Clase 21

jueves, 31 de octubre de 2019 20:31

Proposición 190: a) Si A es un conjunto positivo y $B \in \mathcal{A}$ entonces $A - B$ es un conjunto positivo

b) Si A es un conjunto negativo y $B \in \mathcal{A}$ entonces $A - B$ es un conjunto negativo

Dem: a) Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \subset A - B$ como $E \subset A$ y como A es positivo $\lambda(E) \geq 0$

b) A cargo del lector.

Proposición 191: Si (A_n) es una sucesión de conjuntos positivos entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es positivo

Dem: Primero veamos que la unión finita de positivos es positivo

~~Sea~~ probaremos por inducción completa.

A_1 es positivo por hipótesis y consideremos que $\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ es positivo

Sea $B_1 = A_1$, sea $B_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$

B_n es positivo por la prop 190

$\bigcup^{n} A_n = \bigcup^{n} B_n$ (Los B_n son disjuntos)

$\bigcup_{j=1}^{n} A_n = \bigcup_{j=1}^{n} B_n$ (Los B_n son disjuntos)

Sea $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_n$, $E \in \mathcal{A}$

$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} (B_n \cap E)\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(B_n \cap E) \geq 0$

A partir de esto (B_n) es positiva $\forall n$,

B_n disjuntos, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

Sea $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n \cap E) \geq 0$

Proposición 192 Si (A_n) es una sucesión de conjuntos negativos entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es negativa

Dem: Análoga a 191.

Proposición 193: Si λ no toma el valor $+\infty$ se tiene que $\sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{P}\} < +\infty$

Dem: Supongamos que $\sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{P}\} = +\infty$

Para cada $n > 0$ hallamos $P_n \in \mathcal{P}$ tal que $\lambda(P_n) \geq n$

Sea $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ por la prop 192 B_n es positivo

Además $P_n \subset B_n$ luego $\lambda(P_n) \leq \lambda(B_n)$

$\lambda(B_n) \geq \lambda(P_n) \geq n$

(B_n) es creciente luego

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_n \lambda(B_n) = +\infty$$

esto contradice la hipótesis

Proposición 194: Si λ no toma el valor $-\infty$ se tiene que $\inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{S}\} > -\infty$

Dem: Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos $\mu(A) = -\lambda(A)$

Es evidente que μ es una medida signada, definida en $\mathcal{A}$. $\mathcal{N}$ es la familia de los conjuntos positivos de μ

Como λ no toma el valor $-\infty$ entonces μ no toma el valor $+\infty$; entonces aplico la proposición 193.

$$-\inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{S}\} = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{S}\} < +\infty$$

luego $\inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{S}\} > -\infty$

Teorema 195 (Hahn) Existen dos conjuntos A, B en $\mathcal{A}$ tal que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$ con A positivo y B negativo

Dem: Supongamos primero que λ no toma el valor $-\infty$.

Se tiene que $\beta = \inf\{\lambda(D) : D \in \mathcal{S}\} > -\infty$ por la proposición 194.

Entonces dado $n > 0$ encontramos $D_n \in \mathcal{S}$ tal que $\lambda(D_n) < \beta + \frac{1}{n}$

Ponemos:

$B_n = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$ entonces $B_n \in \mathcal{S}$ y (B_n) es creciente

$$\lambda(B_n) \leq \lambda(D_n) < \beta + \frac{1}{n}$$

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B \in \mathcal{S}$ y

$$\lambda(B) = \lim_n \lambda(B_n) = \beta$$

Sea $A = X - B$

Veamos que A es positivo

Si A no fuese positivo hallamos $E \in \mathcal{A}$ $E \subset A$ tal que $\lambda(E) < 0$

E es no negativo pues si fuese negativo entonces $B \cup E$ sería negativo y como $B \cap E = \phi$ entonces

$\lambda(B \cup E) = \lambda(B) + \lambda(E) = \beta + \lambda(E) < \beta$

y esto es una contradicción luego E es no negativo

Sea p_1 el menor entero positivo tal que existe un subconjunto $E_1 \subset E$, $E_1 \in \mathcal{A}$ con

$$\lambda(E_1) \geq \frac{1}{p_1}$$

Es claro que $\lambda(E)$ y $\lambda(E_1)$ son finitos luego

$$\lambda(E - E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) \leq \lambda(E) - \frac{1}{p_1} < 0$$

Procediendo por recurrencia supongamos que hemos hallado $E_j \in \mathcal{A}$, $E_j \subset A$ $j = 1, \dots, n$

$$\lambda(E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j) < 0$$

Razonando de la misma manera que para E resulta que $E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es no negativo

