f(t)dt$ para f continua en (a, b), con discontinuidad infinita en ambos puntos. Para que converja, exigimos que $\int_a^c f(t)dt$ y $\int_c^b f(t)dt$ converjan para $a < c < b$.



- f continua en $[a, c) \cup\ (c, b]$, y con discontinuidad infinita en c. Nuevamente, para que converja, exigimos que $\int_a^c f(t)dt$ y $\int_c^b f(t)dt$ converjan.



- **Tipos mixtos:** $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, donde f continua en $(a, +\infty)$ con discontinuidad infinita en a. Se elige $b \in (a, +\infty)$ y se exige la convergencia de $\int_a^b f(t)dt$ y $\int_b^{+\infty} f(t)dt$.

Ejemplo 287 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *diverge* $\forall\ \alpha$ *porque no existe* α *para el cual converjan simultáneamente* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ *y* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *como se ven en los Ejemplos 258 y 281.*

Ejemplo 288 (Función Gamma) *Definimos* $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, $\alpha > 0$.

Veamos en primer lugar que es convergente. Tenemos:
• $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ *converge ya que para* $t \to 0^+ \Rightarrow t^{\alpha-1}e^{-t} > 0$ *y* $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, $1 - \alpha < 1$, *y:*
• $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ *converge por comparación.*

Una propiedad interesante de la función Γ *es que* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. *La probamos integrando por partes.*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t}\right)\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$$

porque el primer sumando es nulo.

Observando que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, *deducimos que* $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6$, *y en general por inducción que* $\Gamma(n+1) = n$

La función $\Gamma(1+x)$ *es una función de variable real, que restringida a los naturales coincide con el factorial de* x.

Bibliografía

[1] L.V. Ahlfors. *Análisis de variable compleja: introducción a la teoría de funciones analíticas de una variable compleja*.

[2] T.M. Apostol. *Análisis Matemático*. Reverté, 1976.

[3] T.M. Apostol. *Calculus (en 2 volúmenes), Vol 1*. álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Reverté, 1996.

[4] R. Courant. *Differential and Integral Calculus*. Wiley Classics Library. Wiley, 1988.

[5] R. Courant and F. John. *Introducción al cálculo y al análisis matemático (en dos volúmenes), Vol 1*.

[6] L.D. Kudriávtsev. *Curso de análisis matemático (en dos tomos), tomo 1*.