Clase 20

Friday, October 25, 2019 7:20 PM

Teorema 181 (Fubini) Sean $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ tales que λ y μ son σ-finitas

Sea $f(x,y)$ una función de $X \times Y$ en $\mathbb{R}^*_+$ $\lambda\times\mu$ medible

Se cumple que

1) Para cada $x \in X$, $f(x,y)$ es una función de y μ-medible
2) Para cada $y \in Y$, $f(x,y)$ es una función de x λ-medible
3) $\int_X f(x,y)\, d\lambda$ es una función de y, μ-medible
4) $\int_Y f(x,y)\, d\mu$ es una función de x, λ-medible
5) $$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\, d\lambda$$

Dem: Consideremos primero $f = \chi_E$ con E $\lambda\times\mu$ medible

Para cada $x \in X$, $\chi_E(x,y)$ es la función característica de E_x y por la prop 170 esta función es μ-medible

Para cada $y \in Y$, $\chi_E(x,y)$ es la función característica de E_y y por lo tanto es λ-medible

Por la prop 179 $\lambda(E_y) = \int_X \chi_E(x,y)\, d\lambda$ es una función de y μ-medible.

Idem $\mu(E_x) = \int_Y \chi_E(x,y)\, d\mu$ es una función de x λ-medible

$$\lambda \times \mu (E) = \int_{X \times Y} \chi_E(x,y)\, d(\lambda \times \mu)$$ y resulta que

$$\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\, d(\lambda\times\mu) = \int_Y d\mu \int_X \chi_E(x,y)\, d\lambda = \int_X d\lambda \int_Y \chi_E(x,y)\, d\mu$$

O sea las funciones características de elementos $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ verifican el teorema

Sea ahora f una función simple: $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$

con $\{E_1, ..., E_n\}$ una partición de $X \times Y$ con $E_j \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ y $a_j \in \mathbb{R}$ para todo j

Para cada $x \in X$ y para todo j, $\chi_{E_j}(x,y)$ es una función de y, μ-medible $\Rightarrow f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ es una función de y, μ-medible

Idem para cada $y \in Y$, $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ es una función de x, λ-medible

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right) d\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_X \chi_{E_j}(x,y)\, d\lambda$$. Para todo j cada una de esas integrales es μ-medible luego su suma lo es $\int_X f(x,y)\, d\lambda$ es μ-medible

$\tilde{x}$

Idem $\int_Y \left(\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}\right) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \int_Y \chi_{E_j}(x,y)\, d\mu$ y

por lo tanto $\int_Y f(x,y)\, d\mu$ es una función de x

λ-medible

Además

$$\int_{X\times Y} \left(\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x,y)\right) d(\lambda\times\mu) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{X\times Y} \chi_{E_j}(x,y)\, d(\lambda\times\mu)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \int_X d\lambda \int_Y \chi_{E_j}(x,y)\, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \int_Y d\mu \int_X \chi_{E_j}(x,y)\, d\lambda$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\int_X d\lambda \int_Y \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x,y)\, d\lambda$$

o sea las funciones simples verifican el teorema.

Vamos al caso general donde $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$
y es $\lambda\times\mu$ medible
Existe una sucesión (f_n) creciente de funciones
simples medibles (en $X\times Y$) que converge puntualmente
a f
Para cada n entero positivo f_n cumple las propiedades
del teorema pues son funciones simples

Al ser $f(x,y) = \lim_n f_n(x,y)$ las condiciones 1) y 2) se cumplen claramente

Aplicamos el teorema de convergencia monótona de Lebesgue y obtenemos

$$\int_X f(x,y)\, d\lambda = \int_X \lim_n f_n(x,y)\, d\lambda = \lim_n \int_X f_n(x,y)\, d\lambda$$

