Clase 24

jueves, 28 de noviembre de 2019 20:25

Proposición 216: Existe una función f compleja definida en X y $|\lambda|$-integrable tal que $|f(x)|=1$ para todo $x \in X$ y para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E f \, d|\lambda|$$

Dem: Como $|\lambda|$ es una medida finita y $|\lambda(F)| \leq |\lambda|(F)$ para cada $F \in \mathcal{A}$ se tiene $\lambda << |\lambda|$.

Puedo aplicar Radón-Nikodym (teo 215) y entonces existe f compleja definida en X y $|\lambda|$-integrable tal que

$$\lambda(E) = \int_E f \, d|\lambda| \quad E \in \mathcal{A}$$

Sea ahora para $n>0$ cualquiera (lo considero fijo)

$$H_n = \{x \in X : |f(x)| < 1 - \frac{1}{n}\}$$

y sea $\{F_1, F_2, \dots, F_p\}$ una partición de H_n con $F_j \in \mathcal{A}$ $j=1,2,\dots,p$

Se tiene que

$$\sum_{j=1}^{p} |\lambda(F_j)| = \sum_{j=1}^{p} \left| \int_{F_j} f \, d|\lambda| \right| \leq \sum_{j=1}^{p} \int_{F_j} |f| \, d|\lambda| \leq$$

$H_n = \bigcup_{j=1}^{p} F_j \to$ disjuntos

$$\leq \sum_{j=1}^{p} \int_{F_j} \left(1 - \frac{1}{n}\right) d|\lambda| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^{p} |\lambda|(F_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) |\lambda|(H_n)$$

luego $\quad |\lambda|(H_n) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) |\lambda|(H_n)$

para todo $n > 0$ luego $|\lambda|(H_n) = 0 \ \forall n$

Si $H = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$

se tiene $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ de donde

$$0 \leq |\lambda|(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\lambda|(H_n)}_{0} = 0$$

o sea $\quad |\lambda|(H) = 0$

Sea $\quad B = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$

Podemos hallar una sucesión de bolas cerradas $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ tal que en el plano complejo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Consideremos $D_n = f^{-1}(B_n) \quad n = 1, 2, \ldots$

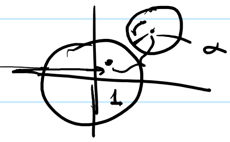
o sea $\quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Supongamos que existe $m > 0$ tal que

$$|\lambda|(D_m) > 0$$

Se tiene que

$$\left| \frac{1}{|\lambda|(D_m)} \int_{D_m} f \, d|\lambda| \right| = \frac{1}{|\lambda|(D_m)} |\lambda(D_m)| \leq 1$$



Sea α el centro de la bola B_m y sea r su radio luego

$$r < \left| \frac{1}{|\lambda|(D_m)} \int_{D_m} f \, d|\lambda| - \alpha \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{|\lambda|(D_m)} \int_{D_m} (f - \alpha) \, d|\lambda| \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|(D_m)} \int_{D_m} |f - \alpha| \, d|\lambda| \leq \frac{1}{|\lambda|(D_m)} \int_{D_m} r \, d|\lambda| = r$$

lo cual es una contradicción o sea

$$|\lambda|(D_n) = 0 \quad \forall n$$

luego

$$|\lambda|(B) = 0$$

o sea f se puede tomar tal que $|f(x)| = 1$

$\square$

Sea h una función compleja definida en X y μ-integrable.
Para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\nu(E) = \int_E h \, d\mu$$

De acuerdo a la proposición 2.16 podemos hallar una función g compleja definida en X y $|\nu|$-integrable con $|g(x)| = 1$ para cada $x \in X$ y

$$\nu(E) = \int_E g \, d|\nu|$$

Proposición 2.17 Para cada f compleja y acotada definida en X y μ-medible se tiene que

$$\int_X f g \, d|\nu| = \int_X f h \, d\mu$$

(g, h y ν son las definidas recién)

Dem: Es obvio que $f \cdot g$ es $|\nu|$-integrable y fh es μ-integrable

Si $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A}$ entonces

$$\int_X f g \, d|\nu| = \int_E g \, d|\nu| = \int_E h \, d\mu = \int_X f h \, d\mu$$

se cumple para indicatrices

Si $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ función simple entonces

$$\int_X f g \, d|\nu| = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{E_j} g \, d|\nu| = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{E_j} h \, d\mu =$$

$$= \int_X f h \, d\mu$$

o sea se cumple para funciones simples

Si f es no negativa, sea (f_n) una sucesión creciente de funciones simples no negativas tal que $f_n \to f$ puntualmente

