Clase 19

jueves, 17 de octubre de 2019 20:27

# Medidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Sean $X, Y$ dos espacios topológicos. Si $X \times Y$ es el espacio topológico producto, notemos por $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ los conjuntos de Borel sobre $X$, $Y$ y $X \times Y$ respectivamente. Representamos por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ la σ-álgebra generada por la familia de conjuntos

$$\{A \times B,\ A \in \mathcal{A} \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$$

Proposición 175 $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$

Demostración: Sea $\mathcal{M} = \{B \subset Y : X \times B \in \mathcal{C}\}$

Si $D$ es abierto en $Y \Rightarrow X \times D$ es abierto en la topología $X \times Y \Rightarrow X \times D \in \mathcal{C}$, por lo tanto $\mathcal{M}$ contiene a los abiertos de $Y$

Si $B \in \mathcal{M} \Rightarrow X \times B \in \mathcal{C}$ pero $(X \times Y) - (X \times B) = X \times B^c$

$X \times Y \in \mathcal{C}$, $X \times B \in \mathcal{C}$ pues $B \in \mathcal{M}$ como $\mathcal{C}$ es σ-álgebra

$(X\times Y)-(X\times B)\in\mathcal{C}$ luego $X\times B^c\in\mathcal{C}$ o sea $B^c\in\mathcal{J}$

Sea $(B_n)$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{J}$ entonces

$$X-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(X-\underbrace{B_n}_{\in\mathcal{C}})\in\mathcal{C}\quad\text{o sea}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{J}$$

Por lo tanto $\mathcal{J}$ es una $\sigma$-álgebra de $Y$ que contiene a los abiertos o sea $\mathcal{J}\supset\mathcal{B}$

Si definimos $\mathcal{S}=\{A\subset X : A\times Y\in\mathcal{C}\}$ análogamente probamos que $\mathcal{S}$ es una $\sigma$-álgebra de $X$ que contiene a los abiertos o sea $\mathcal{S}\supset\mathcal{A}$

Si $A\in\mathcal{A}$ y $B\in\mathcal{B}$ como

$A\in\mathcal{S}\Rightarrow A\times Y\in\mathcal{C}$

$B\in\mathcal{J}\Rightarrow X\times B\in\mathcal{C}$

luego

$$A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)\in\mathcal{C}$$

luego $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$

Proposición 176 Si $X$ e $Y$ son espacios métricos separables entonces $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{C}$

Dem: Como $X$ e $Y$ son E.M separables existen bases numerables $\{A_1, A_2, \dots\}$, $\{B_1, B_2, \dots\}$ de las topologías de $X$ e $Y$ respectivamente. Entonces $\{A_p \times B_q \quad p, q = 1, 2, \dots\}$ es una base de la topología de $X \times Y$

Si $M$ es un abierto en $X \times Y$ existe una sucesión $((p_j, q_j))_{j=1}^{\infty}$ de enteros positivos tales que

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{p_j} \times B_{q_j}$$

Los conjuntos $A_{p_j} \times B_{q_j} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ luego $M \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

luego $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Por la proposición 175 entonces $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Sea $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_n$ la $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$

Por la prop anterior es fácil ver que

$$\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$$

Sea $\lambda_1$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, restringida a $\mathcal{B}_1$. Aplicando los resultados anteriores obtenemos una medida $\lambda_2$ sobre $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ y tal que $\lambda_2(A \times B) = \lambda_1(A)\,\lambda_1(B)$ $A, B \in \mathcal{B}_1$

Como $\lambda_1$ es $\sigma$-finita $\Rightarrow$ $\lambda_2$ es $\sigma$-finita y es única

Llamamos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ a la compleción de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \lambda_2)$

Por recurrencia supongamos tenemos la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda_n)$ con $\lambda_n$ $\sigma$-finita

Entonces podemos construir una medida $\sigma$-finita y única $\lambda_{n+1}$ sobre $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_1$ tal que

$$\lambda_{n+1}(A \times B) = \lambda_n(A)\,\lambda_1(B) \quad A \in \mathcal{B}_n,\ B \in \mathcal{B}_1$$

**Definición 177** Se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ a la compleción de $\lambda_n$

Algunas propiedades que no demostraremos

a) La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslación.

b) Si $\mathcal{L}_n$ es la familia de los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{n+1}$$

c) Sea $\lambda$ la medida sobre $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_1$ tal que $\lambda(A_1 \times A_2) = \lambda_n(A_1)\ \lambda_1(A_2)$ $A_1 \in \mathcal{L}_n$, $A_2 \in \mathcal{L}_1$ entonces la compleción de $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_1, \lambda)$ coincide con $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{L}_{n+1}, \lambda_{n+1})$

Definición 178. Sean $(X, \mathcal{A}, \lambda), (Y, \mathcal{B}, \mu)$ con $\lambda$ y $\mu$ σ-finitas. Sabemos que existe una única medida $\lambda \times \mu$ sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que

$$\lambda \times \mu (A \times B) = \lambda(A)\ \mu(B) \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$$

a $\lambda \times \mu$ la llamamos medida producto.

