Clase 9

jueves, 12 de setiembre de 2019 20:13

Def 104 Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice que f es una función simple si existe una partición finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de X de conjuntos medibles ($A_i \in \mathcal{A}\ \forall i$) tal que

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \qquad a_j \in \mathbb{R}$$

Teorema 105 Si f es una función no negativa y medible de X en $\mathbb{R}^*$, existe una sucesión creciente (f_n) de funciones simples no negativas que convergen puntualmente a f

Dem: Sea n un entero, $n > 0$ definimos

$$A_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

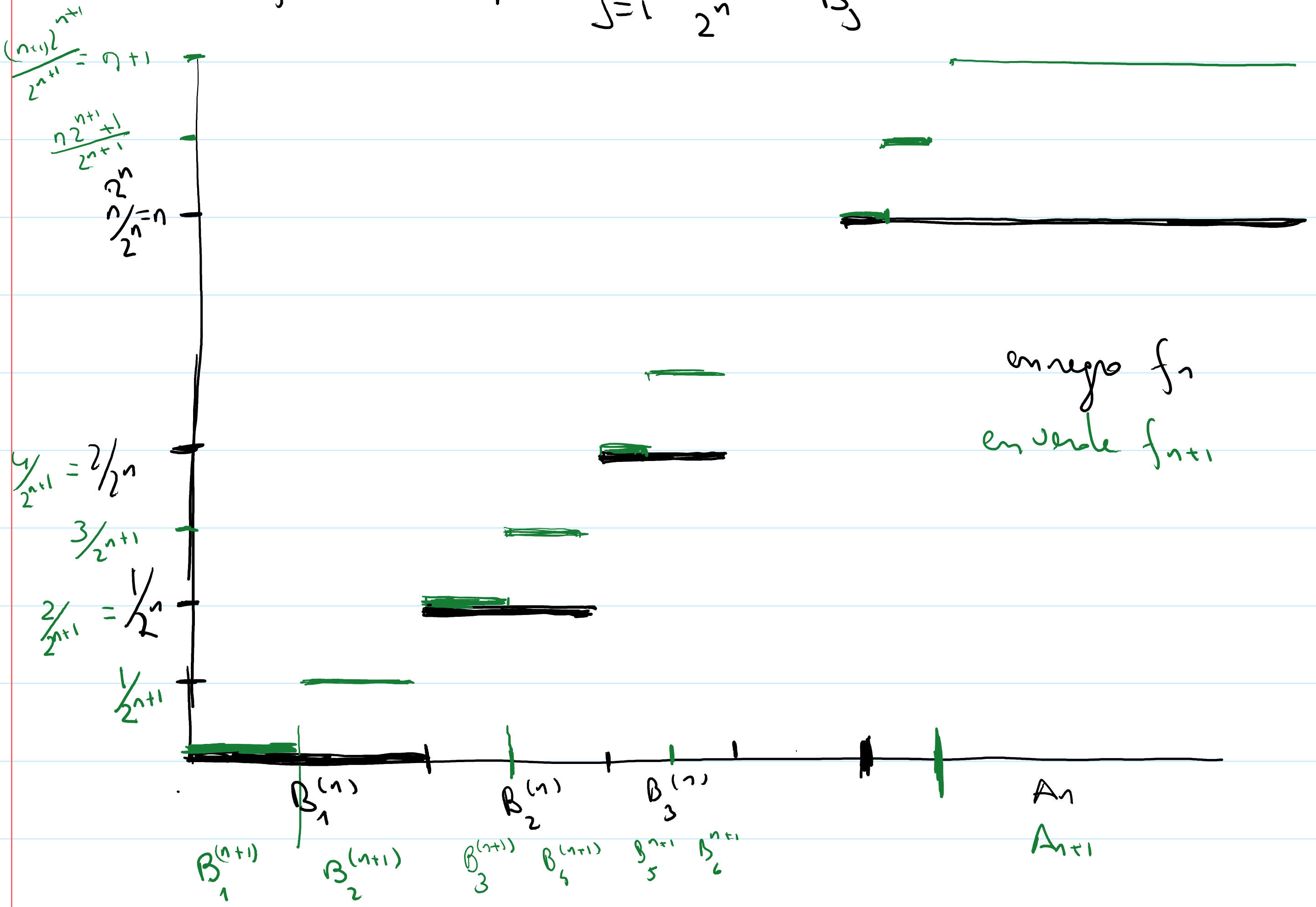
$$B_j^{(n)} = \{x \in X : \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\} \quad j = 1, 2, \ldots, n2^n$$

Los intervalos $[n, +\infty]$, $\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$ $j = 1, 2, \ldots, n2^n$ son una partición de $[0, +\infty]$.

