Clase 12

jueves, 26 de setiembre de 2019 20:22

Proposición 125: Sean s y t funciones simples medibles sobre X.

Para $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\varphi(E) = \int_E s \, d\mu$$

Entonces φ es una medida sobre $(X, \mathcal{A})$

Además

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

Dem: $\varphi(\emptyset) = 0$, o sea φ no es idénticamente infinito

Sean $E_1, E_2, \ldots$ elementos disjuntos tal que $E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r$

Entonces por la aditividad numerable de μ vemos

$$\mu(A_i \cap E) = \mu\left(A_i \cap \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_r)$$

para cada $i = 1, 2, \ldots n$

$$\varphi\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r\right) = \varphi(E) = \int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r)}_{\int_{E_r} s \, d\mu \, = \varphi(E_r)} = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r)$$

$$\varphi\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_r\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r)$$

o sea φ es una medida.

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

Sean $E_{ij} = A_i \cap B_j$ entonces

$$\int_{E_{ij}} (s+t) \, d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij})$$

además

$$\int_{E_{ij}} s \, d\mu + \int_{E_{ij}} t \, d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij})$$

es decir en E_{ij} se verifica

$$\int_{E_{ij}} (s+t) \, d\mu = \int_{E_{ij}} s \, d\mu + \int_{E_{ij}} t \, d\mu$$

Los E_{ij} son una partición disjunta de X o sea

$$X = \bigcup_{i,j} E_{ij} \quad , \quad E_{ij} \text{ son disjuntos dos a dos}$$

$$\int_X (s+t)\, d\mu = \int_{\bigcup_{i,j} E_{ij}} (s+t)\, d\mu = \int \chi_{\bigcup_{i,j} E_{ij}} (s+t)\, d\mu =$$

$$\int \sum_{i,j} \chi_{E_{ij}} (s+t)\, d\mu = \sum_{i,j} \int \chi_{E_{ij}} (s+t)\, d\mu$$

$$= \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} (s+t)\, d\mu = \sum_{i,j} \left[\int_{E_{ij}} s\, d\mu + \int_{E_{ij}} t\, d\mu \right]$$

$$= \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} s\, d\mu + \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} t\, d\mu =$$

$$= \int_X \sum_{i,j} \chi_{E_{ij}} s\, d\mu + \int_X \sum_{i,j} \chi_{E_{ij}} t\, d\mu$$

$$= \int_X \chi_{\bigcup E_{ij}} s\, d\mu + \int_X \chi_{\bigcup E_{ij}} t\, d\mu =$$

$$= \int_{\bigcup E_{ij}} s\, d\mu + \int_{\bigcup E_{ij}} t\, d\mu =$$

$$= \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu$$

Teorema 1.26 Teorema de convergencia monótona de Lebesgue.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X y supongamos que

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty \quad \forall x \in X$

b) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ si $n \to \infty \quad \forall x \in X$

Entonces f es medible y

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu \quad \text{si } n \to \infty$$

Dem: Como $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu$ entonces existe

$\alpha \in [0, \infty]$ tal que $\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$

Como $f_n \longrightarrow f$ puntualmente entonces f es medible y como $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \quad \forall n$

luego $\alpha \leq \int_X f \, d\mu$

Sea s una función simple, tal que $0 \leq s \leq f$ y c una cte $0 < c < 1$

Sea $E_n = \{x : f_n(x) \geq c\, s(x)\}$ $n = 1, 2, \ldots$

Cada E_n es medible y $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$

y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

Para ver esta última igualdad consideremos $x \in X$

Si $f(x) = 0 \Rightarrow$ como $0 \leq s \leq f \Rightarrow s(x) = 0$ y $c\,s(x) = 0$

en particular $f_1(x) = 0$ entonces $x \in E_1$

Si $f(x) > 0$ como $c < 1$ $c\,s(x) < f(x)$

entonces $x \in E_n$ para algún n

Además

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} s \, d\mu \quad \forall n$$

Sea $\varphi(E_n) = \int_{E_n} s \, d\mu$ esto es una medida

además (E_n) es creciente y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\varphi(E_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \varphi(X)$$

o sea $\int_{E_n} s \, d\mu \longrightarrow \int_X s \, d\mu$

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \alpha$$

$$c \int_{E_n} s \, d\mu \longrightarrow c \int_X s \, d\mu$$

o sea $\quad \alpha \geq c \int_X s \, d\mu$

Esta desigualdad se verifica para todo $c < 1$

o sea $\quad \alpha \geq \int_X s \, d\mu$

Como $\quad 0 \leq s \leq f \implies$

$$\alpha \geq \int_X f \, d\mu$$

Hemos obtenido que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leq \int_X f \, d\mu \\ \alpha \geq \int_X f \, d\mu \end{array}\right\} \implies \alpha = \int_X f \, d\mu$$