Proposición 179 Si E es un elemento de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ se cumple que $\lambda(E_y)$ y $\mu(E_x)$ son medibles para cada $(x,y) \in X \times Y$ y se verifica que

$$\int_X \mu(E_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda(E_y)\, d\mu = \lambda \times \mu (E)$$

Dem: Como $\lambda$ y $\mu$ son $\sigma$-finitas existen sucesiones expansivas $(A_p) \in \mathcal{A}$ y $(B_p) \in \mathcal{B}$ tales
$X = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$, $Y = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$ $\lambda(A_p) < \infty$, $\mu(B_p) < \infty\ \forall p$

Sea $\mathcal{M}$ la familia de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ y $(x,y) \in X \times Y$ se cumple para todo $p$ que

$$\lambda((E \cap (A_p \times B_p))_y) \quad y \quad \mu((E \cap (A_p \times B_p))_x)$$

son funciones medibles y

$$\int_X \mu((E \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((E \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\mu =$$

$$= \lambda \times \mu (E \cap (A_p \times B_p))$$

Quiero probar que $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Sea $(F_n)$ una sucesión expansiva en $\mathcal{M}$, sea

Sea $(F_n)$ una sucesión expansiva en $\mathcal{U}_0$ y sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

La sucesión $\left((F_n \cap (A_p \times B_p))_x\right)_{n=1}^{\infty}$ es creciente

y $$\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap (A_p \times B_p))_x = (F \cap (A_p \times B_p))_x$$

Tenemos que $\left(\mu\left((F_n \cap (A_p \times B_p))_x\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y

$$\lim_n \mu\left((F_n \cap (A_p \times B_p))_x\right) = \mu\left((F \cap (A_p \times B_p))_x\right)$$

Análogamente

$$\lim_n \lambda\left((F_n \cap (A_p \times B_p))_y\right) = \mu\left((F \cap (A_p \times B_p))_y\right)$$

Luego $$x \longrightarrow \mu\left((F \cap (A_p \times B_p)_y\right)$$

$$y \longrightarrow \lambda\left((F \cap (A_p \times B_p)_x\right)$$

son medibles

Para todo $n$ tenemos

$$\int \mu((F_n \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\lambda = \int \lambda((F_n \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\mu$$

$$\int_X \mu((F_n \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((F_n \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\mu$$

$$= \lambda \times \mu((F_n \cap (A_p \times B_p)))$$

Puedo aplicar convergencia monótona entonces tomando límites en n

$$\int_X \mu((F \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((F \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\mu$$

$$= \lambda \times \mu(F \cap (A_p \times B_p))$$

o sea $F \in \mathcal{M}$

Consideremos ahora $(G_n)$ decreciente de elementos de $\mathcal{M}$ y sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

La sucesión $\left((G_n \cap (A_p \times B_p))_x\right)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap (A_p \times B_p))_x = (G \cap (A_p \times B_p))_x$$

Como $\mu((G_1 \cap (A_p \times B_p))_x) < \infty$ (1)

entonces

$$\lim_n \mu((G_n \cap (A_p \times B_p))_x) = \mu((G \cap (A_p \times B_p))_x)$$

Análogamente

$$\lim_n \lambda((G_n \cap (A_p \times B_p))_y) = \lambda((G \cap (A_p \times B_p))_y)$$

luego las aplicaciones

$$x \longrightarrow \mu((G \cap (A_p \times B_p))_x)$$

$$y \longrightarrow \lambda((G \cap (A_p \times B_p))_y)$$

son medibles.

Para cada $n$

$$\int_X \mu((G_n \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((G_n \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\mu =$$

$$= \lambda \times \mu((G_n \cap (A_p \times B_p)))$$

Teniendo en cuenta (1) puedo aplicar convergencia dominada

$$\int_X \mu((G \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((G \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\mu$$

$$= \lambda \times \mu (G \cap (A_p \times B_p))$$

o sea $G \in \mathcal{M}$

Hemos probado que $\mathcal{M}$ es monótona y además $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$
o sea $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$
Pero $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ por construcción luego

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

Finalmente sea $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{M}$ tenemos que

$$\int_X \mu((E \cap (A_p \times B_p))_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda((E \cap (A_p \times B_p))_y)\, d\mu =$$

$$= \lambda \times \mu (E \cap (A_p \times B_p))$$

Aplico convergencia monótona con respecto a $p$ obteniendo (ya que $A_p \times B_p \to X \times Y$)

$$\int_X \mu(E_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda(E_y)\, d\mu = \lambda\times\mu(E)$$

Si $(Z, \mathcal{C}, \nu)$ con $\nu$ $\sigma$-finita

Proposición 180 $(\lambda\times\mu)\times\nu = \lambda\times(\mu\times\nu)$

Dem: Práctico.