Clase 18

jueves, 17 de octubre de 2019 20:40

Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles y sea $X \times Y$ el producto cartesiano

Definición 163 Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ el conjunto $A \times B$ lo llamaremos rectángulo generalizado medible.

Notaremos $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a la σ-álgebra generada por los rectángulos generalizados medibles.

Al espacio $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ se le llama producto de los espacios $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$

Proposición 164 Si $A_1 \times B_1$ y $A_2 \times B_2$ son dos rectángulos generalizados medibles entonces $(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2)$ es la unión de dos rectángulos generalizados medibles disjuntos.

Dem: Pruebe el lector que

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = \left[(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)\right] \cup \left[(A_1 - A_2) \times B_1\right]$$

Proposición 165 Si $(A_1 \times B_1)$ y $(A_2 \times B_2)$ son rectángulos generalizados medibles su intersección también lo és.

Dem: Ver que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

Sea $\mathcal{R}$ la familia de subconjuntos de $X \times Y$ tal que sus elementos son uniones finitas de rectángulos generalizados medibles disjuntos dos a dos.

Teorema 166 $\mathcal{R}$ es un anillo en $X \times Y$

Dem: $X \times Y \in \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R} \neq \emptyset$

Sea E y $F \in \mathcal{R}$ entonces

$$E = \bigcup_{p=1}^{n} E_p \quad \text{con } E_p \text{ rectángulos generalizados medibles disjuntos}$$

$$F = \bigcup_{q=1}^{m} F_q \quad \text{con } F_q \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$E - F = \bigcup_{p=1}^{n} E_p - \bigcup_{q=1}^{m} F_q = \bigcup_{p=1}^{n} \left(E_p - \bigcup_{q=1}^{m} F_q\right) = \bigcup_{p=1}^{n} \bigcap_{q=1}^{m} (E_p - F_q)$$

Pero $E_p - F_q$ es la unión de dos rectángulos generalizados medibles disjuntos por prop 164. Luego aplicando la prop 165 y como la intersección es finita $\Rightarrow \bigcap_{q=1}^{m} (E_p - F_q) \in \mathcal{R}$ y además es unión finita de rectángulos generalizados medibles

Luego $\bigcup_{p=1}^{n} \bigcap_{q=1}^{m} (E_p - F_q) \in \mathcal{R}$ o sea $E - F \in \mathcal{R}$

Ahora $E \cup F = E \cup (F - E)$; E y $F - E$ son disjuntos

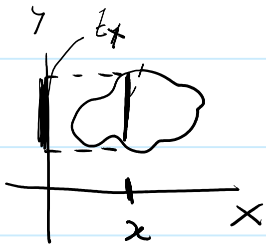
$E = \bigcup_{p=1}^{n} E_p$ y $F - E \in \mathcal{R}$ por lo recién probado luego

es unión finita de rectángulos generalizados medibles disjuntos dos a dos, luego $E \cup F \in \mathcal{R}$
o sea $\mathcal{R}$ es un anillo.

Nota: el teorema sigue siendo válido si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son anillos.

Definición 167: Sea E un subconjunto de $X \times Y$
Para cada $(x,y) \in X \times Y$ definimos

$$E_x = \{ y \in Y : (x,y) \in E \}$$
$$E_y = \{ x \in X : (x,y) \in E \}$$



Proposición 168: Sean $\{E_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de $X \times Y$. Si $(x,y) \in X \times Y$ y $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ entonces

$$E_x = \bigcup_{i \in I} (E_i)_x \qquad E_y = \bigcup_{i \in I} (E_i)_y$$

Proposición 169: Si $E \subset X \times Y$, y $(x,y) \in X \times Y$
entonces: $(E^c)_x = (E_x)^c$
$(E^c)_y = (E_y)^c$

Dem: Práctico.

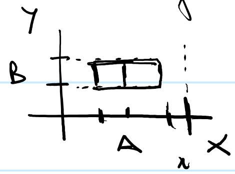
Proposición 170 Si $E \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ y $(x,y)\in X\times Y$ entonces

$$E_x \in \mathcal{B} \text{ y } E_y \in \mathcal{A}$$

Dem: Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tal que $E\in\mathcal{F}$ si y solo si $E_x\in\mathcal{B}$, $E_y\in\mathcal{A}$ para cada $(x,y)\in X\times Y$

Si $A\in\mathcal{A}$ y $B\in\mathcal{B}$ entonces se tiene que

$(A\times B)_x = \emptyset$ si $x\notin A$



$(A\times B)_x = B$ si $x\in A$

entonces $(A\times B)_x\in\mathcal{B}$

Análogamente $(A\times B)_y\in\mathcal{A}$

o sea $A\times B\in\mathcal{F}$

Si tengo una unión numerable de elementos de $\mathcal{F}$

$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n\in\mathcal{F}$ sabemos por la prop 168

que $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ como $E_n\in\mathcal{F}\Rightarrow (E_n)_x\in\mathcal{B}$

pero como $\mathcal{B}$ es σ-álgebra $\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x\in\mathcal{B}$ o sea

