Clase 14

jueves, 03 de octubre de 2019 20:23

Teorema 137 Sea $f: X \to [0,\infty]$ medible y sea $E \in \mathcal{A}$ tal que

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

entonces $f = 0$ ctp de E

Dem: Si $A_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Se tiene que $\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$0 = \int_E f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq 0$$

entonces $\mu(A_n) = 0$

$$\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{=0} = 0$$

o sea $f = 0$ ctp de E

Teorema 138: Se $\{E_k\}$ una sucesión de conjuntos medibles en X tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

entonces casi todo $x \in X$ está a lo sumo en un número finito de conjuntos E_k

Dem: Sea A el conjunto de los $x \in X$ que están en infinitos E_k. Debemos probar que $\mu(A) = 0$

Sea $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x) \quad (x \in X)$

o sea si $x \in A$, $g(x) = \infty$

Veamos que $g(x) < \infty$ ctp para ello probaré que $g \in L^1(\mu)$ o sea

$$\int_X |g| \, d\mu < \infty$$

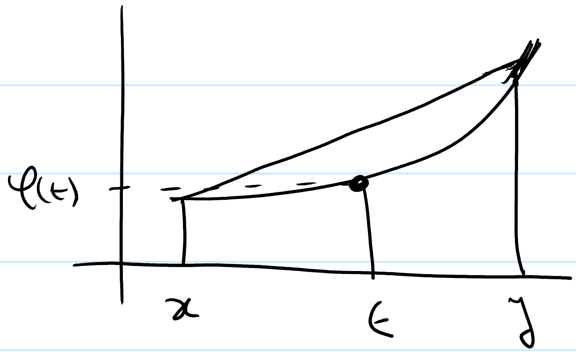
$$\int_X |g| \, d\mu = \int_X g \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x) \, d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

Definición 139 Una función real φ definida (a,b) con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ se dice convexa si se cumple que:

$$\varphi\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$



Si $x < t < y \Rightarrow (t, \varphi(t))$ esta por debajo de la cuerda determinada por $(x, \varphi(x)), (y, \varphi(y))$

Es facil demostrar que $a < s < t < u < b$ entonces $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \dfrac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$

cuando φ es convexa (Usar $\lambda = \dfrac{t-s}{u-s}$)

A partir del teorema del valor medio se ve que una función real diferenciable φ es convexa si y solo si $a<s<t<b \Rightarrow \varphi'(s) \leq \varphi'(t)$ o sea φ' es monótona creciente

Proposición 140 Si φ es convexa en $(a,b) \Rightarrow$ es continua en (a,b)

Dem: A cargo del lector.

<u>Obs</u> Si por ejemplo $\varphi(x)=0$, $[0,1)$ y $\varphi(1)=1$ φ satisface la condición de convexidad sin embargo no es continua o sea es necesario considerar intervalos abiertos.

Teorema 141 (Desigualdad de Jensen)
Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto Ω con $\mu(\Omega)=1$
Si f es una función real en $L^1(\mu)$ y si $a<f(x)<b$ $\forall x \in \Omega$
Además φ es convexa en (a,b) entonces

$$\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int (\varphi \circ f) \, d\mu$$

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi\circ f)\,d\mu$$

Los casos $a=-\infty$, $b=\infty$ no están excluidos.

Dem: Sea $t := \int_\Omega f\,d\mu$

Como $a < f < b \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow$

$$\int_\Omega a\,d\mu < \underbrace{\int_\Omega f\,d\mu} < \underbrace{\int_\Omega b\,d\mu}$$

$$\| $$

$$a\underbrace{\mu(\Omega)}_{\substack{\| \\ 1}} < t < b\underbrace{\mu(\Omega)}_{\substack{\| \\ 1}}$$

$$a < t < b$$

Sea $\beta = \sup_s \dfrac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ con $a < s < t$ (1)

β no es mayor que ninguno de los cocientes $\dfrac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ con $u \in (t,b)$ (2)

(1) $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta \Rightarrow \varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t)$

para $a < s < t$

(2) $\beta \leq \dfrac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ $\quad t<u<b$

$$\beta(u-t)+\varphi(t) \leq \varphi(u) \qquad t<u<b$$

o sea $\forall\, s \in (a,b)$

$$\varphi(s) \geq \varphi(t)+\beta(s-t)$$

Como $a<f(x)<b$ en particular se tiene

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t)+\beta(f(x)-t)$$

Como φ es continua y f es medible $\Rightarrow \varphi\circ f$ es medible

$$\varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t) \geq 0$$

$$\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu - \underbrace{\int_\Omega \varphi(t)\, d\mu}_{\varphi(t)} - \cancel{\beta \underbrace{\int_\Omega f\, d\mu}_{t} + \beta \underbrace{\int_\Omega t\, d\mu}_{t}} \geq 0$$

$$\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu - \varphi(t) \geq 0$$

$$\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu \geq \varphi(t)$$

$$\int_\Omega \varphi\circ f\, d\mu \geq \varphi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right)$$