A_n y $B_j^{(n)}$ $\forall j$ son medibles en X pues son preimagen de Borelianos por f medible.

Tenemos que $\{A_n, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \dots, B_{n2^n}^{(n)}\}$ es una partición de X formada por subconjuntos medibles.

Sea $$f_n = n\chi_{A_n} + \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n}\chi_{B_j^{(n)}}$$



Las funciones f_n son simples y no negativas

$$f_{n+1} = (n+1)\chi_{A_{n+1}} + \sum_{j=1}^{(n+1)2^{n+1}} \frac{j-1}{2^{n+1}}\chi_{B_j^{(n+1)}}$$

$$A_{n+1} = \{x \in X : f(x) \geq n+1\}$$

$$B_j = \left\{ x \in X : \frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{j}{2^{n+1}} \right\} \quad j = 1, \dots, (n+1)2^{n+1}$$

Veamos que f_n es creciente o debo probar que $\forall z \in X \Rightarrow f_{n+1}(z) \geq f_n(z)$

Si z es tal que $f(z) \geq n+1 \Rightarrow f_{n+1}(z) = n+1 > n = f_n(z)$

Si $f(z) < n+1$ $\exists j$ $1 \leq j \leq (n+1)2^{n+1}$ tal que $\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(z) < \frac{j}{2^{n+1}}$ $z \in B_j^{(n+1)}$

$$\Rightarrow f_{n+1}(z) = \frac{j-1}{2^{n+1}}$$

Si $j \geq n2^{n+1} + 1$ $\quad f(z) \geq \frac{j-1}{2^{n+1}} \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n$

luego $f_n(z) = n \leq \frac{j-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(z)$

Si $j \leq n2^{n+1}$ hay 2 casos

a) $j =$ par. $\Rightarrow j = 2h$ $\quad 1 \leq h \leq n2^n$

$$\frac{h-1}{2^n} = \frac{\overbrace{2h}^{j}-2}{2^{n+1}} = \frac{j-2}{2^{n+1}} < \frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(z) < \frac{j}{2^{n+1}} = \frac{h}{2^n}$$

$$\Rightarrow z \in B_h^{(n)}$$

$$f_n(z) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = \frac{j-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(z)$$

b) j impar $\Rightarrow$ $j = 2k-1$ $\quad 1 \leq k \leq n2^n$

$$\frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(z) < \frac{j}{2^{n+1}} < \frac{k}{2^n} \Rightarrow z \in B_k^{(n)}$$

$$f_n(z) = \frac{\overset{\frac{j+1}{2}}{k}-1}{2^n} = \frac{j-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(z)$$

O sea $(f_n) \nearrow$

Veamos que f_n converge a f puntualmente

Dado $x \in X$ pueden pasar 2 cosas

a) Si $f(x) = +\infty \Rightarrow f_n(x) = n \quad \forall n \Rightarrow \lim_n f_n = +\infty = f(x)$

b) Si $f(x) < \infty$ entonces dado $\varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ tal
entero

$\frac{1}{2^r} < \varepsilon$ y $f(x) < r$

entonces $\forall n \geq r$ nentero $\exists j \,/\, 1 \leq j \leq n2^n$ tal

que $\quad \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}$

$$f(x) - \frac{j-1}{2^n} = |f(x) - f_n(x)| < \frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^r} < \varepsilon$$

Luego $\lim_n f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$, y $f(x) < \infty$

<u>Nota</u> Si f está acotada $\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ entero tal que $\frac{1}{2^r} < \varepsilon$ y $f(z) < r \quad \forall z \in X$

$\Rightarrow$ si $x \in X$ cualesquiera

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq r \text{ indep. de } x$$

o sea $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en X

Def 106 Decimos $g : X \to \mathbb{R}^*$ es finita en casi todo punto si $\{x \in X : |g(x)| = +\infty\}$ tiene medida nula

Para el teorema que sigue supongamos:
Sea X un espacio topológico con $\mu(X) < \infty$ y tal que la σ-álgebra $\mathcal{A}$ contenga a la σ-álgebra de Borel de X. Además supongamos que dado un elemento $A \in \mathcal{A}$, y $\varepsilon > 0$ entonces existe $B \subset A$, B cerrado en X tal que

$$\mu(A - B) < \varepsilon$$

Teorema 107 (Lusin) Sea $f : X \to \mathbb{R}^*$ medible y finita en ctp. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists F$ cerrado en X

tal que $\mu(X-F) < \varepsilon$ y la restricción de f a F es continua.