entonces

$$\int_X f_n g \, d|\nu| = \int_X f_n \cdot h \, d\mu$$

Pero $|f_n g| \leq |f g|$

$|f_n h| \leq |f \cdot h|$

Entonces aplico convergencia dominada y

$$\int_X f_n g \, d|\nu| \longrightarrow \int_X f g \, d|\nu|$$

$$\int_X f_n h \, d\mu \longrightarrow \int_X f h \, d\mu$$

o sea $$\int_X f g \, d|\nu| = \int_X f \cdot h \, d\mu$$

En el caso general

$$f = f_1 + i f_2$$

con f_1 y f_2 reales entonces

$$\int f_1^+ g \, d|\nu| = \int f_1^+ h \, d\mu$$

$$\int_X f_1^+ g \, d|\nu| = \int_X f_1^+ h \, d\mu$$

$$\int_X f_1^- g \, d|\nu| = \int_X f_1^- h \, d\mu$$

$$\int_X f_2^+ g \, d|\nu| = \int_X f_2^+ h \, d\mu$$

$$\int_X f_2^- g \, d|\nu| = \int_X f_2^- h \, d\mu$$

entonces

$$\int_X f g \, d|\nu| = \int_X f h \, d\mu$$

$\square$

Proposición 218: Se tiene que

$$|\nu|(E) = \int_E |h| \, d\mu \quad E \in \mathcal{A}$$

Dem: Si $\bar{g}$ es la conjugada de g entonces

$\bar{g} \chi_E$ $(E \in \mathcal{A})$ es acotada y μ-medible

entonces puedo aplicar la proposición 217 para $f = \bar{g}\chi_E$

$$\int_X f\,\tilde{g}\,d|\nu| = \int_X \chi_E\,\bar{g}\,g\,d|\nu| = \int_E d|\nu| = |\nu|(E)$$

$$\hookrightarrow = \int_X \chi_E\,\bar{g}\,h\,d\mu = \int_E \bar{g}\,h\,d\mu$$

$$\Rightarrow \int_E \bar{g}\,h\,d\mu = |\nu|(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$\bar{g}h$ es positiva en casi todo punto respecto a μ

$\Rightarrow \bar{g}h = |h|$ en c t p respecto a μ

luego $|\nu|(E) = \int_E |h|\,d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$

Descomposición de Lebesgue

Definición 219: Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sean μ y ν dos medidas definidas en $\mathcal{A}$. Se dice que μ y ν son mutuamente singulares si existe una partición $\{A, B\}$ de X con $A, B \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A) = \nu(B) = 0$$

Se escribe $\mu \perp \nu$

Si ρ es una medida compleja definida en $\mathcal{A}$ se dice que ρ y μ son mutuamente singulares si $|\rho| \perp \mu$ y se escribe $\rho \perp \mu$

Teorema 220 (Lebesgue)

Si μ es una medida σ-finita y λ una medida compleja ambas definidas en $\mathcal{A}$ λ se descompone de una manera única como suma de dos medidas complejas λ_1 y λ_2 definidas en $\mathcal{A}$ $(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2)$ de manera que

$$\lambda_1 << \mu \quad \text{y} \quad \lambda_2 \perp \mu$$

Dem: (Unicidad)

Supongamos que
$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\lambda = \lambda_1' + \lambda_2'$$

con

$$\lambda_1 << \mu \quad \lambda_2 \perp \mu \quad \lambda_1' << \mu \quad \lambda_2' \perp \mu$$

Hallamos dos particiones $\{A_1, B_1\}$ y $\{A_2, B_2\}$ de X con $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{A}$ tales que

$$\mu(A_1) = \mu(A_2) = |\lambda_2|(B_1) = |\lambda_2'|(B_2) = 0$$

Se tiene que $\{A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2\}$ es una partición de X

Tomemos $E \in \mathcal{A}$

sabemos que $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$ luego

$$\mu(E \cap (A_1 \cup A_2)) = 0 \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\lambda_1(E \cap (A_1 \cup A_2)) = 0 \quad \text{pues } \lambda_1 \ll \mu$$
$$\lambda_1'(E \cap (A_1 \cup A_2)) = 0 \quad \text{pues } \lambda_1' \ll \mu$$

Como $|\lambda_2|(B_1) = |\lambda_2'|(B_2) = 0$ resulta que

$$|\lambda_2|(E \cap B_1 \cap B_2) = |\lambda_2'|(E \cap B_1 \cap B_2) = 0 \quad \text{por lo}$$
que
$$\lambda_2(E \cap B_1 \cap B_2) = \lambda_2'(E \cap B_1 \cap B_2) = 0$$

entonces

$$\lambda_1(E) - \lambda_1'(E) = \underbrace{\lambda_1(E \cap (A_1 \cup A_2))}_{=0} + \lambda_1(E \cap B_1 \cap B_2) -$$
$$- \underbrace{\lambda_1'(E \cap (A_1 \cup A_2))}_{=0} - \lambda_1'(E \cap B_1 \cap B_2) =$$

$$= \lambda_1(E\cap B_1\cap B_2) - \lambda'_1(E\cap B_1\cap B_2) =$$

$$= \cancel{\lambda(E\cap B_1\cap B_2)} - \lambda_2(E\cap B_1\cap B_2) - \cancel{\lambda(E\cap B_1\cap B_2)}$$
$$+ \lambda'_2(E\cap B_1\cap B_2) = \lambda'_2(\underbrace{E\cap B_1\cap B_2}_{=0}) - \lambda_2(\underbrace{E\cap B_1\cap B_2}_{=0}) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1(E) = \lambda'_1(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$ o sea

$\lambda_1 = \lambda'_1$ entonces $\lambda_2 = \lambda'_2$

o sea probamos la unicidad.