Ejemplo Sea $\varphi(x) = e^x$ el teorema 141 me dice que

$$e^{\int_\Omega f \, d\mu} \leq \int_\Omega e^f \, d\mu$$

Sea por ejemplo $\Omega = \{p_1, \dots, p_n\}$ tal que $\mu(p_i) = 1/n$ y sea $f(p_i) = x_i$

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^n x_i / n$$

$$\int_\Omega e^f \, d\mu = \frac{1}{n}\left(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_i}$$

$$e^{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_i}$$

$$\left(e^{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{x_i}$$

Si pongo $e^{x_i} = y_i$ obtengo

$$(y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

esta es la conocida desigualdad entre la media aritmética y geométrica

Definición 142 Si p y q son reales, positivos tales que $p+q = pq$ o lo que es igual

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Llamaremos a p y q exponentes conjugados
Es claro que esto implica que $1 < p < \infty$ y que $1 < q < \infty$
Si $p \to 1$ entonces $q \to \infty$ por lo que diremos que 1 y ∞ son tambien exponentes conjugados

Teorema 143 Sean p y q exponentes conjugados $1 < p < \infty$. Sea X un espacio de medida con medida μ.
Sean f y g funciones medibles en X con recorrido $[0, \infty]$ entonces

$$(1) \quad \int_X f \cdot g \, d\mu \leq \left(\int_X f^p\right)^{1/p} \left(\int_X g^q\right)^{1/q}$$

$$\int_X \qquad \int_X \qquad \int_X$$

y

$$(2)\quad \left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\right)^{1/p}$$

A (1) se le llama desigualdad de Holder

(2) se llama desigualdad de Minkowski

Si $p = q = 2 \Rightarrow$ (1) es Schwarz

Dem: Sea $A = \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p}$

$$B = \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

Si $A = 0 \Rightarrow f = 0$ ctp luego $f \cdot g = 0$ ctp

y por lo tanto se verifica (1)

Si $A > 0$ y $B = \infty \Rightarrow$ (1) es trivial

Idem para $B = 0$, $B > 0$, $A = \infty$

Luego ahora consideremos $0 < A < \infty$

$$0 < B < \infty$$

Sea $F = f/A$ y $G = g/B$

$$\int_X F^p \, d\mu = \int_X \frac{f^p}{A^p} \, d\mu = \frac{1}{A^p} \int f^p d\mu = 1$$

Idem $\int_X G^q \, d\mu = 1$

Si $x \in X$ es tal que $0 < F(x) < \infty$ y $0 < G(x) < \infty$ existen $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = e^{s/p}$ y $G(x) = e^{t/q}$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ la convexidad de e^x

implica que

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q} \quad (*)$$

Se tiene que de (*)

$$F(x)\, G(x) \leq p^{-1} [F(x)]^p + q^{-1} [G(x)]^q \quad \forall x \in X$$

$$\int_X FG \, d\mu \leq p^{-1} + q^{-1} = 1$$

$$\int_X \frac{f}{A} \frac{g}{B} \, d\mu \leq 1 \Rightarrow \int fg \, d\mu \leq AB$$

$$\int_X \frac{f}{A}\,\frac{g}{B}\,d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X fg\,d\mu \leq AB$$

o sea $$\int_X fg\,d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$$

así demostramos Hölder

Para demostrar (2) escribimos

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder a $f(f+g)^{p-1}$

$$\int f(f+g)^{p-1} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \quad (\text{eq } a)$$

Idem

$$\int g(f+g)^{p-1} \leq \left(\int g^p\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q} (\text{eq } b)$$

$$\int (f+g)^p = \int f(f+g)^{p-1} + \int g(f+g)^{p-1} \overset{(\text{eq } a) + \text{eq } b)}{\leq}$$

$$\leq \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\leq \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}\right],$$

$$(p-1)q = pq - q = p + \cancel{q} - \cancel{q} = p$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq$$

$$= \left(\int (f+g)^p\right)^{1/q} \left[\left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}\right]$$

Basta demostrar (2) cuando el primer miembro es mayor a 0 y el segundo menor a infinito

Para $0 < t < \infty$, la función t^p es convexa

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(f^p + g^p\right) \quad (\text{uso } \lambda = 1/2)$$

entonces $\left(\int (f+g)^p\right)^{1/q} < \infty$

luego

$$\underbrace{\frac{\int (f+g)^p}{\left(\int (f+g)^p\right)^{1/q}}}_{(\quad)^{1-\frac{1}{q}}} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p} \left(\int g^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\int (f+g)^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \quad \text{o sea}$$

$$\left(\int (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p} \left(\int g^p\right)^{1/p}$$