Clase 5

Thursday, August 29, 2019 8:22 PM

Teorema 70: Se puede extender λ a una medida μ sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$

Dem: Sea $\mathcal{M}$ la clase de los conjuntos μ^*-medibles.

Por la proposición 69 entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$

Al ser $\mathcal{M}$ un σ-anillo por la proposición 64 entonces $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}$

Sabemos además que la restricción de μ^* sobre $\mathcal{M}$ es una medida por la prop 65 y por lo tanto μ que es la restricción de μ^* sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ es también una medida.

Finalmente por la prop 68 μ coincide con λ sobre $\mathcal{R}$ o sea μ es una extensión de λ.

Teorema 71: Supongamos que λ una medida σ-finita sobre $\mathcal{R}$. Si μ es una medida sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ que es extensión de λ entonces

μ es σ-finita.

<u>Dem</u>: Sea $A \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$. Se puede encontrar una $(A_n) \in \mathcal{R}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Como λ es σ-finita $\forall n$ existe una $(E_{nj})_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{R}$ tal que $A_n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_{nj}$ y $\lambda(E_{nj}) < \infty$ $j = 1, 2, \ldots$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_{nj}$$

Ordenamos las sucesión doble (E_{nj}) en una sucesión B_p $p = 1, \ldots$ $(B_p \in \mathcal{R})$

Observemos que $B_p \cap A \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$

$$\mu(B_p \cap A) \leq \mu(B_p) \underset{\substack{\downarrow \\ \mu \text{ es extensión de } \lambda}}{=} \lambda(B_p) < \infty$$

Pero $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_p \cap A$ luego μ es σ-finita

Teorema 72: Si λ es una medida sobre $\mathcal{R}$, y λ es σ-finita entonces existe una única medida μ sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ extensión de λ.

Dem: Sabemos por el teorema 70 que existe

μ sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ que extiende a λ.

Sea μ_1 otra medida sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ que extiende λ.

Probaremos que $\mu = \mu_1$

Si $A \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ usando la prueba del teorema 7.1 hallamos una $(B_p)_{p=1,\dots} \in \mathcal{R}$ tal que $A \subset \bigcup_{p=1}^{+\infty} B_p$

Por la prop 6 existe $(D_p) \in \mathcal{R}$ $p=1,\dots$ disjuntos dos a dos, tal que $D_p \subset B_p$ y $\bigcup_{p=1}^{+\infty} D_p = \bigcup_{p=1}^{+\infty} B_p$

Sea $\mathcal{M}$ la familia de los conjuntos $M \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ tales que $\mu(M \cap D_p) = \mu_1(M \cap D_p)$ $p = 1, 2, \dots$

Si $B \in \mathcal{R}$ entonces $B \cap D_p \in \mathcal{R}$ $\forall p$

luego $\mu(B \cap D_p) = \lambda(B \cap D_p) = \mu_1(B \cap D_p)$ $\forall p$

o sea $B \in \mathcal{M}$ por lo tanto $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$

Veamos que $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Sea (M_n) una sucesión creciente en $\mathcal{M}$, entonces para todo $p > 0$ la sucesión $(M_n \cap D_p)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y $\mu(M_n \cap D_p) = \mu_1(M_n \cap D_p)$

$$\mu\left(\left(\bigcup^{+\infty} M_n\right) \cap D_p\right) = \mu\left(\bigcup^{+\infty} (M_n \cap D_p)\right) = \lim \mu(M_n \cap D_p)$$

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) \cap D_p\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (M_n \cap D_p)\right) = \lim_n \mu(M_n \cap D_p)$$

$$= \lim_n \mu_1(M_n \cap D_p) = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (M_n \cap D_p)\right) = \mu_1\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) \cap D_p\right)$$

luego $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \in \mathcal{M}$

Sea ahora (Q_n) una sucesión decreciente en $\mathcal{M}$

para cada $p>0$ $(Q_n \cap D_p)$ es decreciente. $(\mu(Q_n \cap D_p) = \mu_1(Q_n \cap D_p))$

$$\mu(Q_1 \cap D_p) = \mu_1(Q_1 \cap D_p) \leq \mu_1(D_p) = \lambda(D_p) < \infty$$

$$\mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} Q_n\right) \cap D_p\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (Q_n \cap D_p)\right) = \lim_n \mu(Q_n \cap D_p)$$

$$= \lim_n \mu_1(Q_n \cap D_p) = \mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (Q_n \cap D_p)\right) = \mu_1\left(\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} Q_n\right) \cap D_p\right)$$

entonces $\bigcap_{n=1}^{+\infty} Q_n \in \mathcal{M}$

o sea $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Como $\mathcal{R}$ es un anillo, la clase monótona generada por $\mathcal{R}$ coincide con $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ (teorema 38)

luego $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}$

Por definición $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}(\mathcal{R})$ luego $\mathcal{M} = \mathcal{S}(\mathcal{R})$

