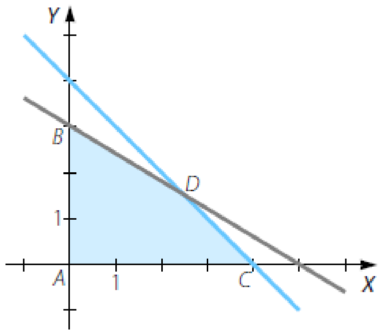
1.-

Halla las regiones del plano determinadas por los sistemas de inecuaciones, e indica en cada caso si son acotadas o no.

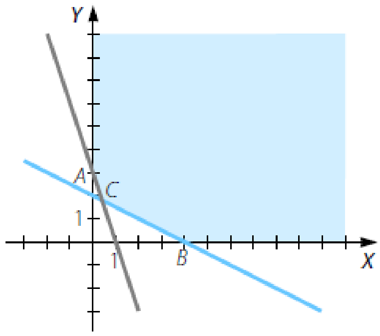
a) $\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 3x + 5y &\leq 15 \\ x + y &\leq 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 3x + y &\geq 3 \\ x + 2y &\geq 4 \end{aligned}\right\}$

a) La región del plano que se obtiene está acotada y tiene como vértices $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 0)$ y $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, que es la intersección de las rectas $3x + 5y = 15$ y $x + y = 4$. Los segmentos de recta que unen los vértices también forman parte de la región.



b) La región del plano que se obtiene no está acotada superiormente y tiene como vértices $A(0, 3)$; $B(4, 0)$ y $C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, que es el punto intersección de las rectas $3x + y = 3y$; $x + 2y = 4$. Los segmentos de recta que delimitan la región también forman parte de ella.



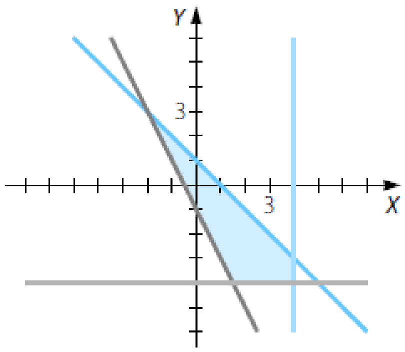
2.-

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} &x + y \leq 1 \\ &-2x - y \leq 1 \\ &x \leq 4 \\ &y \geq -4 \end{aligned}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas: $x + y = 1$; $-2x - y = 1$; $x = 4$; $y = -4$.

El punto $(0, 0)$ satisface las cuatro inecuaciones, por lo que la solución está formada por la región del plano delimitada por las cuatro rectas y que contiene al punto $(0, 0)$.



3.-

Plantea este problema: «Tenemos como máximo 120 unidades de dos productos, *A* y *B*. Hay 65 unidades de *A*, con unas ganancias de 4 € por unidad, y 55 de *B*, con 6,50 € por unidad. Determinar las cantidades que se venden para maximizar los beneficios».

$x \rightarrow$ n.º de unidades del producto A $\quad$ $y \rightarrow$ n.º de unidades del producto B

	Producto *A*	Producto *B*
Ganancias por unidad (€)	4	6,50

$\rightarrow f(x, y) = 4x + 6{,}50y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $\quad f(x, y) = 4x + 6{,}50y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65 \\ 0 \leq y \leq 55 \\ x + y \leq 120 \end{array}\right\}$

4.-

Plantea: «Tenemos mesas de tipo *A* con 2 m² de madera, 1 hora de trabajo y un beneficio de 80 € cada una, y de tipo *B* con 1 m² de madera, 3 horas de trabajo y 50 € de beneficio. Si hay 600 m² de madera y un máximo de 900 horas, determina cómo obtener el máximo beneficio».

$x \rightarrow$ n.º de mesas de tipo A $\quad$ $y \rightarrow$ n.º de mesas de tipo B

	Tipo *A*	Tipo *B*	Total
Madera (m²)	2	1	600
Trabajo (horas)	1	3	900
Beneficio (€)	80	50	

$\rightarrow 2x + y \leq 600$

$\rightarrow x + 3y \leq 900$

$\rightarrow f(x, y) = 80x + 50y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $\quad f(x, y) = 80x + 50y$

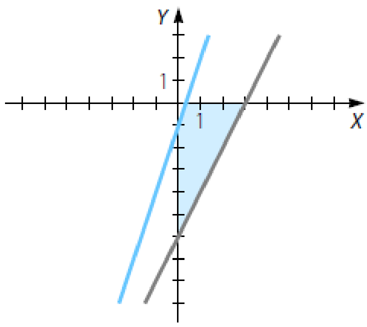
Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

5.-

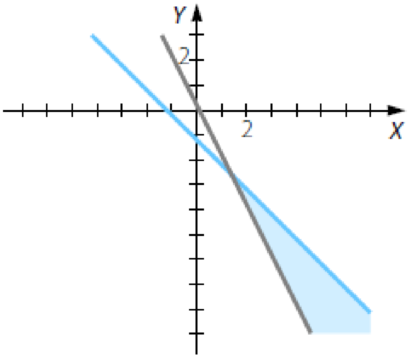
Dibuja la región factible que representan estas restricciones.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y \geq 1 \\ 2x - y < 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \geq 1 \\ -x - y > 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array}\right\}$

a) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones: $3x - y = 1$; $2x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Imponiendo las condiciones del sistema de inecuaciones, se obtiene una región factible acotada de vértices $A(0, -1)$; $B(0, -6)$; $C(3, 0)$ y $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

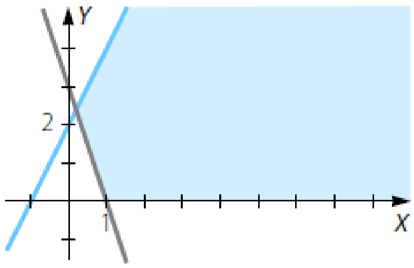


b) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones: $2x + y = 1$; $-x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Se obtiene una región factible no acotada cuyo vértice es el punto de intersección de las rectas $2x + y = 1$ y $-x - y = 6 \rightarrow (7, -13)$.