ya sabemos que $\int_X f_n(x,y)\, d\lambda$ es una función de y μ-medible

$\Rightarrow \int_X f(x,y)\, d\lambda$ es una función de y μ-medible

Análogamente $\int_Y f(x,y)\, d\mu = \lim_n \int_Y f_n(x,y)\, d\mu$ luego es

una función de x, λ-medible

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\mu) = \int_{X\times Y} \lim_n f_n(x,y)\, d(\lambda\times\mu) \overset{\text{convergencia monótona}}{=} \lim_n \int_{X\times Y} f_n(x,y)\, d(\lambda\times\mu)$$

$$= \lim_n \int_X d\lambda \int_Y f_n(x,y)\, d\mu = \lim_n \int_Y d\mu \int_X f_n(x,y)\, d\lambda$$

$$\int_X d\lambda \lim_n \int_Y f_n(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \lim_n \int_X f_n(x,y)\, d\lambda$$

$$\int_X d\lambda \int_Y \lim_n f_n(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X \lim_n f_n(x,y)\, d\lambda$$

$$\int_X d\lambda \int_Y \lim_n f_n(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X \lim_n f_n(x,y)\, d\lambda$$

$$\|$$

$$\int_X d\lambda \int_Y f(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\, d\lambda$$

Teorema 182 Sea $f(x,y)$ una función de $X\times Y$ en $\mathbb{R}^*$ $\lambda\times\mu$ integrable

Se tiene que

1) Para casi todo $x\in X$, $f(x,y)$ es una función de y μ-integrable

2) Para casi todo $y\in Y$, $f(x,y)$ es una función de x λ-integrable

3) $\int_Y f(x,y)\, d\mu$ es una función de x definida en casi todo punto y λ-integrable

4) $\int_X f(x,y)\, d\lambda$ es una función de y definida en casi todo punto y μ-integrable

5) $$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\, d\lambda$$

Dem: $f = f^+ - f^-$. Como f es integrable entonces f^+ y f^-

son $\lambda\times\mu$-integrables

Por el teorema 181 $\int_Y f^+(x,y)\, d\mu$ es λ-medible

y $\int_X d\lambda \int_Y f^+(x,y)\, d\mu = \int_{X\times Y} f^+(x,y)\, d(\lambda\times\mu) < \infty$

entonces $\int f^+(x,y)\, d\mu$ es una función de x λ-medible entonces $\int_Y f^+(x,y)\,d\mu$ es una función de x, λ-medible

finita salvo en un conjunto $E \subset X$ tal que $\lambda(E)=0$

Idem $\int_Y f^-(x,y)\,d\mu$ es una función de x, λ-medible

y finita salvo en un conjunto $F \subset X$ tal que $\lambda(F)=0$

Si $x \in X-(E\cup F)$ entonces

$$\int_Y f^+(x,y)\,d\mu \quad y \quad \int_Y f^-(x,y)\,d\mu \quad \text{son finitas}$$

o sea $\int_Y f(x,y)\,d\mu = \int_Y f^+(x,y)\,d\mu - \int_Y f^-(x,y)\,d\mu < \infty$

para $x \in X-(E\cup F)$ o sea $f(x,y)$ es integrable para $x \in X-(E\cup F)$ y $\lambda(E\cup F)=0$

El punto 2) sale igual.

3) $\int_Y f(x,y)\,d\mu$ va a estar definida en todos los

punto x excepto en aquellos que $\int_Y f^+\,d\mu$ e $\int_Y f^-\,d\mu$

sean $+\infty$ luego $\int_Y f(x,y)\,d\mu$ esta definida

para todo $x \in X-(E\cap F)$ pero $\lambda(E\cap F) \leq \lambda(E)=0$

para todo $x \in X-(E\cap F)$ pero $\lambda(E\cap F) \leq \lambda(E) = 0$

o sea $\int_Y f(x,y)\,d\mu$ esta definida en ctp de X

Veamos que es λ-integrable

Sea $h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x \in X-(E\cup F) \\ 0 & x \in E\cup F \end{cases}$

$h(x,y) = f(x,y)$ es ctp $X\times Y$ pues $(E\cup F)\times Y$ tiene $\lambda\times\mu$ medida nula

