Clase 22

jueves, 31 de octubre de 2019 20:38

Def 198: Si $\{A, B\}$ es una descomposición de Hahn de X para la medida signada λ, definimos para cada $E \in \mathcal{A}$

$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap A)$ y $\lambda^-(E) = -\lambda(E \cap B)$

Es claro que λ^+ y λ^- son medidas definidas en $\mathcal{A}$ y por la proposición 197, λ^+ y λ^- no dependen de la descomposición elegida.

A λ^+ le llamaremos variación superior de λ y a λ^- le llamaremos variación inferior de λ

La función $|\lambda|$ definida sobre $\mathcal{A}$ mediante:

Para cada $E \in \mathcal{A}$ $\quad |\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E)$

también es una medida

A $|\lambda|$ le llamaremos variación total de λ

Por otro lado $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ o sea toda medida signada es la diferencia de dos medidas

En general esta representación no es única

Veamos: si ν es otra medida finita en $\mathcal{A}$

entonces $\lambda = (\lambda^+ + \vartheta) - (\lambda^- + \vartheta)^{+}$

Si $M \in \mathcal{A}$ y $\lambda^+(M) = \infty$

$\lambda(M) = \lambda(M \cap A) + \lambda(M \cap B) = \infty + \lambda(M \cap B)$

Pero $\lambda(M \cap B) = -\lambda^-(M)$ por lo tanto

$\lambda^-(M)$ debe ser finito

Análogamente si $\lambda^-(M) = \infty$ entonces

$\lambda^+(M)$ es finito

Hemos probado entonces el siguiente teorema

Teorema 199 (Jordan) Las variaciones superior, inferior y total de λ son medidas

Además $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ y resulta siempre que una de esas medidas es finita. (λ^+ o λ^-)

Def 200 A la descomposición $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ se le llama descomposición de Jordan de λ

Proposición 2.0.1 Si λ es real entonces $|\lambda|(X) < \infty$

Dem: Sean A, B con A positivo, B negativo (respecto a λ)

$$A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \cup B = X$$

$$|\lambda|(X) = \lambda^+(X) + \lambda^-(X) = \lambda(X \cap A) - \lambda(X \cap B) = \lambda(A) - \lambda(B) \neq \infty$$

Corolario 2.0.2 Si λ es real, $|\lambda|$ está acotada en $\mathcal{A}$

Dem: $E \subset X \qquad |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) < \infty$

obs $\quad |\lambda(E)| = |\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B)| = |\lambda^+(E) - \lambda^-(E)| \leq$

$$\leq \lambda^+(E) + \lambda^-(E) = |\lambda|(E)$$

Proposición 2.0.3 Se tiene para cada $E \in \mathcal{A}$ que

$$\lambda^+(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subset E, F \in \mathcal{A}\}$$

$$\lambda^-(E) = -\inf\{\lambda(F) : F \subset E, F \in \mathcal{A}\}$$

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| : \{E_1, \ldots, E_n\} \in \mathcal{P}(E)\right\}$$

donde $\mathcal{P}(E)$ es la familia de todas las particiones finitas de E formadas por conjuntos de $\mathcal{A}$

Dem: A cargo del lector

Las integrales como medidas signadas

Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f: X \to \mathbb{R}^*$ μ-integrable sea para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

$\lambda: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\lambda(\emptyset) = 0$ y si $(E_n) \in \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

o sea λ es una medida real

Sea $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$

$B = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$

Proposición 204: $\{A, B\}$ es una descomposición de Hahn de X relativa a λ

Dem: Sea $E \subset A$ como $\forall x \in E$, $f(x) > 0$ entonces $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \geq 0$

por lo tanto A es positivo

Sea $E \subset B$, $f(x) \leq 0$ $\forall x \in E$ entonces $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \leq 0$

por lo cual B es negativo
es claro que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$

Proposición 205 Se tiene que $|\lambda|(E) = \int_E |f| \, d\mu$ $E \in \mathcal{A}$

Dem:

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E) = \lambda(E \cap A) - \lambda(E \cap B) =$$

$$= \int_{E\cap A} f \, d\mu - \int_{E \cap B} f \, d\mu = \int_{E\cap A} |f| \, d\mu + \int_{E\cap B} |f| \, d\mu =$$

$$= \int_E |f| \, d\mu$$