Clase 17

viernes, 11 de octubre de 2019 19:08

Proposición 153. Si $(f_n) \in L^p$ y $(1 \leq p < \infty)$
y $f_n \xrightarrow[\mu]{ctp} f$, $|f_n| \leq g \in L^p$ entonces
$f \in L^p$ y $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Dem: Como $|f_n| \leq g \Rightarrow |f| \leq g \Rightarrow f \in L^p$

Se tiene que $|f_n - f| \xrightarrow[\mu]{ctp} 0 \Rightarrow |f_n - f|^p \xrightarrow[\mu]{ctp} 0$

y además $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$.

Pero $2^p g^p \in L^1$ pues $\int 2^p g^p \, d\mu < \infty$
luego puedo aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

$$\int |f_n - f|^p \longrightarrow 0 \quad \text{o sea } f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Proposición 154 Sea S la familia de las funciones $s(x)$ simples, medibles complejas sobre X
tales que $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$,
si $1 \leq p < \infty$ entonces S es denso en $L^p(X)$

Dem: Es claro que $S \subset L^p(X)$

Sea $f \geq 0$, $f \in L^p(X)$ y sea (S_n) de funciones simples, ≥ 0, crecientes tales que $S_n \to f$ $\forall x \in X$ (definido en el teorema 105)

Como $|f - S_n|^p \leq f^p$ entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\|f - S_n\|_p = \left(\int |f - S_n|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n]{} 0$$

Como $S_n \in S \Rightarrow f$ está en la clausura de S respecto a L^p

El caso general se deduce directamente de este

<u>obs</u> $0 < S_n < f \Rightarrow S_n \in L^p$

Definición 155: Una familia $\mathcal{F}$ de funciones se dice que es uniformemente absolutamente continua con respecto a μ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \delta$ entonces $\int_A |f| < \varepsilon$ $\forall f \in \mathcal{F}$

Definición 156: $\mathcal{F}$ se llama superiormente equicontinua en el vacío si y sólo si para toda sucesión $\{C_k\}$ de elementos de $\mathcal{A}$, decrecientes al vacío y por todo $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que si $k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\int_{C_k} |f| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Teorema 157 (Vitali)

Si (f_n) es una sucesión de funciones en L^p, y $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces $f_n \to f$ en L^p si y solo si

a) $f_n \xrightarrow{\mu} f$

b) $\mathcal{F} = \{ |f_n|^p : n \in \mathbb{N} \}$ es uniformemente absolutamente continua y equicontinua superiormente, al vacío.

Dem: Se omite.

Diagramas de Convergencia

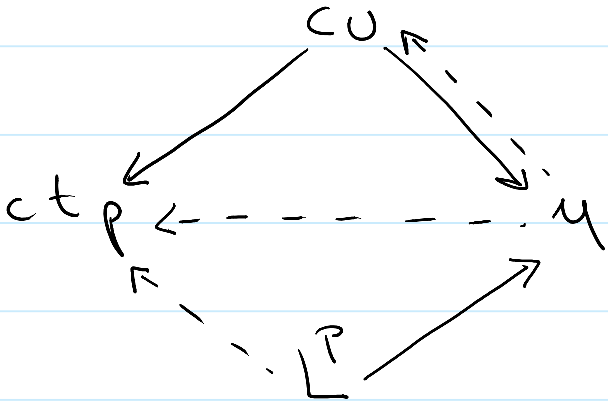
cu (casi uniformemente)

ctp (casi todo punto)

μ (en medida)

L^p (en L^p)

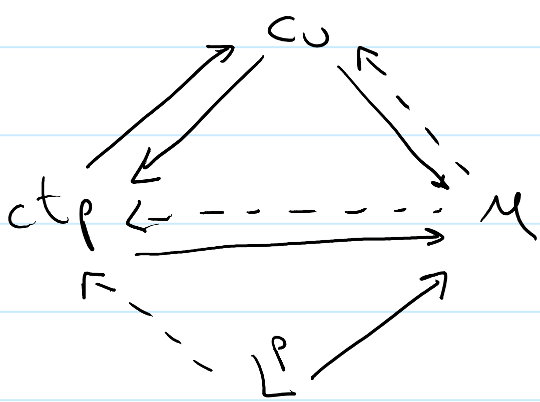
Caso general



línea sólida implicación

línea punteada es que existe una subsucesión que cumple la convergencia

Caso medida finita $\mu(X) < \infty$



Caso donde (f_n) cumple que
$|f_n| \leq g \ ct_p$ con $g \in \mathcal{L}^p$

$$\begin{tikzcd}
 & CU \arrow[dl, shift left] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
ct_p \arrow[ur, shift left] \arrow[dr] & & M \arrow[ul, dashed, shift right] \arrow[dl, shift left] \\
 & \mathcal{L}^p \arrow[ul, dashed, shift right] \arrow[uu, dashed, shift right] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Definición 158: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
para cada $\delta > 0$ definimos dos funciones

Función superior de Baire
$$M_\delta(x) = \sup \{ f(y) : y \in [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta) \}$$

Función inferior de Baire
$$m_\delta(x) = \inf \{ f(y) : y \in [a,b] \cap (x-\delta, x+\delta) \}$$

Es claro que $m_\delta(x) \leq f(x) \leq M_\delta(x)$

Definamos:

$$M(x) = \inf_{\delta>0} M_\delta(x)$$

$$m(x) = \sup_{\delta>0} m_\delta(x)$$

Proposición 159

f es continua en $x \in [a,b] \iff M(x) = m(x)$

Dem: Se omite.

