Matemática 1
Primer Parcial

CURE

21 de Mayo de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [6 pts.]

Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $inf(A) = 0$, $sup(A) = \sqrt{2}$ y $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Indicar, en cada caso, justificando si la proposición es verdadera, falsa o los datos son insuficientes para contestar.

1. $m\acute{i}n(A) = 0$
2. $m\acute{a}x(A) = \sqrt{2}$
3. $A \subset (0, \sqrt{2})$ y $A \neq (0, \sqrt{2})$
4. $\frac{\sqrt{2}}{2} \in A$
5. $\exists x_0 \in A$ tal que $x_0 > 1,41$
6. $(0, \sqrt{2}) \subset A$

Problema 2 [18 pts.]

(a) [5 pts.] Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{2x-2}$ y el intervalo $I = [0, \frac{1}{2}]$. Pruebe que la ecuación $g(x) - x = 0$ tiene una única raíz en el intervalo I.

(b) [5 pts.]Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ entonces f tiene a lo sumo una raíz.

(c) [8 pts.] Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta.

i) Si una función derivable es estrictamente decreciente en un intervalo, entonces su derivada es negativa en ese intervalo.

ii) Si una función f presenta un máximo relativo en un punto a, entonces $f'(a) = 0$

Problema 3 [16 pts.]

Sean dos reales a y b y la función $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} Arctan(x) - x + 3a - Arctan(2) & \text{si } x \leq 2 \\ ax + b + ln\left|\dfrac{x-5}{2x-1}\right| & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

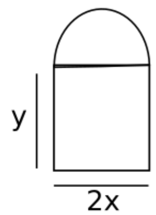
(a) [5 pts.] ¿Qué relación deben cumplir a y b para que f sea continua en $x = 2$?

(b) [5 pts.] Sabiendo que f es continua en $x = 2$, halle a y b para que la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$ sea paralela a la recta de ecuación $y = ax + b$

(c) [6 pts.] Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)}$

Problema 4 [10 pts.]

(a) [10 pts.] Una ventana como la de la **figura**, esta formada por un rectángulo de lado $2x$ e y, terminada en su lado superior por un semicirculo(el diámetro es $2x$). El perímetro de la ventana es de $8m$. Hallar el valor de $x + y$ para que la ventana tenga área máxima.



Datos utiles: perímetro de una cfa = $diámetro * \pi$, área de una cfa = $radio^2 * \pi$

Solución

Problema 1

1. **Falso** . Si fuera cierto $min(A) = 0 \to 0 \in \mathbb{Q}$,$A \cap \mathbb{Q} = \emptyset \to 0 \notin A$ (A no tiene min).
2. **Datos insuficientes** . No se sabe si $\sqrt{2} \in A$. Dado que el $sup(A) = \sqrt{2} \to \sqrt{2}$ menor de las cotas superiores. Si $\sqrt{2} \in A \to \sqrt{2} = max(A)$.
3. **Datos insuficientes**. Dado $1 \in (0, \sqrt{2}), 1 \in \mathbb{Q}$,A $\cap \mathbb{Q} = \emptyset \to 1 \notin A \to A \neq (0, \sqrt{2})$
   Si $\sqrt{2} \in A, \sqrt{2} \neq (0, \sqrt{2}), \to A \not\subset (0, \sqrt{2})$
4. **Datos insuficientes**. Si $A = (0, 1/3) \cup (1, \sqrt{2}) \to \frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$.
   Si $A = (0, \sqrt{2}) \to \frac{\sqrt{2}}{2} \in A$
5. **Verdadero** .
6. **Falso** . Si $1 \in (0, \sqrt{2}), 1 \in Q, A \cap \mathbb{Q} = \emptyset, \to 1 \notin A$

Problema 2

(a) Tomando $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}/f(x) = g(x) - x$. f(x) es continua en [0,1/2], dado que es suma de funciones continuas.
Como $f(0) > 0$ y $f(1/2) < 0 \to$ f tiene al menos una raíz en [0, 1/2].
Unicidad: f es derivable en [0, 1/2](suma de funciones derivables).
$f^{'} : I \to \mathbb{R}$ / $f^{'} := 2e^{2x-2} - 1 = 0 \to f$ es estrictamente decreciente en I.
Como f tiene al menos una raíz α en I y f estrictamente decreciente en I $\to \alpha$ es único.
Sea $\alpha \in I$, / $f(\alpha) = 0$. Tomo un $\beta \in I$y $f(\beta) = 0$, $\beta < \alpha$.
Como f es estrictamente decreciente en I $\to$ $(\beta < \alpha)$ $f(\beta) < f(\alpha) = 0$, **absurdo** , $f(\beta) = 0$. Para el caso donde $\beta > \alpha$ es análogo. Por lo tanto α es única.

(b) Si $f^{'}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \to f$ tiene como mucho una raíz.
Si $f^{'}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, f$ es estrictamente creciente $\to$, si $\exists \alpha \in \mathbb{R}/f(\alpha) = 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R}, x < \alpha$ se tiene $f(x) < f(\alpha) = 0$. De forma análogo se tiene $f(x) > f(\alpha) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, x > \alpha$. Por lo tanto, f admite como mucho 1 raíz.

(c) c.i) **Falso** . Contraejemplo: $f(x) = -x^3$ f estrictamente decreciente, $f^{'}(x) < 0 \forall x \neq 0$
c.ii) **Falso** . Contraejemplo: $f(x) = -|x|$.
f presenta en $x = 0$ un max relativo y $\nexists f^{'}(0)$

Problema 3

(a) $\lim_{x\to 2^-} Arctan(x) - x + 3a - Arctan(2) = \lim_{x\to 2^+} ax + b + ln\left|\dfrac{x-5}{2x-1}\right|$.
Por lo tanto: $a - b = 2$

(b) El dato de la recta tangente al gráfico en (1,f(1)) nos dice que la recta es de la forma: $y_1(x) = f^{'}(x)(x-1) - f(1)$. $f(x) = Arctan(x) - x + 3a - Arctan(2)$ ya que $x \leq 2$. Como y_1 tiene que ser paralela a $y_2(x) = ax + b$ por la tanto la pendiente debe ser la misma. Usando esto y la relación de la parte a) se obtienen los valores de a y b.

(c) Realizando 3 iteraciones del teo. de L'hopital, se llega a que el limite converge a 2.

Problema 4

(a) Usando el dato que el perímetro de la ventana es de $8m$, escribo la ecuación(1): $8 = 2x + 2y + x\pi$. Como me pide el área máxima, hay que maximizar el área de la ventana, la ecuación(2): $2xy + \frac{\pi}{2}x^2$ Despejo $2y$ de la ecuación (1), y sustituyo en la ecuación (2). Ahora la ecuacion (2) esta en una variable, para maximizar, hago la derivada primera y hallo los ceros de esta. Estudio el signo para observar donde se encuentra el valor de x que maximiza la expresión del área. Luego con este valor de x, busco el valor de y usando la ecuación (1) y obtengo el valor de y que hace que el área sea maxíma. El resultado es la suma de x+y.