6.-

Determina las restricciones que representan a la siguiente región factible:



Recta que pasa por (1, 0) y (0, 3) $\rightarrow y = -3x + 3$

Inecuación que no contiene al punto (0, 0) $\rightarrow y \geq -3x + 3$

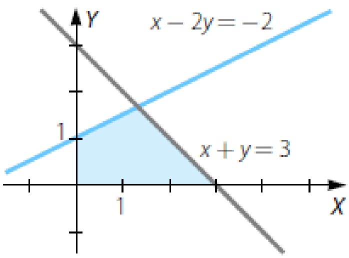
Recta que pasa por (−1, 0) y (0, 2) $\rightarrow y = 2x + 2$

Inecuación que contiene al punto (0, 0) $\rightarrow y \leq 2x + 2$

Las restricciones que determinan esta región son: $\left.\begin{array}{l} y \geq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

7.-

Determina los vértices de la siguiente región:



Vértices: (0, 0); (0, 1) y (3, 0), y el punto solución del sistema: $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -2 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

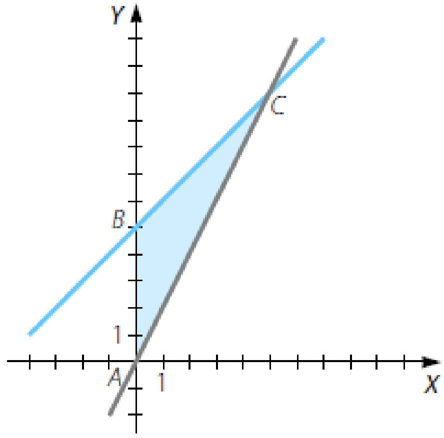
8.-

Halla los vértices de las regiones factibles que representan estas restricciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

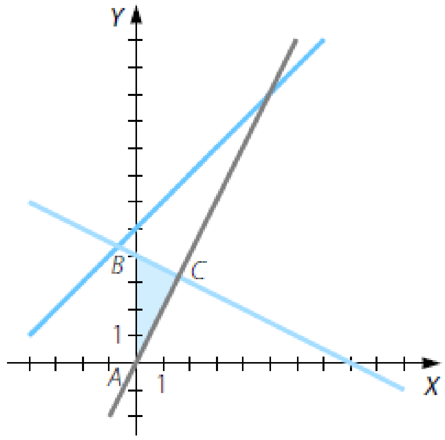
a)



Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 5)$ y C, que es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(5, 10)$$

b)

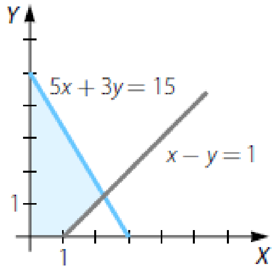


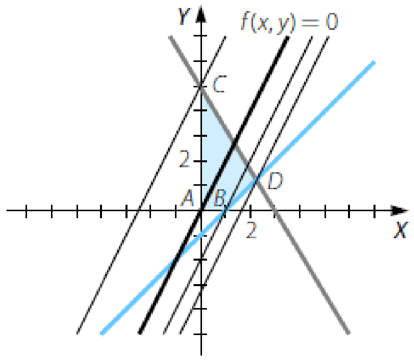
Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 4)$ y C, que es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

9.-

Determina la solución óptima que maximiza la función $f(x, y) = 2x - y$ en esta región factible:



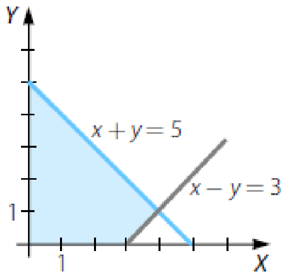


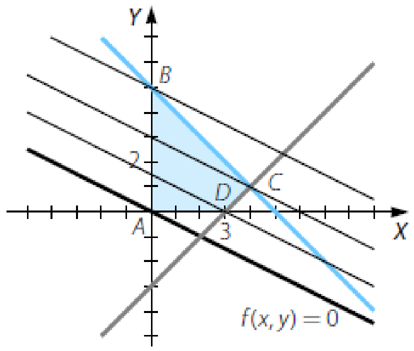
Como la región factible está acotada, el máximo se va a alcanzar en uno de los vértices. Trazando rectas paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza en el vértice $D\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$, que es la solución del sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 15 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

El valor del máximo es: $2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$

10.-

Halla la solución óptima que maximiza la función $f(x, y) = x + 2y$ en la siguiente región factible:





Como la región factible está acotada, el máximo se alcanzará en uno de sus vértices. Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, observamos que el máximo se alcanza en el vértice $B(0, 5)$ y vale: $0 + 2 \cdot 5 = 10$

11.-

Disponemos de 90.000 m² para construir parcelas de 3.000 y 5.000 m², *A* y *B*. Los beneficios son de 10.000 € por cada parcela *A* y de 20.000 € por *B*. El número máximo de parcelas *B* es de 120, y el de parcelas *A*, 150. Determina cuántas parcelas de cada tipo necesitamos para obtener beneficios máximos.