Además si $x \in X-(E\cup F)$

$$\int_Y h^+(x,y)\,d\mu = \int_Y f^+(x,y)\,d\mu$$

$$\int_Y h^-(x,y)\,d\mu = \int_Y f^-(x,y)\,d\mu$$

y si $x \in E\cup F$ $\quad \int_Y h^+\,d\mu = \int_Y h^-\,d\mu = 0$

o sea

$\int_Y h(x,y)\,d\mu = \int_Y f(x,y)\,d\mu$ si $x \in X-(E\cup F)$

$$\int_Y h(x,y)\,d\mu = 0 \text{ si } x \in E\cup F$$

Entonces me alcanza probar que $\int_Y h(x,y)\,d\mu$ es λ-integrable.

[illegible]

$$\int_Y h\, d\mu = \int_Y h^+\, d\mu - \int_Y h^-\, d\mu$$ funciones finitas y λ-medibles

y $$\int_X d\lambda \int_Y h^+\, d\mu = \int_{X\times Y} h^+\, d(\lambda\times\mu) = \int_{X\times Y} f^+\, d(\lambda\times\mu) < \infty$$

$$\int_X d\lambda \int_Y h^-\, d\mu = \int_{X\times Y} h^-\, d(\lambda\times\mu) = \int_{X\times Y} f^-\, d(\lambda\times\mu) < \infty$$

luego $\int_Y h(x,y)\, d\mu$ es λ-integrable

Además

$$\int_{X\times Y} f\, d(\lambda\times\mu) = \int_{X\times Y} h\, d(\lambda\times\mu) = \int_{X\times Y} h^+\, d(\lambda\times\mu) - \int_{X\times Y} h^-\, d(\lambda\times\mu) =$$

$$= \int_X d\lambda \int_Y h^+\, d\mu - \int_X d\lambda \int_Y h^-\, d\mu = \int_X d\lambda \int_Y h\, d\mu =$$

$$= \int_X d\lambda \int_Y f\, d\mu \quad (A)$$

Análogamente demuestro 4) o sea $\int_X f\, d\lambda$ es μ-integrable y que

$$\int_{X\times Y} f\, d(\lambda\times\mu) = \int_Y d\mu \int_X f\, d\lambda \quad (B)$$

5) sale de (A) y (B)

Teorema 183 (Fubini)

Sea $f(x,y)$ una función compleja definida en $X \times Y$ y $(\lambda \times \mu)$ integrable.

Se tiene

1) Para casi todo x, $f(x,y)$ es una función de y μ-integrable
2) Para casi todo y, $f(x,y)$ es una función de x λ-integrable
3) $\int_Y f(x,y)\,d\mu$ es una función de x definida en ctp, λ-integrable
4) $\int_X f(x,y)\,d\lambda$ es una función de y definida en ctp, μ-integrable
5) $$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\lambda\times\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y)\,d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\,d\lambda$$

Dem: $f = f_1 + i f_2$ con f_1 y f_2 reales.

Como f es integrable entonces f_1 y f_2 son $(\lambda\times\mu)$ integrables

Entonces puedo aplicar el teorema anterior.

f_1 y f_2 son para casi todo x funciones de y, μ-integrables entonces para casi todo x $f(x,y)$ es una función de y μ-integrable

Idem para casi todo y $f(x,y)$ es una función de x μ-integrable

Las funciones de x $\int_Y f_1\,d\mu$ y $\int_Y f_2\,d\mu$ están

definidas en ctp y son λ-integrables luego

$\int_Y f\,d\mu = \int_Y f_1\,d\mu + i\int_Y f_2\,d\mu$ luego esta definida en ctp y es λ- integrable

Idem $\int_X f \, d\lambda$ esta definida en ctp y y

es μ- integrable

5) es inmediato a partir del teorema 182

Teorema 184 (Tonelli)

Sea $f(x,y)$ una función de $X \times Y$ ~~en~~ $\mathbb{R}^*$
$(\lambda \times \mu)$-medible
Si alguna de las integrales iteradas

$$\int_X d\lambda \int_Y |f(x,y)| \, d\mu \quad , \quad \int_Y d\mu \int_X |f(x,y)| \, d\lambda$$

es finita entonces $f(x,y)$ es $(\lambda \times \mu)$ - integrable

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \, d(\lambda \times \mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y) \, d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y) \, d\lambda$$

