Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2022

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

9 de mayo de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- El único material que se puede utilizar durante la prueba es la hoja de fórmulas que debe estar impresa.

Problema 1 [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO.

(b) Explique cómo se puede determinar la estabilidad y la causalidad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo a partir de:

   I) su respuesta al impulso $h[n]$;

   II) su función de transferencia $H(z)$.

El sistema S es lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. La expresión de la transformada Z de $h[n]$ es

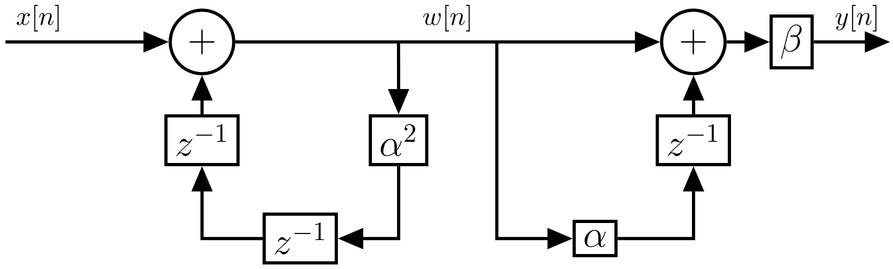
$$H(z) = \frac{5(z^{-1} - 1)}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

(c) Muestre las posibles regiones de convergencia (RoC) de $H(z)$ justificando cuál/es corresponde/n a un sistema estable y cuál/es corresponde/n a un sistema causal (puede ser útil realizar un diagrama de polos y ceros en el plano complejo).

(d) Asumiendo que el sistema es estable, halle la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

Problema 2 [20 pts.]

Los ómnibus de Rutas del Sol están equipados con un sistema GNSS (mal llamado GPS) que reporta constantemente la posición y la velocidad a la que se mueven. Se quiere diseñar un sistema para que cuando la velocidad supera los 120 km/h envíe una advertencia al chofer y a la empresa. La velocidad que reportan los dispositivos (receptores de posición satelital) puede contener datos erróneos (con ruido) por lo cual se decide filtrarlos con el sistema lineal e invariante en el tiempo cuyo diagrama de bloques se muestra en la siguiente figura:



(a) Considerando que el sistema se encuentra inicialmente en reposo (condiciones iniciales nulas), explique por qué podemos asumir que el sistema es causal.

Sugerencia: puede ser útil imaginarse la situación en la que queremos calcular la respuesta al impulso (paso a paso) para luego analizarla.

Nota: esta pregunta es teórica, no implica realizar ningún cálculo.

(b) Muestre que la función de transferencia $H(z)$ del sistema descripto por el diagrama de bloques tiene la siguiente expresión:

$$H(z) = \frac{\beta}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Encuentre y justifique su región de convergencia.

(c) Realizar un diagrama de polos y ceros junto con la ROC de la transferencia. Estudiar estabilidad en función de los parámetros α y β. Justifique.

(d) Encontrar α y β para que la respuesta en frecuencia, en continua ($\omega = 0$) valga 1, y a la frequencia de Nyquist ($\omega = \pi$) valga 1/4.

De ahora en adelante utilizar estos valores de α y β.

(e) Bosqueje el módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ indicando ordenadas y absizas de interés.

Sugerencia: puede ser util esquematizar el denominador de $H(e^{j\omega})$ en el plano complejo.

(f) ¿Qué tipo de sistema es respecto a la selección de frecuencias? Justifique.

(g) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

(h) Encontrar la ecuación en recurrencia del sistema que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$ del sistema.

(i) Dibujar el diagrama de bloques del sistema en la forma canónica (utilizando la mínima cantidad posible de retardos).

Solución

Problema 1

(a) Un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada.

(b)

I) Un SLIT es estable si $h[n]$ es absolutamente sumable y es causal si $\forall n < 0$, $h[n] = 0$.

II) Un SLIT es estable si la ROC de $H(z)$ incluye a la circunferencia unidad ($|z| = 1$) y es causal si la RoC se extiende hacia el infinito.

