Clase 8

Friday, September 6, 2019 6:56 PM

Proposición 94: Sean $f: X \to \mathbb{R}^*$, $g: X \to \mathbb{R}^*$ funciones medibles, entonces $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es medible

Dem: sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r_n \in \mathbb{Q}} \left[\underbrace{\{x \in X : f(x) > r_n\}}_{A_{r_n}} \cap \underbrace{\{x \in X : g(x) < r_n\}}_{B_{r_n}} \right]$$

f y g son medibles A_{r_n} y B_{r_n} son medibles luego su intersección es medible y la unión numerable de medibles es medible.

$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} = \left(\{x \in X : f(x) > g(x)\}\right)^c$$

luego es medible

Proposición 95: Sean f y g funciones de X en $\mathbb{R}^*$ medibles y $f+g$ definida en todo elemento de X entonces $f+g$ es medible

Obs Al decir que $f+g$ este definida en todo elemento de X pue quiere decir que no se da que $f(x) = +\infty$ y $g(x) = -\infty$ o $f(x) = -\infty$ y $g(x) = +\infty$

Dem: $\{x \in X : f(x) + g(x) \leq a\} = \{x \in X : f(x) \leq a - g(x)\}$

Usando prop 87, 88 y 95 se ve ~~que~~

$\{x \in X : f(x) + g(x) \leq a\}$ es medible o sea

$f+g$ es medible

Proposición 96: f es medible si f^+ y f^- son medibles

Dem: $f = f^+ - f^- = f^+ + (-f^-)$

Como f^+ y f^- son medibles y $f^+ + (-f^-)$ esta definida $\forall x \in X$ por la proposición 95 f es medible

Proposición 97: Sea $f : X \to \mathbb{R}^*$ medible y sea $A \subset X$ medible

a) Si g es una función que coincide con f en A^c y es igual a cero en A entonces g es medible

b) La función característica de A, χ_A es medible

c) Si además $g : X \to \mathbb{R}^*$ es medible entonces $f \cdot g$ es medible

Dem: Práctico

Definición 98: Dada una sucesión (f_n) de funciones de X en $\mathbb{R}^*$ se definen las funciones $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ como:

a) $(\sup f_n)(x) = \sup \{ f_n(x) \quad n=1,2,\ldots \}$

b) $(\inf f)(x) = \inf \{ f_n(x) \quad n=1,2,\ldots \}$

c) $(\limsup_n f_n)(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x)$

d) $(\liminf_n f_n)(x) = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n(x)$

e) Si $\limsup_n f_n = \liminf_n f_n = f$ se tiene que $f_n(x)$ converja a $f(x)$ para cada $x \in X$ y ponemos $f = \lim_n f_n$

Proposición 99: Si (f_n) son medibles entonces $\sup f_n$ es medible

Dem: Sea $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : \sup f_n(x) \le a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) \le a\}$$

Como f_n es medible $\{x \in X : f_n(x) \le a\}$ es medible y la intersección numerable es medible luego $\sup_n f_n$ es medible

Vamos a pedir en la entrega 2 de ejercicios probar que $\inf f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$, $\lim_n f_n$ son medibles.

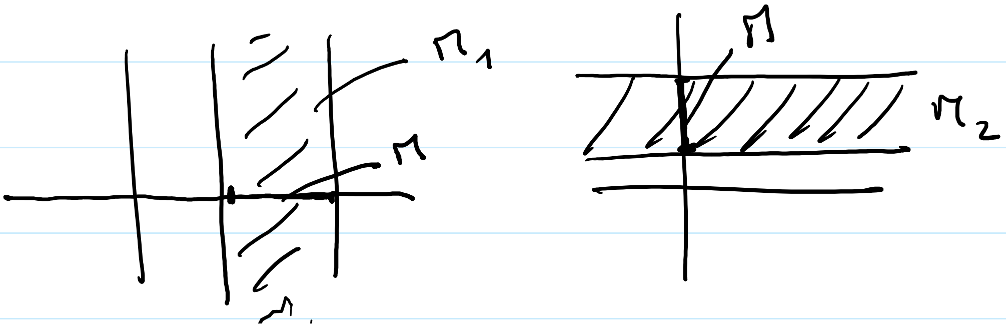
Definición 100:

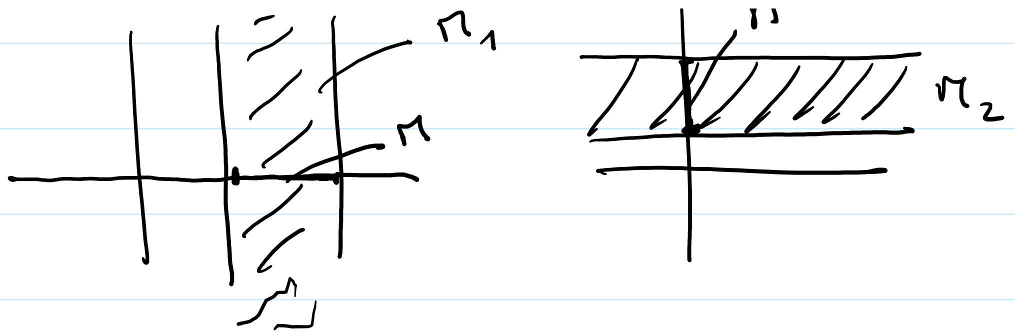
Sea f una función compleja tal que $f = f_1 + i f_2$ con f_1 y f_2 funciones reales.