Pero $\quad \alpha = \lim_n \int_X f_n \, d\mu \quad$ o sea

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$

Teorema 127: Si $f_n : X \to [0, \infty]$ medible $n=1,2,\ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in X)$$

entonces
$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Dem: Existen sucesiones $\{s'_i\}$ y $\{s''_i\}$ de funciones simples medibles tales que $s'_i \to f_1$ y $s''_i \to f_2$ Como en el teorema 105

Sea $s_i = s'_i + s''_i$ $\quad s_i \to f_1 + f_2$

Las s_i son monótonas $\int_X s_i \, d\mu \to \int_X f_1 + f_2 \, d\mu$

$$\int_X s_i \, d\mu = \int_X (s'_i + s''_i) \, d\mu \underset{\text{proposición 125}}{=} \int_X s'_i \, d\mu + \int_X s''_i \, d\mu$$

Pero $\int_X s'_i \, d\mu \to \int_X f_1 \, d\mu$

$$\int_X s''_2 \, d\mu \to \int_X f_2 \, d\mu$$

o sea
$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$$

Sea ahora $g_N = f_1 + f_2 + \ldots + f_N$

$\{g_N\}$ converge monótonamente a f. Aplicando un proceso de inducción vemos que

$$\underbrace{\int_X g_N \, d\mu}_{A} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu}_{B}$$

Como g_N converge monótonamente a f $\overset{(N\to\infty)}{\Rightarrow}$

$$A \quad \int_X g_N \, d\mu \xrightarrow[N]{} \int_X f \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

$$B \quad \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[N]{} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

o sea $$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Corolario 128 Si $a_{ij} \geq 0$ i,j $1,2,3,\ldots$

entonces
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Dem considerar como μ la medida discreta.

Lema de Fatou 129. Si $f_n : X \to [0,\infty]$ medible para cada entero positivo n entonces

$$\int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu$$

Dem: Sea $g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x)$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ $x \in X$

entonces $g_k \leq f_k$ luego

$$\int_X g_k\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu \qquad k = 1, 2, \ldots$$

g_k es medible y $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$

además

$$g_k(x) \longrightarrow \liminf_n f_n(x) \text{ cuando } k \to \infty$$

Apliquemos convergencia monótona

$$\int_X g_k\, d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu$$

Además $\int g_k\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu \quad \forall k$

luego $\int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu \quad \forall k$

luego $\int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu$

luego $\int_X (\liminf_n f_n)\,d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu$

Teorema 130 Sea $f: X \to [0,\infty]$ medible y

$$\varphi(E) = \int_E f\,d\mu \qquad E \in \mathcal{A}$$

entonces φ es una medida sobre $\mathcal{A}$ y

$$\int_X g\,d\varphi = \int_X g \cdot f\,d\mu$$

para toda g medible sobre X con recorrido en $[0,\infty]$

Dem: $\varphi(\phi) = 0$

Sean $E_1, E_2, \ldots$ disjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$

Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_i} f \quad \text{(esto es claro)}$$

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \varphi(E) = \int_X \chi_E f\,d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_i} f\,d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_i} f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_i)$$

teorema 127

Luego φ es una medida

Si $g = \chi_E \Rightarrow \varphi(E) = \int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E f\,d\mu$

$$\varphi(E) = \int_X \chi_E\,d\varphi$$

o sea para indicatrices se verifica el resultado

Si g es simple $\quad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \Rightarrow$

$$\int_X g\,d\varphi = \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\,d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{E_i}\,d\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{E_i} f\,d\mu = \int_X \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\right)}_{g} f\,d\mu$$

$$= \int_X g f\,d\mu$$

o sea el resultado vale para funciones simples.

Sea g medible positiva entonces existe una sucesión g_n de funciones simples creciente que converge a g

conv monótona

$$\int_X g\,d\varphi = \lim_n \int_X g_n\,d\varphi = \lim_n \int_X g_n f\,d\mu$$

g_n simple

$g_n f$ es creciente también y $g_n f \xrightarrow[n]{} g f$

entonces $\lim_n \int_X g_n f \, d\mu = \int_X g f \, d\mu$

luego $\int_X g \, d\varphi = \int_X g f \, d\mu$

La última parte a veces se escribe $d\varphi = f \, d\mu$

Definición 131 Definimos $L^1(\mu)$ como la familia de todas las funciones complejas f sobre X para las que

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty$$

(a veces se dice solamente integrables)