(c) Los polos de $H(z)$ se encuentran en $z = -1/2$ y $z = 2$ y son los que van a determinar las posibles regiones de convergencia:

1. $\text{RoC} = \left\{z \in \mathbb{C} \;/\; 0 < |z| < \frac{1}{2}\right\}$
2. $\text{RoC} = \left\{z \in \mathbb{C} \;/\; \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$
3. $\text{RoC} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; 2 < |z|\}$
4. $\text{RoC} = \emptyset$[1]

Para que el sistema sea estable la circunferencia unidad debe estar incluida en la RoC, y para que sea causal la RoC debe contener al infinito, por lo tanto:

1. No estable y no causal.
2. Estable y no causal.
3. No estable y causal.
4. No estable y no causal.

(d) Si el sistema es estable, entonces la región de convergencia es:

$$\text{RoC} : \left\{z \in \mathbb{C}/\frac{1}{2} < |z| < 2\right\}.$$

Realizando fracciones simples,

$$H(z) = \frac{5(z^{-1} - 1)}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{-3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-2}{1 - 2z^{-1}}$$

Luego, antitransformando teniendo en cuenta la región de convergencia,

$$h[n] = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^{n+1}u[-n-1]$$

Problema 2

(a) El sistema tiene sólamente retardos y multiplicaciones por constantes, eso implica que se puede utilizar en tiempo real (no contiene adelantos).
Si queremos conocer la respuesta al impulso debemos inyectar a la entrada una señal $\delta[n]$ y *ver* la salida. Si las condiciones iniciales son nulas, la salida previo a $n = 0$ va a ser necesariamente nula. Esto implica que el sistema es causal.

[1] Conunto vacío: se trataría de una suma de dos secuencias, una hacia adelante y otra haca atrás, cuyas regiones de convergencia no coinciden.

(b) Del diagrama de bloques se deducen estas dos ecuaciones (en el dominio z):

$$
\begin{aligned}
W(z) &= X(z) + \alpha^2 W(z) z^{-2} \\
Y(z) &= \beta \left[W(z) + \alpha W(z) z^{-1} \right]
\end{aligned}
$$

Luego, se puede despejar $W(z)$ de la primer ecuación y sustituirla en la segunda:

$$
\begin{aligned}
W(z) &= \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-2}} X(z) \\
\Longrightarrow Y(z) &= \beta \frac{1+\alpha z^{-1}}{1-\alpha^2 z^{-2}} X(z)
\end{aligned}
$$

Se puede observar que hay una cancelación cero-polo, por lo que la expresión se puede simplificar de la siguiente manera:

$$
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta}{1-\alpha z^{-1}}
$$

(c) La transferencia tiene un único polo en $z = \alpha$. Además es causal, por lo tanto la RoC se extiende desde el polo de mayor orden hacia el infinito:

$$
\text{RoC} : \{ z \in \mathbb{C} / \alpha < |z| \} .
$$

Para que sea estable, la RoC debe incluir a la circunferencia unidad y por lo tanto se requiere

$$
|\alpha| < 1
$$

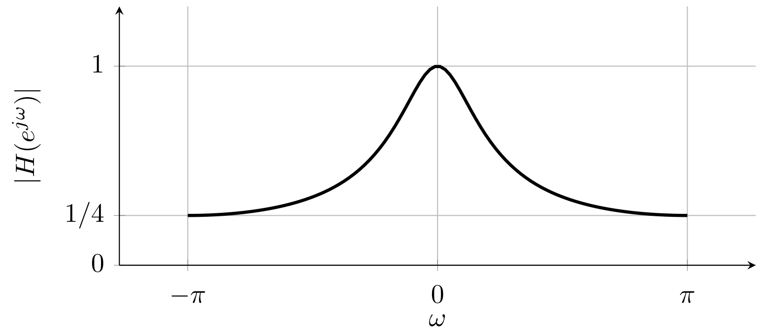
(d)

$$
\begin{aligned}
H(1) &= \frac{\beta}{1-\alpha} = 1 & \Longrightarrow \beta = 1-\alpha \\
H(-1) &= \frac{\beta}{1+\alpha} = \frac{1}{4} & \Longrightarrow 4(1-\alpha) = 1+\alpha
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{y} \quad \beta = \frac{2}{5}
$$

(e) La siguiente figura bosqueja el módulo de la respuesta en frecuencia:



(f) Se trata de un filtro pasabajos.

(g)

$$
h[n] = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^n u[n]
$$

(h)

$$
Y(z)(5 - 3z^{-1}) = 2X(z) \Longrightarrow y[n] = \frac{3}{5} y[n-1] + \frac{2}{5} x[n]
$$

(i) La siguiente figura muestra el diagrama de bloques: