Clase 15

viernes, 04 de octubre de 2019 19:53

<u>Obs</u> En el teorema anterior en el caso que
$\left(\int f^p\right)^{1/p}$ y $\left(\int g^q\right)^{1/q}$ sean finitos
se verifica la igualdad en Holder
si y solo si existen ctes α, β
reales tales que $\alpha f^p = \beta g^q$ en ctp

Definición 144: Si $0 < p < \infty$ y si
f es una función compleja medible
de X definimos

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Definimos $L^p(\mu)$ al conjunto de todas las
f para las que $\|f\|_p < \infty$

Si μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$
escribimos $L^p(\mathbb{R}^k)$
Si μ es la medida discreta sobre un
conjunto A escribimos $\ell^p(A)$
Si A es numerable simplemente escribimos
ℓ^p

Un elemento de ℓ^p puede considerarse como una sucesión compleja, $x=(x_n)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Definición 145 Se dice que $M \geq 0$ es una cota escencial de una función medible $f: X \to [-\infty, +\infty]$ si

$$\{x \in X : |f(x)| > M\}$$

tiene medida nula

Sea S el conjunto de todas las cotas escenciales.

Definimos el supremo escencial y lo notamos β (de una función f) como el ínfimo de S o sea β es el ínfimo de las cotas escenciales

Definimos $\|f\|_\infty$ como el supremo escencial de $|f|$

Definimos $L_\infty(\mu)$ como el conjunto de las f para las cuales $\|f\|_\infty < \infty$

A los elementos de $L^\infty(\mu)$ a veces se les llama funciones medibles esencialmente acotadas.

Obs β es una cota esencial

$$\{x \in X : |f(x)| > \beta\} = \bigcup_n \{|f(x)| > \beta + 1/n\}$$

Como la unión numerable de conjuntos de medida 0 tiene medida 0 $\Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| > \beta\}) = 0$$

luego β es la menor de las cotas esenciales.

Proposición 146 $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial

Dem: Para $p=1$ y $p=\infty$ es obvio

Veamos $p>1$

Sea $\varphi(t) = |t|^p$, φ es convexa para $p \geq 1$

Sean x, y

$$\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p$$

o sea $(|x|+|y|)^p \leq 2^{p-1}(|x|^p+|y|^p)$

o sea $(|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)$

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int (|f|+|g|)^p d\mu \leq$$

$$\leq 2^{p-1}\left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right)$$

Quiero probar que si $f, g \in L^p(\mu)$ entonces $f+g \in L^p(\mu)$

Como

$$\int |f+g|^p d\mu \leq 2^{p-1}\Big(\underbrace{\int |f|^p d\mu}_{\substack{< \infty \\ \text{pues } f \in L^p(\mu)}} + \underbrace{\int |g|^p d\mu}_{\substack{< \infty \\ \text{pues } g \in L^p(\mu)}}\Big)$$

$\int |f+g|^p d\mu < \infty$ o sea $\|f+g\|_p < \infty$

o sea $f+g \in L^p(\mu)$

<u>obs</u> Si f y g son medibles y $f = g$ ctp

es claro $\|f\|_p = \|g\|_p$ entonces

$1 \leq p \leq \infty$ podemos definir una relación de equivalencia ($f \sim g$ si $f = g$ c.t.$_p$)

Podemos considerar $L^p/\sim$ y lo notaremos también $L^p(\mu)$ o $L^p(X)$

Veamos que en $L^p(\mu)$, $\|f\|_p$ es una norma.