Clase 10

Friday, September 13, 2019 7:00 PM

Proposición 108: Sea $f: X \to \bar{R}$ y D un conjunto denso en R si $\forall z \in D$ $[f \leq z] = f^{-1}([-\infty, z]) \in \mathcal{A}$ entonces f es medible (Este resultado es igual si ponemos $[f < z]$)

Dem: Sea $D' \subseteq D$ numerable denso en R se cumple que

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \underbrace{\bigcap_{z \in D'} [f \leq z]}_{\in \mathcal{A}}$$

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \underbrace{\bigcap_{z \in D'} [f > z]}_{\in \mathcal{A}}$$

$$[f \leq z] = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} [f \leq z_n]}_{\in \mathcal{A}}$$

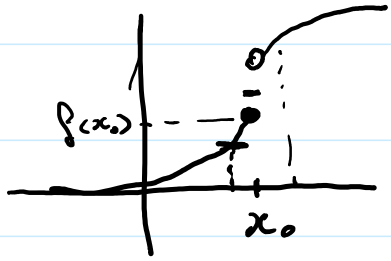
con $z_n \uparrow z$, $z_n \in D'$, $z \in R$

Proposición 109. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel respecto a la topología. Toda aplicación $f: X \to R$ semicontinua superiormente [o semicontinua inferiormente] es medible en particular toda aplicación continua es medible

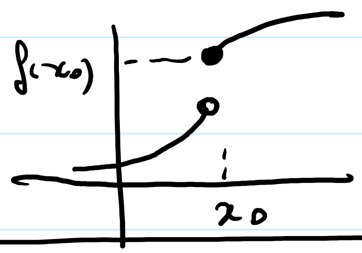
Dem: f es semicontinua superiormente si y solo si $[f<z]$ es abierto $\forall z\in\mathbb{R}$ o sea pertenece a τ luego pertenece a $\mathcal{B}$

Si f es semicontinua inferiormente si y solo si $[f>z]$ es abierto $\forall z\in\mathbb{R}$ y sigue igual.

<u>Obs</u> Def usual $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en x_0 si $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 / f(x)>f(x_0)-\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es semicontinua superiormente en x_0 si $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta$



De ahora en adelante, excepto que digamos lo contrario $f_n: X\to\overline{\mathbb{R}}$ y $f: X\to\mathbb{R}^*$ medibles

Definición 1.10 f_n converge a f casi uniformemente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente en A^c

Definición 1.1.1: Si (f_n) y (f) son funciones se dice que f_n converge a f en medida si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \mu([|f_n - f| \geq \varepsilon]) = 0$$

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

Definición 1.1.2: $\{f_n\}$ se dice casi uniformemente fundamental si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

i) $\mu(A) < \varepsilon$

ii) $\forall \delta, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \delta$ $\forall x \in A^c$