$x \rightarrow$ n.º de parcelas de tipo *A* $\qquad y \rightarrow$ n.º de parcelas de tipo *B*

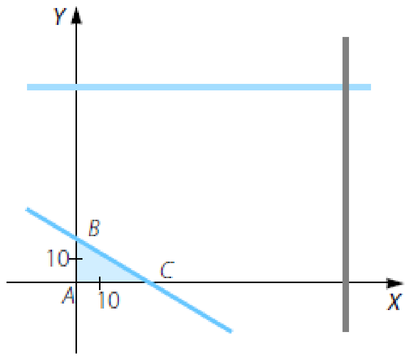
	Parcelas tipo *A*	Parcelas tipo *B*	
Tamaño (m²)	3.000	5.000	$\rightarrow 3.000x + 5.000y \leq 90.000$
Total parcelas	150	120	$\rightarrow 0 \leq x \leq 150; 0 \leq y \leq 120$
Beneficio (€)	10.000	20.000	$\rightarrow f(x, y) = 10.000x + 20.000y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $\quad f(x, y) = 10.000x + 20.000y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 3.000x + 5.000y \leq 90.000 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 120 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 18)$ y $C(30, 0)$.



Como $f(A) = 0$; $f(B) = 360.000$ y $f(C) = 300.000$, el máximo se alcanza en el vértice *B*, lo que significa que para obtener el máximo beneficio: 360.000 €, es necesario construir 18 parcelas de tipo *B* y ninguna de tipo *A*.

12.-

Resuelve este problema de programación lineal:

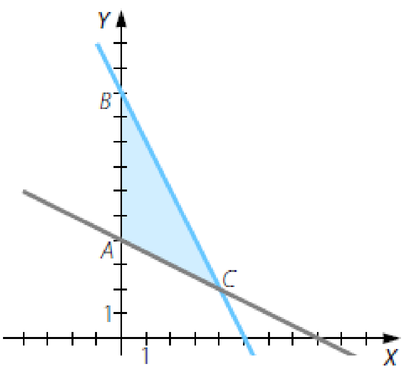
Maximizar $\quad f(x, y) = x - 2y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{r} x + 2y \geq 8 \\ -2x - \quad y \geq -10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 4)$; $B(0, 10)$ y $C(4, 2)$.

Como $f(A) = -8$; $f(B) = -20$ y $f(C) = 0$, el máximo se alcanza en el vértice *C* y su valor es 0.



13.-

Vamos a invertir en dos productos financieros *A* y *B*. La inversión en *B* será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en *A* más del doble que en *B*. El producto *A* proporciona un beneficio del 10 % y *B* del 5 %. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

$x \rightarrow$ Cantidad de dinero invertida en el producto financiero *A*

$y \rightarrow$ Cantidad de dinero invertida en el producto financiero *B*

	Producto financiero *A*	Producto financiero *B*
Beneficio (€)	0,10	0,05

$\rightarrow f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}05y$

$\rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $\quad f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}05y$

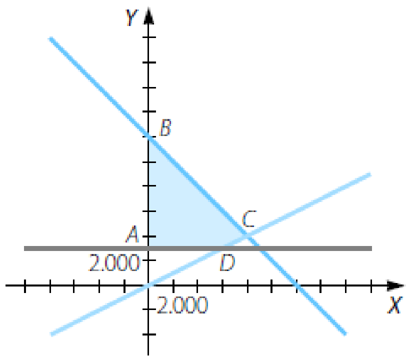
Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} x + y \leq 12.000 \\ 3.000 \leq y \\ 0 \leq x \leq 2y \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 3.000)$; $B(0, 12.000)$; $C(8.000, 4.000)$ y $D(6.000, 3.000)$.

Como $f(A) = 150$; $f(B) = 600$; $f(C) = 1.000$ y $f(D) = 750$, el máximo se alcanza en *C*.

Es decir, debemos invertir 8.000 € en el producto *A* y 4.000 € en el producto *B* para alcanzar un beneficio máximo de 1.000 €.



14.-

Resuelve el problema de programación lineal:

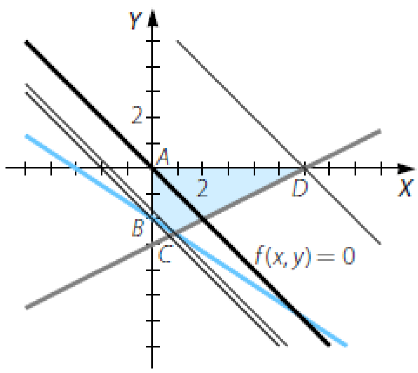
Maximizar $\quad f(x, y) = x + y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{r} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por $A(0, 0)$; $B(0, -2)$; $C\left(\frac{6}{7}, \frac{-18}{7}\right)$ y $D(6, 0)$.

El máximo se alcanza en *D* y vale 6.



