Clase 13

viernes, 27 de setiembre de 2019 19:17

Definición 132 Si $f = u + iv$ donde u y v son funciones medibles reales sobre X

Si $f \in L^1(\mu)$ definimos

$$\int_E f \, d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i\left[\int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu\right]$$

para $E \in \mathcal{A}$

Como $u^+ \leq |u| \leq |f|$. Pero $f \in L^1 \Rightarrow$

$\int_E |f| \, d\mu < \infty$ lo que implica que

$$\int_E u^+ d\mu < \infty$$

Idem u^-, v^+, v^-

<u>Nota</u>

En el caso que f tenga recorrido $[-\infty, +\infty]$ defino

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

cuando al menos una de las integrales sea finita

Proposición 133 Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$

Dem. Práctico

Teorema 134: Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ entonces

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

Dem: Llamemos $z = \int_X f\, d\mu$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$

Sea u la parte real de αf entonces

$$u \leq |\alpha f| = \overset{1}{|\alpha|}|f| = |f|$$

luego

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = \alpha \int_X f\, d\mu = \int_X \alpha f\, d\mu = \int_X u\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$$

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha \int_X f\,d\mu = \int_X \alpha f\,d\mu = \int_X u\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu$$

Teorema 1.35 (Teorema de Convergencia dominada de Lebesgue)

Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles complejas sobre X tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

Si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que (g real, positiva)

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad n = 1, 2, \ldots \quad x \in X$$

entonces $f \in L^1(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

y $\quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$

Dem: Sabemos $0 \leq |f| \leq g$ y que f es medible por ser el límite de funciones medibles

Veamos que $f \in L^1(\mu)$

$$|f_n - f| \leq 2g$$

Apliquemos Fatou a la función

$$2g - |f_n - f|$$

$$\int_X \liminf_n (2g - |f_n - f|)\, d\mu = \int_X 2g\, d\mu$$

$$\int_X 2g\, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_n \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu$$

$$= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_n \left[- \int_X |f_n - f|\, d\mu \right]$$

$$= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_n \int_X |f_n - f|\, d\mu$$

Pero $\int_X 2g\, d\mu$ es finito pues $g \in L^1(\mu)$

$\Rightarrow$ puedo restarla y obtengo

$$\limsup_n \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

Si una sucesión de números reales no negativos no converge a 0 entonces su límite superior es positivo. Entonces debe ser $\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$

$n\to\infty$ X

Sea ahora $f_n - f$. Sabemos que

$$\left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu \quad \text{por el teorema 134}$$

$$\lim_n \left|\int_X f_n - \int f\, d\mu\right| \leq \lim_n \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Teorema: 136 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas medibles definidas en ctp X tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty$$

Entonces la serie: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

converge en ctp x, $f \in L^1(\mu)$ y

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

Dem: Sea S_n el conjunto donde está definida f_n con $\mu(S_n^c) = 0$

Sea $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ para $x \in S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$

$$\mu(S^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(S_n^c)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

o sea $\mu(S^c) = 0$

Ahora φ es una función que va $[0, \infty]$, medible

$$\int_S \underbrace{\varphi}_{\overset{\shortparallel}{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|}} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n| \, d\mu < \infty$$

Aplique convergencia monótona

$$\varphi(x) = \lim_{N} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |f_n|}_{g_N} \qquad g_N \text{ es monótona}$$

$$\int_S \varphi \, d\mu = \int_S \lim_N \sum_{n=1}^{N} |f_n| \, d\mu = \lim_N \int_S \sum_{n=1}^{N} |f_n| \, d\mu =$$

$$= \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int_S |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n| \, d\mu$$

Consideremos $E = \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$ pero

Consideremos $E = \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$ pero como $\int_S \varphi \, d\mu < \infty$ debe cumplirse que $\mu(E^c) = 0$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ para todo $x \in E$ o sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge absolutamente}$$

para todo $x \in E$

$|f(x)| \leq \varphi(x)$ en E o sea como

$$\int_E |f(x)| \, d\mu \leq \int_E \varphi(x) \, d\mu \leq \int_S \varphi(x) \, d\mu < \infty$$

$\Rightarrow f \in L^1(\mu)$ en E

Sea $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ entonces $|g_n| \leq \varphi$ y además

$$g_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{para todo } x \in E$$

Aplico el teorema de convergencia dominada de Lebesgue en E

$$\lim_n \int_E g_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad (1)$$

Además

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \lim_n \int_E \sum_{i=1}^{n} f_i \, d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \int_E f_i \, d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i \, d\mu \quad (2)$$

(1) = (2) o sea

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \overset{\text{lin}}{+} \int_{E^c} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

$$\left| \int_{E^c} f \, d\mu \right| \leq \int_{E^c} |f| \, d\mu = 0$$

A partir de esto

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu$$

Idénticamente al ver que $\int_X |f(x)| d\mu = \int_E |f(x)| d\mu < \infty$, con $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$$\Rightarrow f \in L^1(\mu)$$