Clase 23

jueves, 07 de noviembre de 2019 20:22

Medidas Complejas

Def 206 Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible

$\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es una medida compleja si

1) $\lambda(\phi) = 0$

2) Si (E_n) ~~sucesión~~ de conjuntos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos se tiene que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Si $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \lambda_1(E) + i\lambda_2(E)$

con λ_1 y λ_2 son medidas reales.

Observaciones:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ es absolutamente convergente

b) Como λ_1 y λ_2 están acotados en $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda$ está acotada en $\mathcal{A}$

c) Se puede escribir

$$\lambda = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)$$

d) Para cada $E \in \mathcal{A}$, ponemos $\mathcal{F}(E)$ la familia de las particiones finitas de E con elementos de $\mathcal{A}$

Ponemos

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}(E) \right\}$$

$|\lambda| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ (es la variación total)

Proposición 207 : $|\lambda|$ está acotada en $\mathbb{R}$

Dem: Para cada $E \in \mathcal{A}$

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}(E) \right\} \leq$$

$\hookrightarrow \lambda_1 + i\lambda_2$

$$\leq \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_1(E_j)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}(E) \right\} + \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_2(E_j)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}(E) \right\}$$

$$= |\lambda_1|(E) + |\lambda_2|(E) \leq |\lambda_1|(X) + |\lambda_2|(X) < \infty$$

Proposición 208 : Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ entonces

$$|\lambda|(A) \leq |\lambda|(B)$$

Dem: Como $|\lambda|(A)$ es finita, dado $\varepsilon > 0$ cualesquiera.

existe una partición $\{E_1, \ldots, E_n\}$, $E_i \in A \; \forall i$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| \geq |\lambda|(A) - \varepsilon$$

Sea $E_{n+1} = B - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

entonces $\{E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}\} \in \mathcal{P}(B)$

y $|\lambda|(B) \geq \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda(E_i)| \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| \geq |\lambda|(A) - \varepsilon$

Como $\varepsilon > 0$ y arbitrario $\Rightarrow$

$$|\lambda|(A) \leq |\lambda|(B)$$

Teorema 209: $|\lambda|$ es una medida finita

Dem: Que $|\lambda|$ es finita es consecuencia de la prop 207

$$0 \leq |\lambda|(\phi) \leq \overset{=0}{|\lambda_1|(\phi)} + \overset{=0}{|\lambda_2|(\phi)} = 0$$

$$|\lambda|(\phi) = 0$$

Sea (E_n) disjuntos dos a dos y $E_i \in A \; \forall i$

Consideremos el conjunto E_n y sea $|\lambda|(E_n)$
Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe una partición

$$\{E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots, E_{n_{p(n)}}\} \in \mathcal{F}(E_n)$$

$$|\lambda|(E_n) \leq \sum_{j=1}^{p(n)} |\lambda(E_{n_j})| + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\{E_{n_j} : n = 1, \ldots, m \quad j: 1, \ldots, p(n)\} \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right)$$

$$E_{n_j} \in \mathcal{A} \ \forall n, j$$

Se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{p(n)} |\lambda(E_{n_j})| \leq |\lambda|\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right)$ por definición

Como $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{m} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces a partir de la

prop 208 se cumple que

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{p(n)} |\lambda(E_{n_j})| \leq |\lambda|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{m} |\lambda|(E_n) \leq \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{p(n)} |\lambda(E_{n_j})| + \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^n} <$$

$$< |\lambda|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \varepsilon$$

Como ε arbitrario y positivo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \quad (1)$$

Para el ε dado

consideremos $\quad \{F_1, \dots, F_n\} \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$

de tal manera $\quad \sum_{j=1}^{n} |\lambda(F_j)| \geq |\lambda|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) - \varepsilon$

Sea $\{(E_r \cap F_j) \ j=1,\dots,n\} \in \mathcal{P}(E_r) \quad \forall r$

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_r \cap F_j)| \leq |\lambda|(E_r)$$

entonces

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\lambda|(E_r) \geq \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_r \cap F_j)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} |\lambda(E_r \cap F_j)| \geq \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{r=1}^{\infty} \lambda(E_r \cap F_j)\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\lambda(F_j)| \geq |\lambda|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) - \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ arbitrario