15.-

Se fabrican dos tipos de aparatos *A* y *B* en los talleres *X* e *Y*. En cada uno de los talleres se trabajan 100 horas a la semana. Cada aparato *A* requiere 3 horas del taller *X* y 1 hora de *Y*, y cada aparato *B*, 1 y 2 horas, respectivamente. Cada aparato *A* se vende a 100 € y cada aparato *B* a 150 €. Calcula, gráficamente, el número de aparatos de cada tipo que hay que producir para que la facturación sea máxima.

$x \rightarrow$ n.º de aparatos de tipo *A* $\qquad y \rightarrow$ n.º de aparatos de tipo *B*

	Tipo *A*	Tipo *B*	Horas trabajadas	
Taller *X* (horas)	3	1	100	$\rightarrow 3x + y \le 100$
Taller *Y* (horas)	1	2	100	$\rightarrow x + 2y \le 100$
Precio por aparato (€)	100	150		$\longrightarrow f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow$ Función objetivo

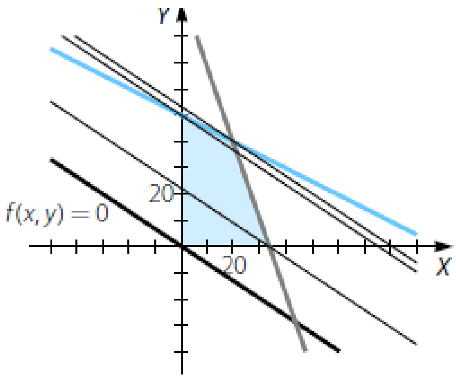
$$\text{Maximizar} \quad f(x, y) = 100x + 150y$$

$$\text{Sujeto a} \quad \left.\begin{array}{l} 3x + y \le 100 \\ x + 2y \le 100 \\ 0 \le x \\ 0 \le y \end{array}\right\}$$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 50)$; $C(20, 40)$ y $D\left(\frac{100}{3}, 0\right)$.

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, vemos que el máximo se alcanza en *C*. Así, es necesario producir 20 aparatos de tipo *A* y 40 aparatos de tipo *B* para alcanzar un beneficio máximo de 8.000 €.



16.-

Tenemos 120 refrescos de naranja y 180 de limón. Se venden en paquetes de dos tipos: los paquetes de tipo *A* contienen 3 refrescos de naranja y 3 de limón, y los de tipo *B* contienen 2 refrescos de naranja y 4 de limón. El beneficio es de 6 € por cada paquete de tipo *A* y 5 € por cada paquete de tipo *B*. Halla, gráficamente, cuántos paquetes de cada tipo hay que vender para maximizar los beneficios.

$x \rightarrow$ n.º de paquetes de tipo *A* $\qquad y \rightarrow$ n.º de paquetes de tipo *B*

	Paquetes tipo *A*	Paquetes tipo *B*	Total	
Naranja	3	2	120	$\rightarrow 3x + 2y \leq 120$
Limón	3	4	180	$\rightarrow 3x + 4y \leq 180$
Beneficio (€)	6	5		$\rightarrow f(x, y) = 6x + 5y \rightarrow$ Función objetivo

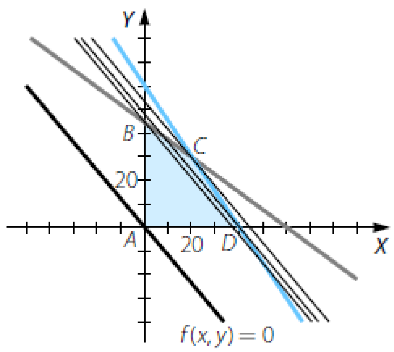
Maximizar $\quad f(x, y) = 6x + 5y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 45)$; $C(20, 30)$ y $D(40, 0)$.

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza en *C*. Así, es necesario vender 20 paquetes de tipo *A* y 30 paquetes de tipo *B* para que el beneficio máximo sea de 270 €.



17.-

Resuelve este problema de programación lineal:

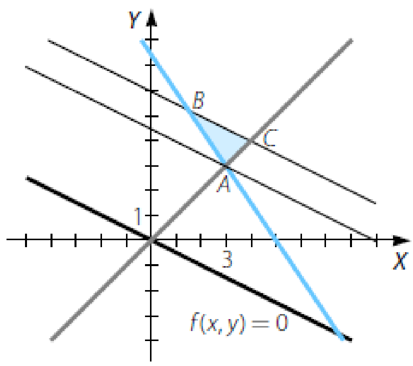
Maximizar $\quad f(x, y) = 2x + 4y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 12 \\ x - y \leq 0 \\ 6x + 4y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por $A(3, 3)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$ y $C(4, 4)$.

El máximo se alcanza en *B* y *C* y, por tanto, se alcanza en todos los puntos del segmento *BC*.



18.-

Una fábrica elabora dos tipos de productos, *A* y *B*. El tipo *A* necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo *B* necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de *A* y de *B* que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$ n.º de unidades del producto de tipo *A*
$y \rightarrow$ n.º de unidades del producto de tipo *B*

	Tipo *A*	Tipo *B*	Total	
Obreros	2	3	60	$\rightarrow\ 2x + 3y \leq 60$
Tiempo (horas)	20	10	480	$\rightarrow 20x + 10y \leq 480$
Beneficio por unidad (€)	1.500	1.000		$\longrightarrow f(x, y) = 1.500x + 1.000y \rightarrow$ Función objetivo

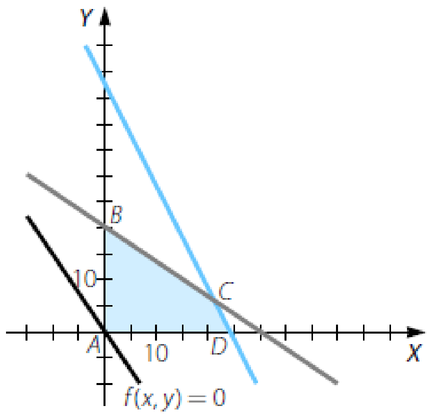
Maximizar $\quad f(x, y) = 1.500x + 1.000y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ 20x + 10y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 20)$; $C(21, 6)$ y $D(24, 0)$.