Si $M \subset \mathbb{R}$ definimos M_1 y M_2 conjuntos del plano complejo como:

$M_1 = \{z = u + iv : u \in M\}$

$M_2 = \{z = u + iv : v \in M\}$





Si M es abierto en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ M_1 y M_2 son abiertos en $\mathbb{C}$

Proposición 101: $f = f_1 + i f_2$ definida en 100 es medible si y sólo si f_1 y f_2 son medibles

Dem: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ $c \leq d$

Cada abierto en $\mathbb{C}$ es unión numerable de abiertos del tipo

$$\Delta = \{ z = u + iv \quad a < u < b \quad , c < v < d \}$$

por lo que f es medible si y sólo si $f^{-1}(\Delta)$ es medible para cada Δ de la forma anterior.

Si f_1 y f_2 son medibles

$$f^{-1}(\Delta) = \{ x \in X : \quad a < f_1(x) < b \quad , c < f_2(x) < d \} =$$

$$= \underbrace{\{ x \in X : a < f_1(x) < b \}}_{\text{medible}} \cap \underbrace{\{ x \in X : c < f_2(x) < d \}}_{\text{medible}}$$

$= \{ x\in X : \underbrace{a < f_1(x) < b \}}_{\text{medible}} \cap \underbrace{\{ x\in X : c < f_2(x) < d \}}_{\text{medible}}$

luego $f^{-1}(A)$ es medible

Si f es medible sea $M \subset \mathbb{R}$ abierto.
Como f_1 y f_2 son reales debo probar que
$f_1^{-1}(M)$ y $f_2^{-1}(M)$ son medibles

$f_1^{-1}(M) = f^{-1}(M_1)$
$f_2^{-1}(M) = f^{-1}(M_2)$

Como f es medible son medibles pues M_1 y M_2 son abiertos.

Def 102: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathbb{K}$ uno de los conjuntos $\mathbb{R}^*, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Sean $f, f_1, f_2, \dots$ funciones de X en $\mathbb{K}$

Se dice (f_n) converge a f en casi todo punto de X si $(f_n(x))$ converge a $f(x)$ para cada $x \in X$ salvo en los puntos de un subconjunto $A \subset X$ de medida nula.
y escribimos

$$\lim_n f_n = f \quad c t p \quad (a.e)$$

Teorema 103 (Egoroff) Si $\mu(X)<\infty$ y (f_n) una sucesión de funciones reales o complejas medibles que convergen en casi todo punto x de X a una función f (real o compleja).
Dado $\varepsilon>0$, existe $B\in\mathcal{A}$ tal que $\mu(B)<\varepsilon$ y (f_n) converge a f uniformemente en B^c

Dem: Sea $A\subset X$ medible, $\mu(A)=0$ y $f_n\to f$ en A^c (puntualmente)

Sean g y (g_n) definidas en X que coinciden con f y (f_n) en A^c y valen cero en A

Las g_n son medibles por la prop 97 (a) y $g_n\to g$ en X pues

si $x\in A^c$

$g_n(x)=f_n(x)\longrightarrow f(x)=g(x)$

si $x\in A$

$g_n(x)=0=g(x)$

Luego g es medible.

Por lo tanto dados dos enteros m y n positivos se tiene que el conjunto

$$A_{nm} = \{ x \in X : |g_m(x) - g(x)| < 1/n \}$$

es medible.

Sea $\quad B_{np} = \bigcap_{m=p}^{+\infty} A_{nm}$

es claro que $(B_{np})_{p=1}^{\infty}$ es creciente $\forall n > 0$

Además si $z \in X$, $\exists q > 0$ (entero) tal que

$$|g_m(z) - g(z)| < 1/n \quad \text{para} \quad m \geq q$$

o sea $\quad z \in A_{nm}$ para $m = q, q+1, \ldots$

o sea $z \in B_{nq}$ luego

$$X = \bigcup_{p=1}^{+\infty} B_{np}$$

La sucesión $(B_{np}^c)_{p=1}^{\infty}$ es decreciente y

$$\bigcap_{p=1}^{+\infty} B_{np}^c = \phi \qquad \left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} B_{np}^c = \left(\bigcup_{p=1}^{+\infty} B_{np}\right)^c = X^c = \phi \right)$$

Como $\mu(B_{n1}^c) \leq \mu(X) < \infty$ o sea

$$\lim_p \mu(B_{np}^c) = \mu(\phi) = 0$$

Luego $\forall n > 0 \quad \exists p_n > 0 \,/\, \mu(B_{np_n}^c) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Sea $M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{np_n}^c$

$$B = M \cup A$$

Probaremos que $\mu(B) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ unif en B^c

$$\mu(B) \leq \mu(M) + \underbrace{\mu(A)}_{0} = \mu(M) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mu(B_{np_n}^c)}_{< \varepsilon/2^n} < \varepsilon$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ $\exists r$ entero, $r > 0 \,/\, \frac{1}{r} < \alpha$

Si $z \in B^c$ entonces $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{np_n}^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{np_n}\right)^c$

o sea $z \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{np_n}$ en particular

$z \in B_{rp_r}$ o sea $z \in A_{rm}$ para $m \geq p_r$

y en particular

$$|g_m(z) - g(z)| = |f_m(z) - f(z)| < \frac{1}{r} < \alpha$$

para $m \geq p_r$ y $z \in B^c$ cualesquiera

∘ Se $f_n \to f$ uniformemente en B^c $\square$