Clase 16

jueves, 10 de octubre de 2019 20:24

Decimos que $\|f\|_p$ es una norma en $L^p(X)$

El tema de definir L^p mediante clases de equivalencia es para que se verifique que

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0$$

La desigualdad de Minkowsky nos permite ver que

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Es inmediato ver que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Obs: $L^p(X)$ también es un EV si $0<p<1$ pero $\|f\|_p$ no define una norma.

Teorema 147 Desigualdad de Young

Sea $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, continua, estrictamente creciente, con $\lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = +\infty$, $\varphi(0) = 0$

Sea $\psi = \varphi^{-1}$. Definamos para todo $x \geq 0$

Sea $\psi = \varphi^{-1}$. Definamos para todo $x \geq 0$

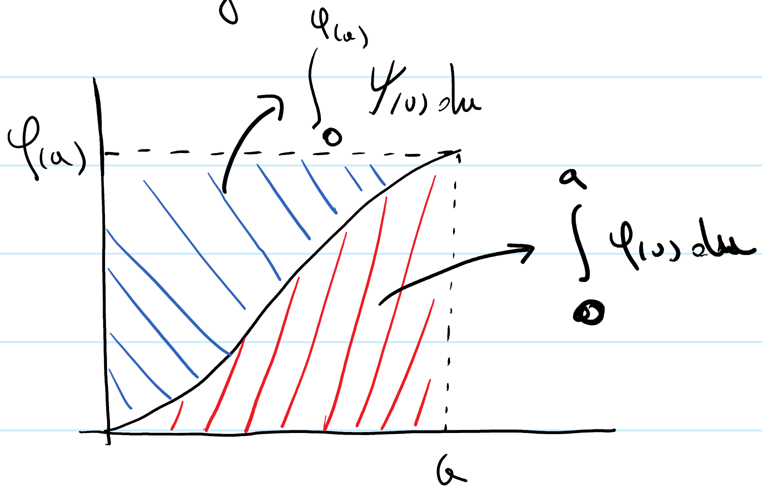
$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)\, du \quad , \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(u)\, du$$

Entonces para todo $a, b \in [0, +\infty)$

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$$

La igualdad vale si y solo si $b = \varphi(a)$

Dem: Veamoslo geométricamente



Vemos en el dibujo que

$$\int_0^a \varphi(u)\, du + \int_0^{\varphi(a)} \psi(u)\, du = a\,\varphi(a)$$

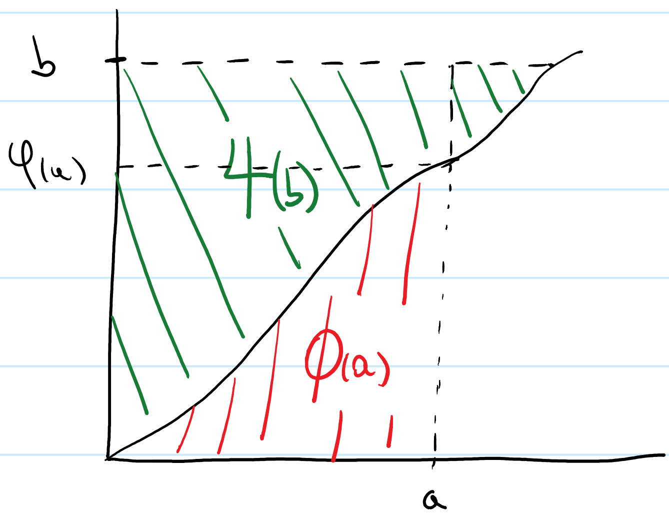
entonces

$$\Phi(a) + \Psi(\varphi(a)) = a\,\varphi(a)$$

entonces

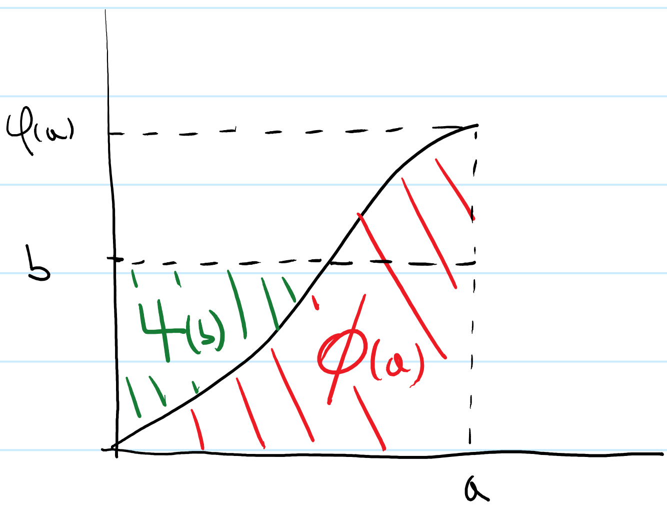
$$\phi(a) + \psi(b) = a\,\varphi(a) + \psi(b) - \psi(\varphi(a))$$