Como $f(A) = 0$; $f(B) = 20.000$; $f(C) = 37.500$ y $f(D) = 36.000$, el máximo se alcanza en el vértice *C*. Así, hay que fabricar 21 unidades de tipo *A* y 6 unidades de tipo *B* para que el beneficio sea máximo y valga 37.500 €.



19.-

Una fábrica de conserva tiene 800 kg de guisantes para conservar en dos tipos de latas. La lata pequeña contiene 200 g y aporta un beneficio de 10 céntimos por lata. La lata grande contiene 500 g y un beneficio de 30 céntimos.
Si en el almacén solo disponemos de 2.000 latas de tamaño pequeño y 1.000 grandes, determina la cantidad de latas de cada tamaño que tenemos que producir para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$ n.º de latas pequeñas $\qquad y \rightarrow$ n.º de latas grandes

	Lata pequeña	Lata grande	Total	
Cantidad de guisantes (kg)	0,2	0,5	800	$\rightarrow 0{,}2x + 0{,}5y \leq 800$
Total latas	2.000	1.000		$\rightarrow x \leq 2.000;\ y \leq 1.000$
Beneficio por unidad (€)	0,10	0,30		$\rightarrow f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}5y \rightarrow$ Función objetivo

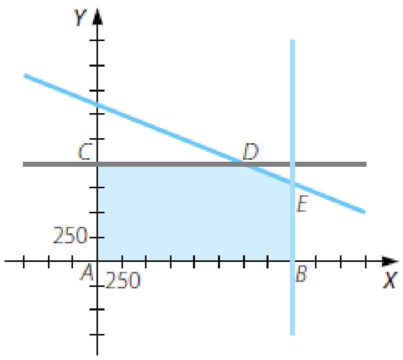
Maximizar $\quad f(x, y) = 0{,}10x + 0{,}5y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2.000 \\ 0 \leq y \leq 1.000 \end{array}\right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(2.000, 0)$; $C(0, 1.000)$; $D(1.500, 1.000)$ y $E(2.000, 800)$.

Como $f(A) = 0$; $f(B) = 200$; $f(C) = 300$; $f(D) = 450$ y $f(E) = 440$, el valor máximo se alcanza en el punto D. Por tanto, debemos fabricar 1.500 latas pequeñas y 1.000 latas grandes para maximizar el beneficio y que este sea de 450 €.



20.-

Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

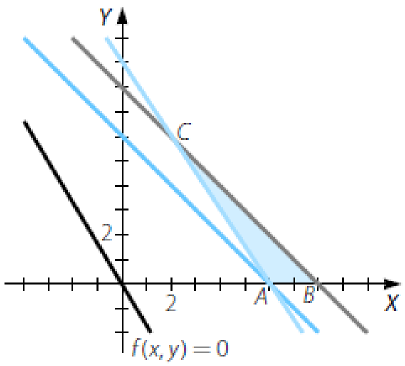
$x \rightarrow$ n.º de dosis del compuesto X

$y \rightarrow$ n.º de dosis del compuesto Y

	Compuesto X	Compuesto Y	Cantidad	
Vitamina A (mg)	10	10	60	$\rightarrow 10x + 10y \geq 60$
Vitamina B (mg)	15	10	90	$\rightarrow 15x + 10y \geq 90$
Coste (€)	0,50	0,30		$\rightarrow f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}30y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Minimizar $\quad f(x, y) = 0{,}50x + 0{,}30y$

Sujeto a
$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 10x + 10y \geq 60 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



La región factible está acotada.

Vértices: $A(6, 0)$; $B(8, 0)$ y $C(2, 6)$.

Sustituyendo en la función objetivo obtenemos que $f(A) = 3$; $f(B) = 4$ y $f(C) = 2{,}8$, por lo que el mínimo se alcanza en el punto C.

Así, los animales tienen que tomar 2 dosis del compuesto X y 6 dosis del compuesto Y para que el coste sea mínimo, siendo este de 2,80 €.