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\lambda|(E_r) \geq |\lambda|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \quad (2)$$

de (1) y (2) se deduce que

$$|\lambda|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

Definición 2.10: $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida

Sean λ, μ medidas sobre $\mathcal{A}$

Diremos que λ es absolutamente continua con respecto a μ si siempre que $\mu(E) = 0$ $(E \in \mathcal{A})$ se tiene que $\lambda(E) = 0$

Lo notaremos $\lambda << \mu$

Proposición 2.11: Si λ es real y $\lambda << \mu$ se cumple que

$$\lambda^+ << \mu, \quad \lambda^- << \mu \quad y \quad |\lambda| << \mu$$

Dem: Sea $\{A, B\}$ la descomposición de Hahn de X relativa a λ y A es positivo y B es negativo

Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = 0$

$$0 \leq \mu(E \cap A) \leq \mu(E) = 0$$

$$0 \leq \mu(E \cap B) \leq \mu(E) = 0$$

$$\lambda^+(E) = \lambda(E\cap A) \overset{\lambda \ll \mu}{=} 0 \longrightarrow \lambda^+ \ll \mu$$

$$\lambda^-(E) = -\lambda(E\cap B) \overset{\lambda \ll \mu}{=} 0 \longrightarrow \lambda^- \ll \mu$$

$$|\lambda|(E) = \underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda^+(E)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda^-(E)}} = 0 \longrightarrow |\lambda| \ll \mu$$

Proposición 2.12: Sean h y k dos funciones de X en $\mathbb{R}^+$ μ-integrables. Si

$$f = \max(h, k)$$

y se cumple que

$$\int_E h \, d\mu \leq |\lambda|(E)$$

$$\int_E k \, d\mu \leq |\lambda|(E)$$

para cada $E \in \mathcal{A}$ entonces

$$\int_E f \, d\mu \leq |\lambda|(E)$$

Dem. Sean

$$A = \{x \in X : h(x) \geq k(x)\}$$

$$B = \{x \in X : h(x) < k(x)\}$$

$A, B \in \mathcal{A}$, $\quad A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = X$

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E\cap A} h\,d\mu + \int_{E\cap B} h\,d\mu \leq |\lambda|(E\cap A)+|\lambda|(E\cap B)=|\lambda|(E)$$

Def 213: Sea $\mathcal{G}$ la familia de las funciones h reales no negativas definidas en X y μ-integrables tales que

$$\int_E h\,d\mu \leq |\lambda|(E)$$

para todo $E \in \mathcal{A}$

Proposición 214: Si μ es σ-finita y $\lambda \ll \mu$ existe $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$\int_E g\,d\mu = |\lambda|(E)$$

$\forall E \in \mathcal{A}$

Dem: Pendiente hasta la próxima clase

Teorema 215 (Radon-Nikodym)

Si la medida μ es σ-finita y $\lambda \ll \mu$ existe una función compleja f definida en X y μ-integrable de manera que

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{A}$

Dem: Sea $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$

con λ_1 y λ_2 reales.

$\lambda_1 << \mu$ y $\lambda_2 << \mu$ es claro

Aplicando la prop 2.11 se tiene que

$\lambda_1^+, \lambda_1^-, \lambda_2^+, \lambda_2^-$ son absolutamente

continuos con respecto a μ

Aplicando la prop 2.14 a $\lambda_1^+, \lambda_1^-, \lambda_2^+, \lambda_2^-$

obtenemos f_1, f_2, f_3, f_4 definidas en X, no negativas, μ-integrables tal que

$$\lambda_1^+(E) = \int_E f_1 \, d\mu$$

$$\lambda_1^-(E) = \int_E f_2 \, d\mu$$

$$\lambda_2^+(E) = \int_E f_3 \, d\mu$$

$$\lambda_2^-(E) = \int_E f_4 \, d\mu$$

Si pongo $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$

$$\lambda(E) = \lambda_1^+(E) - \lambda_1^-(E) + i\left(\lambda_2^+(E) - \lambda_2^-(E)\right) =$$

$$= \int_E f_1 \, d\mu - \int_E f_2 \, d\mu + i\left(\int_E f_3 \, d\mu - \int_E f_4 \, d\mu\right) =$$

$$= \int_E (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4) \, d\mu =$$

$$= \int_E f \, d\mu$$

Nota: Si λ es real entonces $\lambda_2 = 0$

$f = f_1 - f_2$ la cual es real