Clase 11

jueves, 19 de setiembre de 2019 20:26

Proposición 113: Si $(f_n)\to f$ casi uniformemente entonces

$f_n \to f$ ctp

Dem: Para todo $j\in\mathbb{N}$ existe $A_j \in \mathcal{A}$ tal que

$\mu(A_j)<1/j$ y $f_n\to f$ uniformemente en A_j^c.

Sea $A=\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ entonces $\mu(A)=0$

y $f_n(x)\to f(x)$ para todo $x\in A^c$

Obs que $\mu(A)=0$ es claro pues si

considero $B_1=A_1$, $B_2=A_1\cap A_2$, ..., $B_n=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$

B_n es decreciente, $\mu(B_1)=\mu(A_1)<1<\infty$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\lim_n \mu(B_n)$$

es claro que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$

$$\lim_n B_n=\lim_n \bigcap_{j=1}^{n} A_j \leq \lim_n \mu(A_n) < \lim_n 1/n = 0$$

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)=0$$

Proposición 114: Si $f_n\to f$ casi uniformemente entonces

Proposición 114: Si $f_n \to f$ casi uniformemente entonces
$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Dem: Debemos probar que $\forall \delta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ entonces
$$\mu([|f_n - f| \geq \delta]) < \varepsilon$$

Sean $\varepsilon, \delta > 0$, sabemos que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $n \geq n_0$
$|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para todo $x \in A^c$
Tenemos ese n_0 entonces para $n \geq n_0$

$[|f_n - f| \geq \delta] \subseteq A$ entonces
$\mu([|f_n - f| \geq \delta]) \leq \mu(A) < \varepsilon$
o sea $f_n \xrightarrow{\mu} f$

<u>Nota</u> El teorema de Egoroff nos dice que si $\mu(X) < \infty$ y f_n, f finitas, si $f_n \to f$ ctp entonces $f_n \to f$ casi uniformemente.

Corolario 115: Si $\mu(X) < \infty$, f_n y f finitas si $f_n \to f$ ctp entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Dem: Como $f_n \to f$ ctp y estamos en las hipótesis del teorema de Egoroff entonces $f_n \to f$ casi uniformemente, luego por el teorema 114 $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Definición 116: $\{f_n\}$ es fundamental en medida si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ entonces $\mu([|f_n - f_m| \geq \varepsilon]) \leq \delta$

Proposición 117: Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces (f_n) es fundamental en medida.

Dem: $[|f_n - f_m| \geq \varepsilon] \subseteq [|f_n - f| \geq \varepsilon/2] \cup [|f_m - f| \geq \varepsilon/2]$

$$\mu([|f_n - f_m| \geq \varepsilon]) \leq \underbrace{\mu([|f_n - f| \geq \varepsilon/2])}_{\wedge\ \delta/2} + \underbrace{\mu([|f_m - f| \geq \varepsilon/2])}_{\wedge\ \delta/2}$$

Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ $\exists n_0$ tal que $\mu([|f_n - f| \geq \varepsilon/2]) \leq \delta/2$ $\forall n \geq n_0$

si $m \geq n_0$ se cumple lo mismo luego

o sea

$$\mu([|f_n - f_m| \geq \varepsilon]) \leq \delta$$

Proposición 118: Si $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ y $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $f_n \xrightarrow{\mu} g$ entonces $f = g$ ctp

$f_n \to g$ entonces $f = g$ ctp

Dem: $[|f-g| \geq \varepsilon] \subseteq \underbrace{[|f_n - f| \geq \varepsilon/2]}_{A} \cup \underbrace{[|f_n - g| \geq \varepsilon/2]}_{B}$

Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $f_n \xrightarrow{\mu} g$ entonces

$\mu(A) < \delta/2$ y $\mu(B) < \delta/2$

entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$

$\mu([|f-g| \geq \varepsilon]) < \delta$ entonces $\mu([|f-g| \geq \varepsilon]) = 0$

$$[f \neq g] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [|f-g| > 1/n]$$

$$\mu([f \neq g]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu([|f-g| > 1/n])}_{= 0} = 0$$

o sea $f = g$ ctp

Proposición 119: Si (f_n) es fundamental en medida entonces admite una subsucesión (f_{n_k}) casi uniformemente fundamental

Dem: (f_n) es fundamental en medida entonces construyo una sucesión de naturales crecientes (n_k) tal que si $n, m \geq n_k$ entonces

$$\mu\left(\left[|f_n - f_m| \geq \frac{1}{2^k}\right]\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

Consideremos $\{f_{n_k}\}$ y veamos que es casi uniformemente fundamental

Debemos mostrar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ y $\forall \delta > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \, / \, i, j \geq k_0$ entonces $|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| < \delta \quad \forall x \in A^c$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal $\displaystyle\sum_{k=M}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$

Tomemos $\displaystyle A = \bigcup_{k=M}^{+\infty} B_k$ con

$$B_k = \left[|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\right]$$

$$\mu(A) \leq \sum_{k=M}^{+\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=M}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