21.-

Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En estos momentos están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo *A* tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y su transporte cuesta 0,90 €. El lote de tipo *B* tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y necesitan elaborar, al menos, 10 lotes del tipo *A* y 25 del tipo *B*. ¿Cuántos lotes de cada clase han de elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

$x \rightarrow$ n.º de lotes de tipo A $\qquad$ $y \rightarrow$ n.º de lotes de tipo B

	Lote tipo *A*	Lote tipo *B*	Total	
Queso	1	3	200	$\rightarrow\ x + 3y \leq 200$
Botellas de vino	2	1	100	$\rightarrow 2x + \ y \leq 100$
Coste del transporte (€)	0,90	1,50		$\longrightarrow f(x, y) = 0{,}90x + 1{,}50y \rightarrow$ Función objetivo

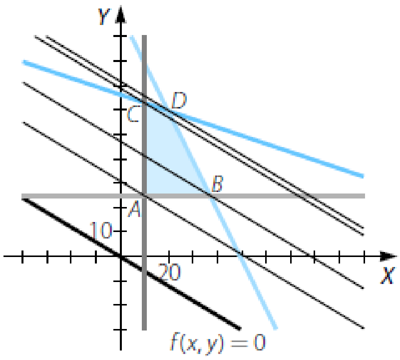
Minimizar $\quad f(x, y) = 0{,}90x + 1{,}50y$

Sujeto a
$$\left.\begin{array}{r} x + 3y \leq 200 \\ 2x + \ y \leq 100 \\ 10 \leq x \\ 25 \leq y \end{array}\right\}$$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(10, 25)$; $B\left(\dfrac{75}{2}, 25\right)$; $C\left(10, \dfrac{190}{3}\right)$ y $D(20, 60)$.

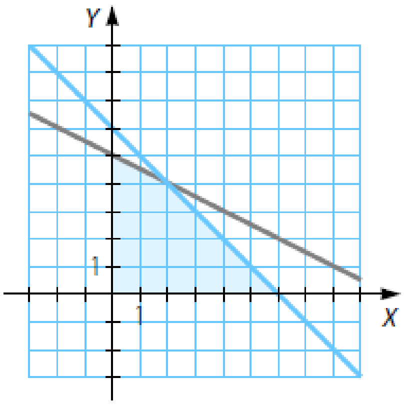
Como $f(A) = 46{,}5$; $f(B) = 71{,}25$; $f(C) = 104$ y $f(D) = 108$, el mínimo se alcanza en A y su valor es 46,5. Es decir, para que los gastos del transporte sean mínimos se han de elaborar 10 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B, ascendiendo los gastos a 46,50 €.



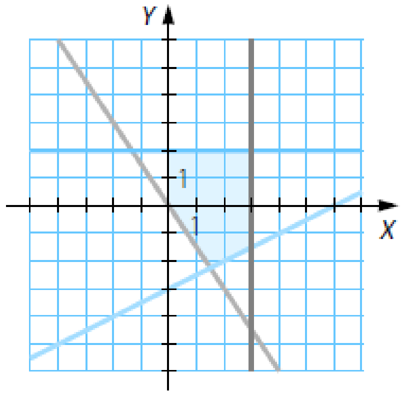
22.-

Determina un sistema de inecuaciones para cada solución representada en estas gráficas.

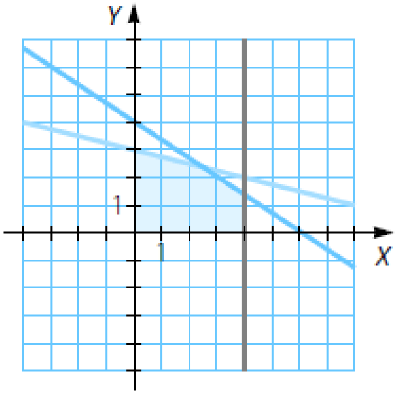
a)



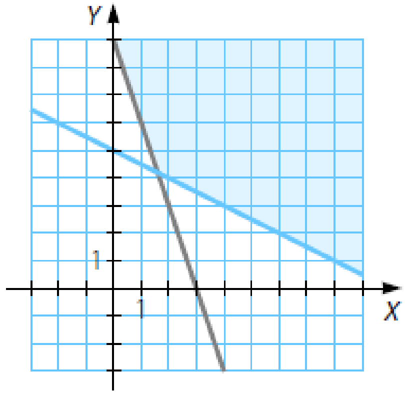
c)



b)



d)



a) Las ecuaciones de ambas rectas son $x + y = 6$ y $x + 2y = 10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 6 \\ x + 2y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Las ecuaciones de las tres rectas son $x = 4$; $x + 4y = 12$ y $3y + 2x = 12$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y \le 12 \\ 2x + 3y \le 12 \\ 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \end{array}\right\}$$

c) Las ecuaciones de las cuatro rectas son $x = 3$; $y = 2$; $x - 2y = 6$ y $2y + 3x = 0$.
El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 3 \\ 2 \ge y \\ x - 2y \le 6 \\ 2y + 3x \ge 0 \end{array}\right\}$$

d) Las ecuaciones de las dos rectas son $3x + y = 9$ y $x + 2y = 10$.
El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \ge 9 \\ x + 2y \ge 10 \end{array}\right\}$$

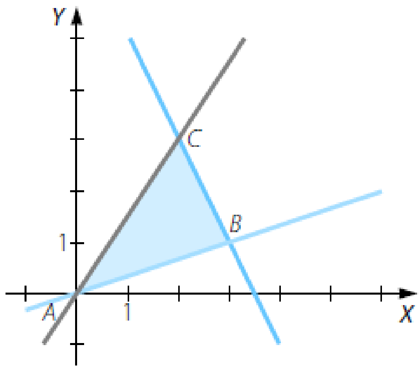
23.-

Determina un sistema de inecuaciones que tenga como conjunto de soluciones el interior y los lados del triángulo del plano de vértices (0, 0), (2, 3) y (3, 1).