Sea p_{n+1} el menor entero positivo tal que existe $E_{n+1} \in \mathcal{A}$, $E_{n+1} \subset E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j \subset A$

y $\lambda(E_{n+1}) \geq \frac{1}{p_{n+1}}$

Se tiene que

$$\lambda(E - \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j) = \lambda((E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j) - E_{n+1}) \leq$$

$$\lambda(E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j) - \lambda(E_{n+1}) \leq \lambda(E - \bigcup_{j=1}^{n} E_j) - \frac{1}{p_{n+1}} \leq 0$$

Los E_n son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$ luego

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$$

Luego $\lim_n \frac{1}{p_n} = 0$

Sea $F = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces

$$\lambda(F) = \lambda(E) - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < 0$$

Veamos ahora que F es un conjunto negativo

Si no fuera así existiría $H \subset F$, $H \in \mathcal{A}$

tal que $\lambda(H) > 0$

Sea $p_{n_k} > 0$ tal que $\lambda(H) > \frac{1}{p_{n_k}}$ $\circledast$

Como $F \subset E - \bigcup_{n=1}^{n_k} E_n$ luego $H \subset E - \bigcup_{n=1}^{n_k} E_n$

Sea ahora n_{k+1} el menor entero positivo tal que

existe algún elemento de $\mathcal{A}$ contenido en

$E - \bigcup_{n=1}^{n_k} E_n$ cuya medida es igual a $\frac{1}{p_{n_{k+1}}}$

y $\frac{1}{p_{n_k}} > \frac{1}{p_{n_{k+1}}}$

luego $\lambda(H) < \frac{1}{p_{n_k}}$ y esto contradice $\circledast$

O sea F es un conjunto negativo

Finalmente $F \cap B = \phi$ y $F \cup B$ es negativo

$$\lambda(F \cup B) = \lambda(F) + \lambda(B) = \lambda(F) + \beta < \beta$$

y esto es una contradicción entonces A es positivo y esto demuestra el teorema

Definición 196 Si A y B están en las condiciones del teorema 195 se dice que A y B forman una descomposición de Hahn de X para λ.

Proposición 197 Sean $\{A_1, B_1\}$, $\{A_2, B_2\}$ dos descomposiciones de Hahn de X para la medida λ. Entonces para cada $E \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\lambda(E \cap A_1) = \lambda(E \cap A_2)$$

$$\lambda(E \cap B_1) = \lambda(E \cap B_2)$$

Dem:

Ya que $E \cap (A_1 - A_2) \subset A_1$

entonces $\lambda(E \cap (A_1 - A_2)) \geq 0$

Por otra parte $E \cap (A_1 - A_2) \not\subset A_2$

Luego $E \cap (A_1 - A_2) \subset B_2$

por lo tanto $\lambda(E \cap (A_1 - A_2)) \leq 0$

entonces $\lambda(E \cap (A_1 - A_2)) = 0$

(*) Verificar análogamente que $\lambda(E \cap (A_2 - A_1)) = 0$

Se verifica la igualdad

$$E \cap (A_1 \cup A_2) = \underbrace{E \cap (A_1 - A_2) \cup E \cap (A_2 - A_1) \cup (E \cap A_1 \cap A_2)}_{\text{disjuntos dos a dos}}$$

$$\lambda(E\cap(A_1\cup A_2)) = \underbrace{\lambda(E\cap(A_1-A_2))}_{=0} + \underbrace{\lambda(E\cap(A_2-A_1))}_{=0} + \lambda(E\cap A_1\cap A_2)$$

$$\lambda(E\cap(A_1\cup A_2)) = \lambda(E\cap A_1\cap A_2)$$

$$E\cap A_1\cap A_2 \subset E\cap A_1 \subset E\cap(A_1\cup A_2)$$

$$\lambda(E\cap A_1\cap A_2) \leq \lambda(E\cap A_1) \leq \lambda(E\cap(A_1\cup A_2))$$

Idem $\lambda(E\cap A_1\cap A_2) \leq \lambda(E\cap A_2) \leq \lambda(E\cap(A_1\cup A_2))$

entonces $\lambda(E\cap A_1) = \lambda(E\cap A_2) = \lambda(E\cap A_1\cap A_2)$

Análogamente pruebo $\lambda(E\cap B_1) = \lambda(E\cap B_2) = \lambda(E\cap B_1\cap B_2)$