Como $A \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ entonces $A \in \mathcal{S}$

$$\mu(A \cap D_p) = \mu_1(A \cap D_p) \quad \forall p$$

Pero los D_p son disjuntos dos a dos y

$$\bigcup_{p=1}^{+\infty} (A \cap D_p) = A$$ con los $(A \cap D_p)$ disjuntos dos a dos

$$\mu(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} \mu(A \cap D_p) = \sum_{p=1}^{+\infty} \mu_1(A \cap D_p) = \mu_1(A)$$

Medida de Lebesgue-Stieltjes en R

Def 73: Sea f una función finita en $(-\infty, +\infty)$ y no decreciente en R. Además f es continua por la derecha en cada punto o sea $\lim_{x \to y^+} f(x) = f(y)$

Para cada intervalo $(a, b]$ definimos

$$\lambda((a, b]) = f(b) - f(a)$$

Sea ahora $\mathcal{f}$ la clase de uniones finitas de intervalos de la forma $(a, b]$. (En el teorema 11 vimos que $\mathcal{f}$ es un anillo)

Sea $A \in \mathcal{f}$, $A = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i]$ (1) tal que los conjuntos $(a_i, b_i]$ son disjuntos dos a dos.

Defino
$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{p} (f(b_i) - f(a_i))$$

Lema 74: Sea $A \in \mathcal{J}$ entonces el conjunto A se puede expresar como una unión finita de elementos de la forma $(a, b]$ disjuntos dos a dos

Dem: A cargo del lector.

A partir del lema 74 todo $A \in \mathcal{J}$ se puede expresar mediante la forma (1) y puedo definir entonces $\lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{J}$

Es facil probar que λ depende unicamente de A y no de su representación como unión disjunta de intervalos de la forma $(a, b]$. Entonces λ es una aplicación de $\mathcal{J}$ en $\mathbb{R}_+^*$

Proposición 75: La aplicación λ es una medida aditiva sobre $\mathcal{J}$

Dem: Sean $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i] \quad , \quad B = \bigcup_{i=p+1}^{q} (a_i, b_i]$$

Los intervalos $(a_i, b_i]$ son disjuntos 2 a 2 $\forall i$

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{q} (a_i, b_i]$$

$$\lambda(A \cup B) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{q} (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{q} (f(b_i) - f(a_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_{i=p+1}^{q} (f(b_i) - f(a_i)) =$$

$$= \lambda(A) + \lambda(B)$$

Por otro lado $\emptyset = (b, b]$ $\forall b$ luego

$$\lambda(\emptyset) = f(b) - f(b) = 0$$

Lema 75: Dado $(a, b]$ $a < b$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario existen 2 números reales c y d tales que

$$a < c < b < d \quad y \quad \lambda((a, d] - (c, b]) < \varepsilon$$

Dem: Existen α y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$a < \alpha < b < \beta \quad y$$

$$f(\alpha) - f(a) < \varepsilon/2$$

$$f(\beta)-f(b) < \varepsilon/2$$

Si tomo c y d tales que $a<c<\alpha$

$b<d<\beta$

entonces

$$f(c)-f(a) \leq f(\alpha)-f(a) < \varepsilon/2$$
$$f(d)-f(b) \leq f(\beta)-f(b) < \varepsilon/2$$

$$\lambda\big((a,d]-(c,b]\big) \overset{\text{prop 42}}{=} \lambda((a,d])-\lambda((c,b])$$
$$= f(d)-f(a)-(f(b)-f(c)) =$$
$$= \underbrace{f(d)-f(b)}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{f(c)-f(a)}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

Teorema 76 La aplicación λ es una medida sobre $\mathcal{A}$

Dem: Usaré la prop 53 y probaré que λ es regular

como es una medida aditiva sobre $\mathcal{A}$ entonces

λ es una medida.

Sea $\mathbb{R}$ con la topología habitual

Sea $\varepsilon>0$, $A\in\mathcal{A}$

Si $A=\emptyset$ sea $E=F=\emptyset$, $\underbrace{\overline{E}}_{\hookrightarrow \text{compacto}}=\mathring{F}=\emptyset$ $\lambda(F-E)=\lambda(\emptyset)=0$

Si $A\neq\emptyset$, $A=\bigcup^{p}(a_i,b_i]$ disjuntos dos a dos y $a_j < b_j$ (ver lema 7 4)

Por prop anterior $\forall_j$ existen c_j, d_j tales que
$a_j < c_j < b_j < d_j$ y $\lambda((a_j, d_j] - (c_j, b_j]) < \varepsilon/p$

$$E = \bigcup_{j=1}^{p} (c_j, b_j] \Rightarrow \bar{E} = \bigcup_{j=1}^{p} [c_j, b_j] \text{ , } \bar{E} \text{ compacto}$$

$$F = \bigcup_{j=1}^{p} (a_j, d_j] \Rightarrow \mathring{F} = \bigcup_{j=1}^{p} (a_j, d_j)$$

$$E \subset \bar{E} \subset A \subset \mathring{F} \subset F$$

$$F - E \subset \bigcup_{j=1}^{p} \left((a_j, d_j] - (c_j, b_j] \right)$$

$$\lambda(F - E) \leq \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\lambda\left((a_j, d_j] - (c_j, b_j] \right)}_{< \varepsilon/p} < \varepsilon$$

O sea λ es regular luego λ es una medida.