Si $\varphi(a) \leq b$



$$\phi(a) + \psi(b) \geq ab$$

Si $\varphi(a) > b$



$\phi(a) + \psi(b) \geq ab$

Corolario 148. Si $p > 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

con igualdad si y solo si $a^p = b^q$

Dem: Usar $\varphi(u) = u^{p-1}$

Entonces

$$\phi(a) = \int_0^a u^{p-1}\,du = \frac{u^p}{p}\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}$$

$$\psi(v) = v^{1/p-1}$$

$$\psi(b) = \int_0^b v^{\frac{1}{p-1}}\,dv = \frac{v^{\frac{p}{p-1}}}{p}(p-1)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p/p-1} = \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq$$

$$\Rightarrow p = pq - q = q(p-1)$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{q\cancel{(p-1)}}{\cancel{(p-1)}} = q$$

La igualdad $b=\varphi(a)=a^{p-1}$; $b^{\frac{1}{p-1}}=a$

$$\Rightarrow \quad b^{\frac{p}{p-1}} = a^{p} \quad \text{o sea} \quad b^{q}=a^{p}$$

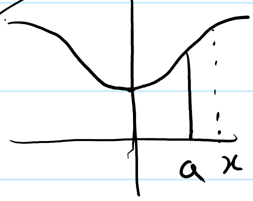
Proposición 149: Desigualdad de Markov

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, par, $g\geq 0$ y $g(x)>0$ si $x>0$. Además g es no decreciente en $[0,+\infty)$. Si f es una función medible finita definida en $(X,\mathcal{A},\mu)$ entonces para todo $a>0$

$$\mu(|f|\geq a)\leq \frac{\int_X (g\circ f)\,d\mu}{g(a)}$$

Dem:

$$\mu(|f|\geq a)=\int_X \chi_{\{|f|\geq a\}}\,d\mu = \int_X\left(\chi_{\{x:|x|\geq a\}}\circ f\right)d\mu \leq$$



$\frac{g(x)}{g(a)}\geq 1$ si $|x|\geq a$

$$\leq \int_X \frac{(g\circ f)}{g(a)}\,d\mu = \frac{\int_X (g\circ f)\,d\mu}{g(a)}$$

Corolario 150: Si (f_n) es fundamental en L^p $1 \leq p \leq \infty$ entonces (f_n) es fundamental en medida

Dem: Si $p = \infty$ es inmediato

Si $1 \leq p < \infty$ Aplicaré Markov con $g(x) = |x|^p$

$$\mu(|f_n - f_m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu}{\varepsilon^p} < \frac{\delta \varepsilon^p}{\varepsilon^p} = \delta$$

$$\exists n_0 \;/\; \text{si} \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow \int_X |f_n - f_m|^p d\mu < \delta \varepsilon^p$$

Proposición 151: Para $1 \leq p \leq \infty$ L^p es completo

Dem: Caso $p = \infty$

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^∞ y sea $0 < \varepsilon_{n,m} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$

Sean $A_{n,m} = \{x \in X : |f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty + \varepsilon_{n,m}\}$

se tiene que $\mu(A_{n,m}) = 0$

Consideremos

$$A = \bigcup A_{n,m}$$

es claro que $\mu(\bigcup_{n,m} A_{n,m}) = 0$

$$\mu(A) = 0$$

En A^c f_n converge uniformemente

Definimos $f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$

Claramente $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

y $f \in L^\infty$

<u>Caso $1 \leq p < \infty$</u>

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^p

Por el corolario 150 es fundamental en medida.

Entonces existe f medible tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$

(prop 121). Por lo tanto por prop 120 existe

una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1,2,\ldots}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \ \text{ctp}$$

Observamos también que como (f_n) es

de Cauchy en L^p entonces está uniformemente

acotada en L^p, o sea $\exists M>0$ tal que
$\|f_n\|_p < M \quad \forall n$

Como $f_{n_k} \to f$ ctp entonces $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ ctp
entonces aplico el lema de Fatou

$$\int \liminf |f_{n_k}|^p = \int |f|^p \leq \liminf \int |f_{n_k}|^p \leq M^p < \infty$$

o $\int |f|^p < \infty$ o sea $f \in L^p$

Entonces $f_n - f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{ctp} f_n - f$ o sea

$$|f_n - f_{n_k}|^p \xrightarrow[k\to\infty]{} |f_n - f|^p \text{ ctp } \forall n$$

Aplico Fatou

$$\int \liminf_k |f_n - f_{n_k}|^p = \int |f_n - f|^p \leq \liminf_k \int |f_n - f_{n_k}|^p$$

o sea $\int |f_n - f|^p \leq \liminf_k \int |f_n - f_{n_k}|^p \quad \oplus$

(f_n) es Cauchy en L^p entonces

$$\lim_n \liminf_k \int |f_n - f_{n_k}| = 0$$

o sea por ⊗ $\int |f_n - f|^p \longrightarrow 0$

o sea $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ o sea

(f_n) converge a f en L^p

Proposición 152: Si $f_n \in L^p$, f_n converge uniformemente sobre X a f, $\mu(X) < \infty$ entonces $f \in L^p$ y $f_n \to f$ en L^p $(1 \leq p < \infty)$

Dem: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$
$|f_n - f| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$ entonces

$$|f| \leq |f_{n_0}| + \varepsilon \Rightarrow f \in L^p$$

$$\left(\int |f_n - f|^p\right)^{1/p} \leq \left(\varepsilon^p \mu(X)\right)^{1/p} = \varepsilon(\mu(X))^{1/p}$$

si tomo $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{(\mu(X))^{1/p}} \Rightarrow \|f_n - f\|_p < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$ o sea

$f_n \to f$ en L^p.