Sea $\delta > 0$ entonces existe $k_0 \geq M$ tal que

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \delta$$

Para ese k_0 y para $i, j \geq k_0$ y $x \in A^c$ entonces

entonces

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \delta$$

Corolario 120: Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ ctp

Dem: Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces (f_n) es fundamental en medida $\overset{(\text{prop } 117)}{\text{entonces}}$ existe (f_{n_k}) casi uniformemente fundamental (prop 119)

Entonces $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists A_j \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A_j) < 1/j$ y (f_{n_k}) es uniformemente fundamental en A_j^c

Sea $\Omega_0 = [(f_{n_k}) \text{ converge}]$ (Probar que Ω_0 es medible)

Definamos $g: X \to \mathbb{R}^+$ por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_0^c \\ \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) & \text{si } x \in \Omega_0 \end{cases}$$

Vemos que $f_{n_k} \to g$ ctp pues $\Omega_0^c \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$

esto implica que $\mu(\Omega_0^c) = 0$

Es claro que f_{n_k} converge casi uniformemente a g

Para terminar basta probar que $f = g$ ctp

$$[|g-f|\geq \delta] \subseteq [|g-f_{n_k}|\geq \delta/2] \cup [|f-f_{n_k}|\geq \delta/2]$$

Pero sabemos que $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$, ~~por~~ por la prop 114

sabemos que $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} g$ luego

$$\mu([|g-f|\geq \delta]) \leq \underbrace{\mu(|g-f_{n_k}|\geq \delta/2)}_{\to 0 \ (f_{n_k} \xrightarrow{\mu} g)} + \underbrace{\mu(|f-f_{n_k}|\geq \delta/2)}_{\to 0 \ (f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f)}$$

entonces $\mu([|g-f|\geq \delta) = 0$ o sea $f = g$ ct p

$(\mu([|g-f|\geq \delta]) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0)$

Corolario 121: Si (f_n) es fundamental en medida entonces existe una función medible $f: X \to \mathbb{R}^*$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Dem: Como (f_n) es fundamental en medida admite una subsucesión (f_{n_k}) casi uniformemente fundamental

Sea $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$ tal que

$\Big\{ \lim f_{n_k}(x)$ si f_{n_k} converge

$$f(x) = \begin{cases} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces $f_{n_k} \to f$ casi uniformemente. En particular $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$.

El resultado se sigue entonces de

$$[|f_n - f| \geq \varepsilon] \subseteq [|f_n - f_{n_k}| \geq \varepsilon/2] \cup [|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon/2]$$

Dado $\delta > 0$ $\exists k_0$ tal que $k \geq k_0 \Rightarrow \mu(|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon/2) \leq \delta/2$

y $\exists n_1$ / $m, n \geq n_1$ entonces $\mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon/2) \leq \delta/2$

sea n_0 / $n_0 \geq \max(n_1, n_{k_0})$ y sean $n_k, n \geq n_0$

$\mu([|f_n - f_{n_k}| \geq \varepsilon/2]) \leq \delta/2$ y (1)

$\mu([|f_{n_k} - f| \geq \varepsilon/2]) \leq \delta/2$ (2)

$$\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq (1) + (2) = \delta$$

Integración de funciones positivas

Definición 122: Si s es una función simple medible sobre X de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

Sea $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

El convenio $0 \cdot \infty = 0$ se puede necesitar acá pues puede suceder que $\alpha_i = 0$ y $\mu(A_i \cap E) = \infty$

Definición 123 Sea $f : X \to [0, \infty]$ medible y $E \in \mathcal{A}$ definimos

$$\int_E f \, d\mu = \sup \int_E s \, d\mu$$

donde el supremo esta tomado sobre todas las funciones simples medibles s tales que $0 \leq s \leq f$

Proposición 124

a) Si $0 \leq f \leq g$ entonces $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$

b) Si $A \subset B$ y $f \geq 0$ entonces $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

c) Si $f \geq 0$ y c una cte $0 \leq c \leq \infty$ entonces

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$$

d) Si $f(x) = 0$ para todo $x \in E$ entonces

$$\int_E f \, d\mu = 0 \quad \text{aunque } \mu(E) = \infty$$

e) Si $\mu(E) = 0$ entonces $\int_E f \, d\mu = 0$ aunque

$$f(x) = \infty \ \forall x \in E$$

f) Si $f \geq 0$ se tiene que $\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$

Dem: Son triviales

a) $\int_E f \, d\mu = \sup \int_E s \, d\mu \quad 0 \leq s \leq f \quad s$ simples

$$\int_E g \, d\mu = \sup \int_E t \, d\mu \quad 0 \leq t \leq g \quad t \text{ simples}$$

Como $f \leq g$ $\exists$ t_1 simple tal que $f \leq t_1 \leq g$

Luego toda $s \leq f$ simple es $s \leq t_1$ entonces

$$\underbrace{\sup \int_E s \, d\mu}_{\int_E f \, d\mu} \leq \int_E t_1 \, d\mu \leq \underbrace{\sup \int_E t \, d\mu}_{\int_E g \, d\mu}$$