Dem: Como $|f(x,y)|$ es una función de $X \times Y$ en $\mathbb{R}^*_+$
$(\lambda \times \mu)$ - medible puedo aplicar Fubini (teorema 181)
y obtengo que

$$\int |f(x,y)| \, d(\lambda \times \mu) = \int d\lambda \int |f(x,y)| \, d\mu = \int d\mu \int |f(x,y)| \, d\lambda \underset{\text{por hip}}{<} \infty$$

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\lambda\times\mu) = \int_X d\lambda \int_Y |f(x,y)|\, d\mu = \int_X d\mu \int_Y |f(x,y)|\, d\lambda < \infty$$

o sea $|f(x,y)|$ es $\lambda\times\mu$- integrable

$$\underbrace{-\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\lambda\times\mu)}_{> -\infty} \leq \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\mu) \leq \underbrace{\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\lambda\times\mu)}_{< +\infty}$$

luego $f(x,y)$ es $\lambda\times\mu$ integrable

Basta aplicar teorema 182 para obtener la conclusión

Teorema 185 (Tonelli) Sea $f(x,y)$ una función compleja en $X\times Y$ $(\lambda\times\mu)$-medible.
Si alguna de las integrales iteradas

$$\int_X d\lambda \int_Y |f(x,y)|\, d\mu \quad , \quad \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\, d\lambda$$

es finita entonces $f(x,y)$ es $(\lambda\times\mu)$- integrable

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\mu) = \int_X d\lambda \int_Y f(x,y)\, d\mu = \int_Y d\mu \int_X f(x,y)\, d\lambda$$

Dem: Se omite

Medidas con signo

Definición 186: Dado un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ σ-álgebra sobre X.

Una aplicación $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ se dice que es una medida signada si se cumple

a) $\lambda(\phi) = 0$

b) Si (E_n) es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

está bien definida y

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Proposición 187:

1) Si $E, F \in \mathcal{A}$, $E \subset F$ y $\lambda(E)$ finito $\Rightarrow \lambda(F-E) = \lambda(F) - \lambda(E)$

2) Si $E, F \in \mathcal{A}$ $E \subset F$ y $\lambda(E)$ no es finito $\Rightarrow \lambda(E) = \lambda(F)$

3) Si $E, F \in \mathcal{A}$ $E \subset F$, $\lambda(F)$ es finito $\Rightarrow \lambda(E)$ es finito

4) Si $E, F \in \mathcal{A}$ Si $\lambda(E) = +\infty \Rightarrow \lambda(F) \neq -\infty$

" " " si $\lambda(E) = -\infty \Rightarrow \lambda(F) \neq +\infty$

5) Si (E_n) creciente en $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \lambda(E_n)$

6) Si (E_n) decreciente en $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(E_1)$ es finito entonces $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \lambda(E_n)$

Dem: A cargo del lector.

Proposición 188: Si (E_n) es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ es finita entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ es absolutamente convergente

Dem: Para cada $n>0$ es claro $E_n \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$

entonces $\lambda(E_n)$ es finito para todo n

Por otra parte $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$

Sea σ una aplicación biyectiva de $\{1,2,\ldots\}$ en sí mismo

Resulta que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\sigma(n)}$ por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(n)})$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ es convergente $\Rightarrow$ cualquier serie reordenada $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(n)})$ es convergente luego la serie es absolutamente convergente.

Definición 189: Se dice que $A \in \mathcal{A}$ es positivo si para todo $E \subset A$, $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) \geq 0$

Se dice que $A \in \mathcal{A}$ es negativo si para todo $E \subset A$, $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) \leq 0$

<u>obs</u> El conjunto vacío es positivo y negativo.

Representaremos por $\mathcal{P}$ a la familia de todos los conjuntos positivos y por $\mathcal{N}$ a la familia de todos los conjuntos negativos.