Clase 7

jueves, 05 de setiembre de 2019 20:26

Funciones Medibles

Def 83: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{A}$ será una σ-álgebra y μ es una medida sobre X.

Sea Y un espacio topológico. Una aplicación f de X en Y se dirá μ-medible si para todo abierto A en Y, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

Proposición 84: Si B es un conjunto de Borel de Y y f es una aplicación medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible $(f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$

Dem: Sea $\mathcal{M}$ la familia de los subconjuntos de Y cuya pre-imagen por f son medibles.

Si $M \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(M) \in \mathcal{A}$

Veamos primero que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra de Y

Sea $M \in \mathcal{M}$ debo probar que $M^c \in \mathcal{M}$

Como $f^{-1}(M^c) = (f^{-1}(M))^c$ entonces como $M \in \mathcal{M}$ $f^{-1}(M) \in \mathcal{A}$ pero como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra entonces $(f^{-1}(M))^c \in \mathcal{A}$ luego $f^{-1}(M^c) \in \mathcal{A}$ o sea $M^c \in \mathcal{M}$

Sean $M_1, M_2, \dots \in \mathcal{M}$ debo probar que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \in \mathcal{M}$

o sea $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) \in \mathcal{A}$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}(M_n)}_{\in \mathcal{A} \text{ pues } M_n \in \mathcal{M}} \quad (*)$$

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra $\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(M_n) \in \mathcal{A}$ y por $(*)$

entonces $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) \in \mathcal{A}$ luego $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \in \mathcal{M}$

Y también $\in \mathcal{M}$ pues Y es un abierto y como f es medible, $f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$

Hemos probado que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y como f es medible, todo conjunto abierto está en $\mathcal{M}$, luego $\mathcal{M}$ incluye a la σ-álgebra de Borel

o sea

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$$

Es decir si $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Proposición 85: Supongamos $f: X \to \mathbb{R}^*$

La función f es medible si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones

a) $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$

b) $f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{A}$

c) si A es un abierto de $\mathbb{R}$ entonces $f^{-1}(A)$ es medible.

Dem: ~~Sup~~ongamos f medible

Como $\mathbb{R}^*$ es Hausdorff entonces $\{-\infty\}$ y $\{+\infty\}$ son cerrados y por lo tanto de Borel luego

$f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$

Si A es abierto en $\mathbb{R}$, también es abierto en $\mathbb{R}^*$

luego $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

Veamos el recíproco:

Sea $B \in \mathbb{R}^*$ abierto debo probar que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Como B es abierto en $\mathbb{R}^*$ entonces $B \cap \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$

Se pueden dar 4 condiciones

a) $+\infty$ y $-\infty$ no están en B,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{B \cap \mathbb{R}}_{\text{prop c)}}) \in \mathcal{A}$$

b) $-\infty \in B$ y $+\infty \notin B$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}((B \cap \mathbb{R}) \cup \{-\infty\}) = \underbrace{f^{-1}(B \cap \mathbb{R})}_{\in \mathcal{A}_{\text{pr c)}}} \cup \underbrace{f^{-1}(-\infty)}_{\in \mathcal{A}_{\text{(pr a)}}}$$

c) $-\infty \notin B$ y $+\infty \in B$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}((B\cap R)\cup\{+\infty\}) = \underbrace{f^{-1}(B\cap R)}_{\in\mathcal{A}\text{ por c)}} \cup \underbrace{f^{-1}(+\infty)}_{\in\mathcal{A}\text{ por b)}}$$

d) $-\infty\in B$ y $+\infty\in B$

$$B = (B\cap R)\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}((B\cap R)\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}) = \underbrace{f^{-1}(B\cap R)}_{\in\mathcal{A}\text{ por c)}} \cup \underbrace{f^{-1}(-\infty)}_{\in\mathcal{A}\text{ por a)}} \cup \underbrace{f^{-1}(+\infty)}_{\in\mathcal{A}\text{ por b)}}$$

Proposición 86 La función f es medible si y sólo si $f^{-1}([-\infty, a])$ es medible para todo $a\in R$ ($f: X\to \overline{R}$)

Dem: Si f es medible basta ver que $[-\infty, a]$ es cerrado en $\overline{R}$ y por lo tanto de Borel, luego por la prop 85 $f^{-1}([-\infty,a])\in\mathcal{A}$ o sea es medible

Para el recíproco demostraremos a), b) y c) de la prop 85.

a) $$f^{-1}(-\infty) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}[-\infty,-n]\Big) = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}([-\infty,-n])}_{\in\mathcal{A}\text{ por hip}}}_{\in\mathcal{A}}$$

o sea $f^{-1}(-\infty)$ es medible

b) $f^{-1}(+\infty) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (n,+\infty]\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}([-\infty,n])^c\right) =$

$$f^{-1}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[-\infty,n]\right)^c\right) = \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}([-\infty,n])}_{\in \mathcal{A}}\right)^c}_{\in \mathcal{A}}$$

$f^{-1}(+\infty)$ es medible

c) Sean a y $b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$, se tiene

$$(a,b] = [-\infty,b] - [-\infty,a]$$

$$f^{-1}((a,b]) = \underbrace{f^{-1}([-\infty,b])}_{\in \mathcal{A}} - \underbrace{f^{-1}([-\infty,a])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Si $a<b$ tomo (b_n) en (a,b) tal que

$$\lim_n b_n = b$$

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a,b_n] \quad \text{luego}$$

$$f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}((a,b_n])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Hemos probado que $(a,b) \in \mathcal{A}$

Sea A un abierto de $\mathbb{R}$, existen (a_n) y $(b_n) \in \mathbb{R}$

$a_n \leq b_n$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)$ luego

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}((a_n, b_n))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

o sea hemos probado que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

luego f es medible

Prop 87. Sea $f: X \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible y $b \in \mathbb{R}$ entonces $g = b + f$ es medible.

Dem: Usaré la prop 86

$$g^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}([-\infty, a-b])$$

Como f es medible $f^{-1}([-\infty, a-b]) \in \mathcal{A}$ luego $g^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ o sea g es medible

Prop 88 $f: X \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible, $-f$ es medible

Dem: $(-f)^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}([-a, +\infty])$ $\forall a \in \mathbb{R}$

Pero $f^{-1}([-a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ (Probarlo)

luego $(-f)^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ o sea $-f$ es medible

Prop 89 $f: X \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible y $b \in \mathbb{R}$

entonces $g = bf$ es medible

Dem: Práctico.

Prop 90: $f: X \to \mathbb{R}$. Si f es medible y $p \in \mathbb{R}$ positivo entonces $|f|^p$ es medible

Dem: Práctico

Prop 91: $f: X \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible y $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X$ entonces $1/f$ es medible.

Dem: Práctico

Def 92: Sea $f: X \to \mathbb{R}^*$ definimos f^+ y f^- por:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$
$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Prop 93: Sea $f: X \to \mathbb{R}^*$, medible entonces f^+ y f^- son medibles.

Dem: $$(f^+)^{-1}([-\infty, \overset{\in \mathbb{R}}{b}]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b < 0 \\ \{x \in X : f(x) \leq b\} & b \geq 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\emptyset \in \mathcal{A}$

$\{x : f(x) \leq b\} = f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$ pues f es medible

luego f^+ es medible

$f^- = (-f)^+$

$\max\{-f(x), 0\}$ $\quad$ $\max\{-f(x), 0\}$

Como f es medible $-f$ es medible (prop 88)

luego $(-f)^+$ es medible o sea f^- es medible