Matemática 1
Primer Parcial

CURE

16 de Mayo de 2025

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [10 pts.]

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y los parámetros a,$b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi x)}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ (a+1)x - b & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ sen(\frac{\pi}{2}x) + x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) [5 pts.] Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$, f es continua. Fundamente detalladamente su resultado.

(b) [5 pts.] ¿Es f derivable en todo $\mathbb{R}$?. Fundamente su respuesta.

Problema 2 [15 pts.]

Sea la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) [5 pts.] Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Halle la ecuación de la recta t tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

(b) [5 pts.] Halle las coordenadas de los puntos de intersección de la recta t y los ejes de coordenadas.

(c) [5 pts.] Determine el valor de a para que la distancia entre los puntos de intersección de la recta t con los ejes de coordenadas sea mínima.

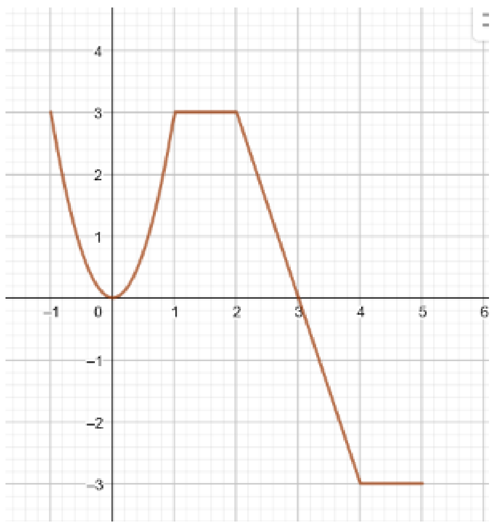
(*Nota: Dados los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ la distancia euclidea entre A y B está dada por: $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$*)

Problema 3 [15 pts.]

(a) [10 pts.] Calcule los siguientes limites:

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)-\frac{x^2}{2}}{x^4}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$

(b) [5 pts.] Sea la función derivable $f : [-1,5] \to \mathbb{R}$ tal que $f(-1) = 0$, $f(1) = f(5)$ y cuya derivada f' está dada por la siguiente gráfica:



Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando detalladamente.

- f presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 3$
- $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \; \in [-1,5]$ y presenta un máximo absoluto en $x = 3$

Problema 4 [10 pts.]

(a) [5 pts.] Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $inf(A) = 0$, $sup(A) = \sqrt{2}$ y $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Indicar, en cada caso, justificando si la proposición es verdadera, falsa o los datos son insuficientes para contestar.

1. $m\acute{i}n(A) = 0$
2. $m\acute{a}x(A) = \sqrt{2}$
3. $\exists x_0 \in A$ tal que $x_0 > 1,41$
4. $(0, \sqrt{2}) \subset A$

(b) [5 pts.] Demuestre por inducción completa la siguiente proposición:

$$\sum_{i=0}^{i=n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución

Problema 1

(a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, hay que analizar en cada intervalo si las funciones son continuas y luego en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Las funciones dentro de cada intervalo son continuas. Luego usando usando la definición de limite en un punto, en $x = -1$ se tiene que cumplir,

$$lim_{x \to -1^-} \frac{1 - cos(\pi x)}{x - 1} = lim_{x \to -1^+} (a + 1)x - b = f(-1) \tag{1}$$

para $x = 1$

$$lim_{x \to 1^-} (a + 1)x - b = lim_{x \to 1^+} sen(\frac{\pi x}{2}) + x^2 = f(1) \tag{2}$$

Para que se cumplan estan condiciones, $a = 1/2$ y $b = -1/2$. Por lo tanto, $f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 1$

(b) No, basta con observar que la función no es derivable en $x = -1$.

$$lim_{x \to -1^-} = \frac{\frac{1 - cos(\pi x)}{x - 1} - 1}{x + 1} \neq lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}{x + 1} \tag{3}$$

Problema 2

(a) La recta tangente al grafico en$(a, f(a))$ es $t = f^{'}(a)(x - a) + f(a)$. Por lo tanto:

$$t = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

(b) La recta t corta los ejes en las coordenadas

$$y = 2/a \ , \ x = 2a.$$

(c) Sean los puntos $A = (0, 2/a)$ y $B = (2a, 0)$ y usan la sugerencia, se tiene que

$$d(A, B) = \sqrt{(2/a)^2 + (2a)^2}$$

, derivando respecta a (a)

$$\frac{d(d(A, B))}{da} = \frac{8a - 8/a^3}{\sqrt{(2/a)^2 + (2a)^2}}$$

, por lo tanto $a = 1$.

Problema 3

(a)

- $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)-\frac{x^2}{2}}{x^4}$ = indet $\frac{0}{0}$, aplicando L'Hopital varias veces da $\frac{-1}{24}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}}{x^2-1} = +\infty$

(b)

- f presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 3$
  Respuesta: Falso, f no tiene un mínimo relativo en $x = 0$.
- $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \ \ \in [-1, 5]$ y presenta un máximo absoluto en $x = 3$
  Respuesta: Verdadera, dado que $f(-1) = 0$ y f es siempre creciente hasta $x = 3$ y $f(1) = f(5)$, f es definida positiva en el rango $[-1, 5]$ y además tiene máximo relativo en $x = 3$.

Problema 4

(a)

1. **Falso** . Si fuera cierto $min(A) = 0 \to 0 \in \mathbb{Q}$,$A \cap \mathbb{Q} = \emptyset \to 0 \notin A$ (A no tiene min).
2. **Datos insuficientes** . No se sabe si $\sqrt{2} \in A$. Dado que el $sup(A) = \sqrt{2} \to \sqrt{2}$ menor de las cotas superiores. Si $\sqrt{2} \in A \to \sqrt{2} = max(A)$.
3. **Verdadero** .
4. **Falso** . $1 \in (0, \sqrt{2}), 1 \in Q, A \cap \mathbb{Q} = \emptyset, \to 1 \notin A$

(b)

- $B_I)$ $n = 0$, $\sum_{i=0}^{i=0} 2^i = 1 = 2^{0+1} - 1 = 1$
- $H_I)$ $n = h$, $\sum_{i=0}^{i=h} 2^i = 2^{h+1} - 1$
- $T_I)$ $n = h + 1$, $\sum_{i=0}^{i=h+1} 2^i = 2^{h+2} - 1$

<u>*Dem* :</u>

$$\sum_{i=0}^{i=h+1} 2^i = \sum_{i=0}^{i=h} 2^i + \sum_{i=h+1}^{i=h+1} 2^i =^{por\ \ H_i)} 2^{h+1} - 1 + 2^{h+1}$$

$$\sum_{i=0}^{i=h+1} 2^i = 2.2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$$