(Existencia)

Supongamos que λ es real y no negativa

Es claro que $\lambda << \lambda + \mu$

Aplico la proposición 2.14 y por lo tanto existe g real no negativa y $\lambda+\mu$ integrable tal que

$$\lambda(E) = \int_E g \, d(\lambda+\mu)$$

Sea $A = \{x \in X : g(x) < 1\}$

$B = \{x \in X : g(x) \geq 1\}$

$\{A, B\}$ es una partición de X y $A, B \in \mathcal{A}$

Para cada $E \in \mathcal{A}$ ponemos

$$\lambda_1(E) = \lambda(E \cap A)$$
$$\lambda_2(E) = \lambda(E \cap B)$$

λ_1 y λ_2 son finitas y $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

Veamos que $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$

$(\lambda_1 \ll \mu)$

Sea $F \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(F) = 0$ entonces

$$\lambda_1(F) = \lambda(F \cap A) = \int_{F \cap A} g \, d(\lambda + \mu)$$

Pero $\lambda(F \cap A) = \lambda(F \cap A) + \underbrace{\mu(F \cap A)}_{0} = (\lambda + \mu)(F \cap A) =$

$$= \int_{F \cap A} d(\lambda + \mu)$$

luego $\displaystyle\int_{F \cap A} g \, d(\lambda + \mu) = \int_{F \cap A} d(\lambda + \mu)$

entonces $\displaystyle\int (1 - g) \, d(\lambda + \mu) = 0$

$F \cap A$

Pero en $F \cap A$ $\quad 1 - g(x) > 0$

resulta que

$$0 = (\lambda + \mu)(F \cap A) = \lambda(F \cap A) + \underbrace{\mu(F \cap A)}_{0} =$$

$$= \lambda(F \cap A) = \lambda_1(F)$$

Probamos que $\lambda_1(F) = 0$ o sea $\lambda_1 << \mu$

$(\lambda_2 \perp \mu)$

Sabemos que $\lambda_2(A) = \lambda(A \cap B) = \lambda(\phi) = 0$

$$\lambda(B) = \int_B g \, d(\lambda + \mu) \geq \int_B d(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu)(B) =$$

$$= \lambda(B) + \mu(B)$$

de aquí $\mu(B) = 0$

o sea $\lambda_2 \perp \mu$

Para el caso general escribimos

$\lambda = \alpha + \beta i$ con α y β reales

Aplicamos lo anterior y obtenemos que

$$\alpha^+ = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{con } \alpha_1 << \mu \quad \alpha_2 \perp \mu$$
$$\alpha^- = \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{con } \alpha_3 << \mu \quad \alpha_4 \perp \mu$$
$$\beta^+ = \beta_1 + \beta_2 \quad \text{con } \beta_1 << \mu \quad \beta_2 \perp \mu$$
$$\beta^- = \beta_3 + \beta_4 \quad \text{con } \beta_3 << \mu \quad \beta_4 \perp \mu$$

Ponemos $\lambda_1 = (\alpha_1 - \alpha_3) + i(\beta_1 - \beta_3)$

$\lambda_2 = (\alpha_2 - \alpha_4) + i(\beta_2 - \beta_4)$

Es claro que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

y $\lambda_1 << \mu$ es obvio

Veamos que $\lambda_2 \perp \mu$

Sean (M_1, N_1), (M_2, N_2), (M_3, N_3), (M_4, N_4) 4 particiones de X con elementos de $\mathcal{A}$ tal que

$$\mu(M_1) = \mu(M_2) = \mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$$
$$\alpha_2(N_1) = \alpha_4(N_2) = \beta_2(N_3) = \beta_4(N_4) = 0$$

Considero $A = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$

$B = N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4$

$\{A, B\}$ es una partición de X, $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) \leq \mu(M_1) + \mu(M_2) + \mu(M_3) + \mu(M_4) = 0$$

o sea $\mu(A) = 0$

$$0 \leq |\lambda_2|(B) \leq \alpha_2(B) + \alpha_4(B) + \beta_2(B) + \beta_4(B) = 0$$

$\Rightarrow |\lambda_2|(B) = 0$

o sea $\lambda_2 \perp \mu$