Dem: Supongamos primero que f es simple; entonces existe una partición finita de X formada por conjuntos medibles $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

$\forall j \quad 1 \leq j \leq n$ sea F_j cerrado de X tal que $F_j \subset A_j$ y $\mu(A_j - F_j) < \varepsilon/n$

Si tomo $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ entonces F es cerrado

disjuntos

$$y \quad \mu(\underbrace{X}_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} - F) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j - F_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu(A_j - F_j)}_{\varepsilon/n} < \varepsilon$$

Como los F_j son cerrados y disjuntos dos a dos y como f es constante sobre cada uno de ellos, entonces es inmediato ver que la restricción de f a F es continua

Sea $f: X \to \mathbb{R}^*$ medible y finita ctp

Sea $A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$

Sea g una función $g: X \to \mathbb{R}$ (real) que coincide con f en $X - A$ y es nula en $A \Rightarrow g$ es medible y podemos hallar $\{g_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a g

Esto es verdad pues $g = g^+ - g^-$ con g^+ y g^- medibles y no negativas
Por el teorema 105 $\exists \{g_n^+\}$ y $\{g_n^-\}$ sucesiones de funciones simples que convergen a g^+ y g^- respectivamente $\Rightarrow$ sea $g_n = g_n^+ - g_n^-$. Como $g_n^+ \to g^+$ y $g_n^- \to g^-$ $\Rightarrow g_n \to g$ puntualmente

Aplicamos el teorema de Egoroff (teorema 103) y hallamos $B \subset X$, B medible tal que $\mu(B) < \varepsilon/4$ y $g_n \to g$ uniformemente en $X - B$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ como g_n es simple existe un subconjunto E_n cerrado en X tal que

$$\mu(X - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

y con la restricción de g_n a E_n continua

Sea $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$

Entonces $\mu(X - E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X - E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(X - E_n)}_{< \varepsilon/2^{n+2}} < \varepsilon/4$

Sea $M = E - (B \cup A)$. Como $M \in \mathcal{A}$ existe $F \subset M$ F cerrado, tal que $\mu(M - F) < \varepsilon/2$

Para cada $n > 0$ la restricción de g_n a E es continua y $F \subset \Pi \subset E \Rightarrow g_n$ es continua en F (como restricción)

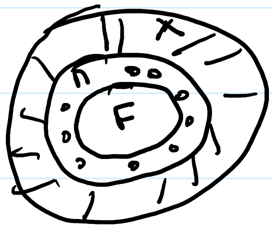
Además $F \subset \Pi = E - (B \cup A) \subset X - (B \cup A) \subset X - B$

luego g_n converge uniformemente a g en F y g coincide con f en F luego g_n converge uniformemente a f en F luego f es continua en F

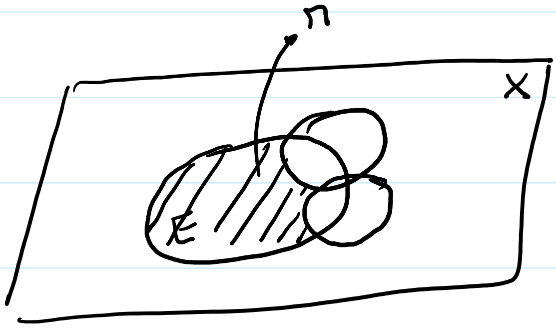
Falta ver que $\mu(X-F) < \varepsilon$

Ahora

$$X - F = (X - \Pi) \cup (\Pi - F)$$



$$X - \Pi = (X - E) \cup (B \cup A)$$



$$\mu(X-F) = \mu(X-\Pi) + \mu(\Pi - F) \leq \mu(X-E) + \mu(B \cup A) + \mu(\Pi - F)$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \underset{\varepsilon/4}{\underset{\wedge}{\mu(B)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mu(A)}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$