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

- Recta que pasa por (0, 0) y (2, 3) $\rightarrow 3x - 2y = 0$
- Recta que pasa por (0, 0) y (3, 1) $\rightarrow x - 3y = 0$
- Recta que pasa por (3, 1) y (2, 3) $\rightarrow 2x + y = 7$

La región factible dada por el triángulo es:



El sistema de inecuaciones que da lugar a la región factible es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \le 7 \\ x - 3y \le 0 \\ 3x - 2y \ge 0 \end{array}\right\}$$

24.-

a) Representa gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6 \qquad -x + y \leq 3 \qquad 4x + y \leq 10 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

y determina sus vértices.

b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indica dónde se alcanza.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 1)

a) Región factible acotada con estos vértices:

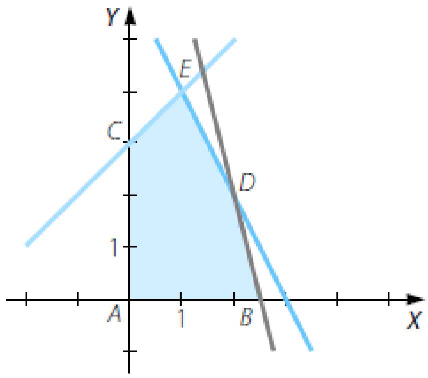
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + y = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(\frac{10}{4}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ -x + y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{array}\right\} \rightarrow D(2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow E(1, 4)$$



b) Como la región factible está acotada, el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ se alcanza en uno de sus vértices. Y como $f(A) = -3$; $f(B) = 7$; $f(C) = 3$; $f(D) = 9$ y $f(E) = 9$, el máximo se alcanza en los vértices D y E y, por tanto, en todos los puntos del segmento DE, y vale 9.

25.-

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 12 \qquad y \leq 30 \qquad x \leq \frac{10 + y}{2} \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

a) Representa gráficamente la región factible del problema y calcula sus vértices.

b) Maximiza en esa región factible la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.

c) ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

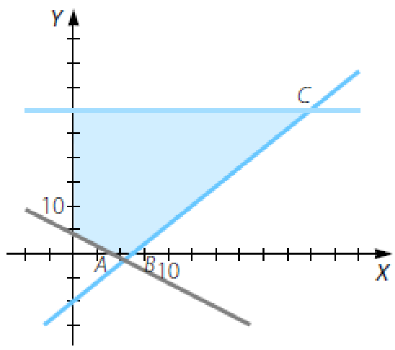
a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(3, 0)$

$\left.\begin{array}{l} 2x = 10 + y \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(5, 0)$

$\left.\begin{array}{l} 2x = 10 + y \\ y = 30 \end{array}\right\} \rightarrow C(20, 30)$

$\left.\begin{array}{l} y = 30 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D(0, 30)$

$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E(0, 4)$



b) El máximo de la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$ se alcanza en uno de los vértices. Como $F(A) = 3$; $F(B) = 5$; $F(C) = 110$; $F(D) = 90$ y $F(E) = 12$, el máximo se alcanza en C y tiene un valor de 110.

c) El punto (11, 10) no pertenece a la región factible.

26.-

a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 60 \quad x - 2y \geq -3 \quad y \geq \frac{x}{2} - 2 \quad 2x + 3y \geq 1$$

b) Calcula los puntos de la región donde la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determina estos.

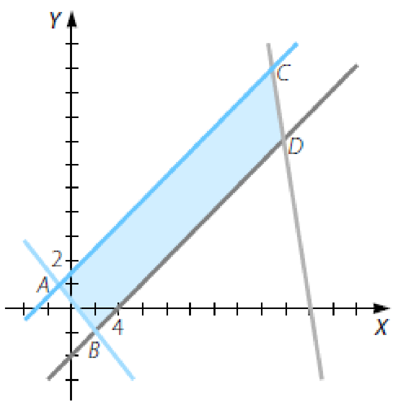
(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio A. Problema 2)

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A(-1, 1)$

$\left.\begin{array}{l} 2y = x - 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow B(2, -1)$

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\dfrac{117}{7}, \dfrac{69}{7}\right)$

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{array}\right\} \rightarrow D\left(\dfrac{124}{7}, \dfrac{48}{7}\right)$



b) Como la región está acotada, el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ se alcanzan en los vértices.

Y como $f(A) = -5$; $f(B) = 8$; $f(C) = \frac{213}{7}$ y $f(D) = \frac{276}{7}$, el máximo se alcanza en D y su valor es $\frac{276}{7}$, y el mínimo se alcanza en A y su valor es -5.

27.-

Considera el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{array}\right\}$

a) Representa gráficamente la región factible.

b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en dicha región.

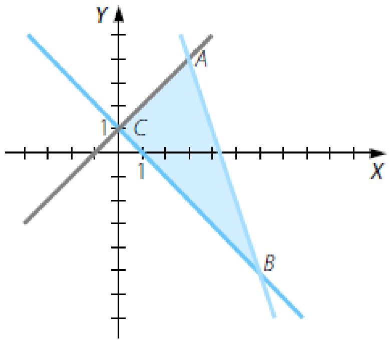
(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 3)

a) La región factible está acotada y tiene como vértices los puntos:

$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(3, 4)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 13 \end{array}\right\} \rightarrow B(6, -5)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 1)$



b) Sustituimos los vértices en la función objetivo: $f(A) = -9$; $f(B) = 21$ y $f(C) = -3$. El máximo se alcanza en el vértice $B(6, -5)$ y su valor es 21.