Proposición 160 M y m son funciones medibles Lebesgue

Dem: Sea $a = x_{n_0} < x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{n l_n} = b$

tal que $\alpha_n = \max\limits_{0 \le k \le l_n - 1} (x_{n(k+1)} - x_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Sea $m_{nk} = \inf \{ f(y) : y \in [x_{nk}, x_{n(k+1)}] \}$

y $$h_n = \sum_{k=0}^{l_n - 1} m_{nk} \chi_{(x_{nk}, x_{n(k+1)})}$$

Veremos que si $x \neq x_{n_k}$ $\forall k$ entonces

$h_n(x) \longrightarrow m(x)$

El conjunto de puntos de la partición es numerable o sea la medida de Lebesgue de ese conjunto es 0

Esto implica que $h_n(x) \xrightarrow{ctp} m(x)$

Pero h_n es una función simple por lo tanto es medible, luego $m(x)$ es medible

Idem para la función $M(x)$

Veamos que $h_n(x) \longrightarrow m(x)$ si $x \neq x_{n_k}$ $\forall k$

~~Para~~ n fijo entonces existe k_n tal

$x \in (x_{n k_n}, x_{n(k_n+1)})$

$\exists \delta$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subseteq (x_{n k_n}, x_{n(k_n+1)})$

entonces

$h_n(x) = \inf\{f(y) : y \in [x_{n k_n}, x_{n(k_n+1)}]\} \leq$

$\leq m_\delta(x) \leq m(x)$

O sea $h_n(x) \leq m(x)$

Si $m(x) = -\infty$ es claro $h_n(x) \longrightarrow m(x)$

Si $m(x) > -\infty$ sea $a < m(x)$ luego existe $\delta > 0$ tal que $m_\delta(x) > a$

Como $\alpha_n \xrightarrow[n]{} 0$ $\exists\, n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ tal que

$$x \in [x_{n k_n}, x_{n(k_n+1)}] \subseteq (x-\delta, x+\delta)$$

luego

$$m_{nk} = h_n(x) = \inf \{ f(y) : y \in [x_{n k_n}, x_{n(k_n+1)}] \} \geq$$

$$\geq \inf \{ f(y) : y \in (x-\delta, x+\delta) \} = m_\delta(x)$$

o sea $h_n(x) \geq m_\delta(x) > a$

Dado $a < m(x)$ $\exists\, n_0 \,/\, \forall n \geq n_0$ $h_n(x) > a$

Como $h_n(x) \leq m(x)$ y $\underline{a}$ es cualesquiera

entonces $h_n(x) \xrightarrow[n]{} m(x)$

Teorema 161 Sea f acotada en $[a,b]$ f es integrable Riemann si y solo si f es continua en ctp

Dem: $|f| \leq K$ entonces $\forall n$ $|h_n| \leq K$

por convergencia dominada

$$(L)\int_a^b h_n(x)\,dx \longrightarrow (L)\int_a^b m(x)\,dx$$

Por definición

$$(L)\int_a^b h_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{l_n-1} m_{nk}\left(x_{n(k+1)} - x_{nk}\right) = s_n$$

donde s_n es una suma inferior de Darboux correspondiente a la partición $\{x_{nk}\}_{k=0,\dots,l_n}$

$$s_n \longrightarrow (L)\int_a^b m(x)\,dx$$

De la misma manera se prueba

$$S_n \longrightarrow (L)\int_a^b M(x)\,dx$$

entonces $S_n - s_n \longrightarrow (L)\int_a^b [M(x) - m(x)]\,dx$

f es integrable Riemann si y solo si
$S_n - s_n \to 0$ o sea si y solo si

$$(L)\int_a^b [M(x)-m(x)]\,dx = 0$$

Como $M(x) \geq m(x) \Rightarrow$ la integral valdrá cero $\Longleftrightarrow M(x)=m(x)$ ctp
o sea f es continua en ctp.

Corolario 162 Si f es integrable Riemann entonces f es integrable Lebesgue y las integrales coinciden

Dem: Como f es integrable Riemann entonces está acotada, y por el teorema 161
$M(x) = m(x)$ ctp

Como $m \leq f \leq M \Rightarrow m = f$ ctp
luego f es medible Lebesgue.

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b m(x)\,dx = \lim_n S_n \to (R)\int_a^b f(x)\,dx$$