$E_x\in\mathcal{B}$

Idem $E_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_y$ y análogamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_y \in\mathcal{A}$

y por lo tanto $E_y\in\mathcal{A}$

luego $E\in\mathcal{F}$

A partir de la prop 169 si $E\in\mathcal{F}\Rightarrow E^c\in\mathcal{F}$

o sea hemos probado que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{R}$ luego $\mathcal{S} \supset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Pero por def $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ luego

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Producto de Espacios medibles

Sean $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, $(Y, \mathcal{B}, \mu)$

Si $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dado $(x, y) \in X \times Y$ sabemos que $E_x \in \mathcal{B}$ y $E_y \in \mathcal{A}$ entonces tiene sentido poner $\mu(E_x)$ y $\lambda(E_y)$

Llamaremos también $\mu(E_x)$ a la aplicación de X en $\mathbb{R}^*_+$

$$x \longrightarrow \mu(E_x)$$

y llamaremos $\lambda(E_y)$ a la aplicación de Y en $\mathbb{R}^*_+$

$$y \longrightarrow \lambda(E_y)$$

Proposición 1.7.1 Las aplicaciones $\mu(E_x)$ y $\lambda(E_y)$ son medibles para cada $E \in \mathcal{R}$ y

$$\int_X \mu(E_x)\, d\lambda = \int_Y \lambda(E_y)\, d\mu$$

Dem: Sea $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ con

$i=1$

$A_i \times B_i$ rectángulos generalizados medibles para $i=1, \dots, n$ y disjuntos dos a dos.

Para cada $(x,y) \in X \times Y$

$$\chi_E(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y)$$

Si fijamos y $\chi_E(x,y)$ es la función característica de E_y

$$\lambda(E_y) = \int_X \chi_E(x,y)\, d\lambda = \int_X \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y)\, d\lambda$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_X \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y)\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(y) \int_X \chi_{A_i}(x)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(y)\, \lambda(A_i)$$

Luego $\lambda(E_y)$ es la suma de un número finito de funciones medibles por lo tanto es medible.

Análogamente $\mu(E_x)$ es medible

$$\mu(E_x) = \int_Y \chi_E(x,y)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_Y \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y)\, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\, \mu(B_i)$$

Finalmente

$$\int_Y \lambda(E_y)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\int_Y \chi_{B_i}(y)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\mu(B_i)$$

$$\int_X \mu(E_x)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\int_X \chi_{A_i}(x)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\mu(B_i)$$

luego $\displaystyle\int_Y \lambda(E_y)\,d\mu = \int_X \mu(E_x)\,d\lambda$

Definición 172 Sea $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^*_+$

Si $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ con $E \in \mathcal{R}$ ponemos

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\,\mu(B_i)$$

Esta ρ esta bien definida pues si tengo otra representación de E como $E = \bigcup_{j=1}^{p} C_j \times D_j$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)\,\mu(B_i) = \int_Y \lambda(E_y)\,d\mu = \sum_{j=1}^{p} \lambda(C_j)\mu(D_j)$$

son iguales

o sea ρ esta bien definida.

Proposición 173 ρ es una medida sobre el anillo $\mathcal{R}$

Dem Si $E = \phi \times \phi$ $E \in \mathcal{R}$ pues $\phi \in \mathcal{A}$, $\phi \in \mathcal{B}$

$$\rho(E) = \lambda(\phi)\,\mu(\phi) = 0 \quad \text{o sea } \rho(\phi) = 0$$

Sea (E_n) una sucesión con $E_n \in \mathcal{R}$ disjuntos dos a dos

Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y supongamos que $E \in \mathcal{R}$

Entonces para cada $y \in Y$ $E_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_y$

pero los $(E_n)_y$ son disjuntos dos a dos luego

$$\lambda(E_y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((E_n)_y)$$

$$\rho(E) = \int_Y \lambda(E_y)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \lambda((E_n)_y)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$$

aplico convergencia dominada

Teorema 174 Dados los espacios de medida $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ existe una medida ρ sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de manera que

$$\rho(A \times B) = \lambda(A)\,\lambda(B) \quad \forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$$

Dem: Por la prop anterior existe ρ sobre el anillo $\mathcal{R}$ tal que si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$$\rho(A \times B) = \lambda(A)\,\lambda(B)$$

Como $X \times Y \in \mathcal{R}$ entonces aplico el teorema de extensión y prolongamos ρ a una medida sobre $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ a su medida la seguiré llamando ρ.

Nota Si λ, μ son σ-finitas, entonces ρ es σ-finita sobre $\mathcal{R}$ y la extensión es única.