28.-

Se desea minimizar la función lineal $3x + 4y + 2(10 - x) + 3(18 - y)$ con las restricciones:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 10 - x \geq 0 \qquad 18 - y \geq 0$$
$$x + y \leq 13 \qquad (10 - x) + (18 - 2y) \leq 16$$

Se pide:

a) Representación gráfica del conjunto factible.

b) Hallar las coordenadas de todos sus vértices.

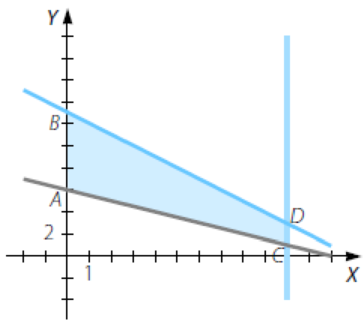
c) Hallar todas las soluciones óptimas.

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 1. Opción A)

a) $(10 - x) + (18 - 2y) = 16 \rightarrow x + 2y = 12$

b) Los vértices son $A(0, 6)$; $B(0, 13)$; $C(10, 1)$ y $D(10, 3)$.

c) Como la región factible está acotada, la función objetivo alcanza sus soluciones óptimas en los vértices. Y como $f(A) = 80$; $f(B) = 87$; $f(C) = 85$ y $f(D) = 87$, el mínimo se alcanza en A, y su valor es 80, y el máximo se alcanza en B y D y, por tanto, en todos los puntos del segmento BD, y su valor es 87.



29.-

En un concurso el premio consiste en un cheque de 240 € para gastar en libros y juegos. Los libros cuestan 8 € y los juegos 24 €. La organización establece la condición de que el número de libros que el ganador compre no puede superar al doble del número de juegos.

a) Plantea un sistema de inecuaciones con las restricciones y representa la región factible.

b) Determina razonadamente si el ganador podría comprar 12 libros y 6 juegos.

c) ¿Podría adquirir 7 libros y 7 juegos? En el caso de que le sobre dinero, ¿cuánto es?

a) $x \rightarrow$ n.º de libros $\quad y \rightarrow$ n.º de juegos

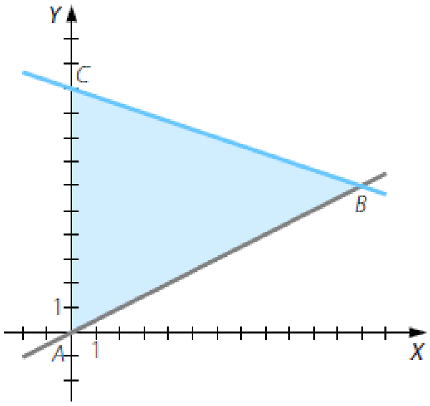
	Libros	Juegos	Total
Coste (€)	8	24	240

$\rightarrow 8x + 24y \leq 240$

El sistema de inecuaciones que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible está acotada y sus vértices son $A(0, 0)$; $B(12, 6)$ y $C(0, 10)$.



b) Los vértices pertenecen a la región factible, porque en las inecuaciones se da la igualdad. El punto B representa 12 libros y 6 juegos, por lo que el ganador sí los podrá comprar.

c) Sí podrá comprar 7 libros y 7 juegos, porque el punto (7, 7) pertenece a la región factible. El coste será de 224 € y le sobrarán 16 €.

30.-

Disponemos de 105.000 € para invertir en dos tipos de acciones: *A* y *B*. Las de tipo *A* tienen un interés anual del 8 % y las de tipo *B* del 7 %. Si invierto como máximo 65.000 € en las de tipo *A*, como mínimo 3.000 € en las de tipo *B* y quiero que la inversión en las de tipo *A* sea, al menos, igual a la inversión en las de tipo *B*, ¿cuál es la distribución con la que mayor beneficio obtengo?

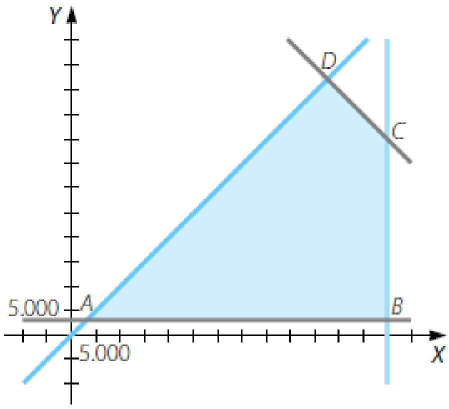
$x \rightarrow$ Dinero invertido en *A* $\qquad y \rightarrow$ Dinero invertido en *B*

	Tipo *A*	Tipo *B*
Interés anual (%)	0,08	0,07

$\rightarrow f(x, y) = 0{,}08x + 0{,}07y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $\quad f(x, y) = 0{,}08x + 0{,}07y$

Sujeto a $\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65.000 \\ y \geq 3.000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 105.000 \end{array}\right\}$



La región factible está acotada con vértices en $A(3.000, 3.000)$; $B(65.000, 3.000)$; $C(65.000, 40.000)$ y $D(52.500, 52.500)$.

Como $f(A) = 450$; $f(B) = 5.410$; $f(C) = 8.000$ y $f(D) = 7.875$, el máximo se alcanza en *C*.

Debemos invertir 65.000 € en las acciones de tipo *A* y 3.000 € en las acciones de tipo *B*. Obtendremos 8.000 €.