Clase 4

Friday, August 23, 2019 6:51 PM

Definición 59: Medida exterior. Sea $\mathcal{H}$ un anillo hereditario. Una aplicación $\mu^*: \mathcal{H} \to \mathbb{R}^*_+$ se dice que es una medida exterior si cumple:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) Si $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

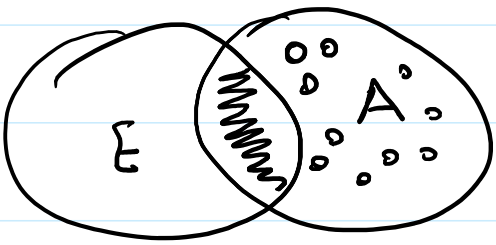
(monotonía)

c) Si $(A_n) \in \mathcal{H}$ $n = 1, 2, \ldots$ $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$

(completamente sub-aditiva)

Def 60: Diremos que un conjunto $E \in \mathcal{H}$ es μ^*-medible si para todo $A \in \mathcal{H}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$



Proposición 61: Un conjunto $E \in \mathcal{H}$ es μ^*-medible

si para cada $A \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

<u>Dem:</u> $A = (A \cap E) \cup (A - E)$

$A \cap E \in \mathcal{H}$, $A - E \in \mathcal{H}$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

y por hip

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

luego se verifica la igualdad.

Proposición 62 Si $E \in \mathcal{H}$ y $\mu^*(E) = 0$ entonces E es μ^*- medible.

<u>Dem:</u> Sea $A \in \mathcal{H}$ cualesquiera, $A \cap E$ y $A - E \in \mathcal{H}$

$A = (A \cap E) \cup (A - E)$ luego

$$\underbrace{\mu^*(A \cap E)}_{A \cap E \subset E} + \mu^*(\underbrace{A - E}_{A - E \subset A}) \leq \overbrace{\mu^*(E)}^{= 0} + \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

o sea $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$

Por prop 61, E es μ^*-medible.

Lema 63: a) Si $E, F \in \mathcal{H}$ y son μ^*-medibles entonces $E \cup F$ es μ^*-medible

b) Si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{H}$ y son μ^*-medibles entonces $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ es μ^*-medible.

c) Si $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{H}$ son disjuntos dos a dos y μ^*-medibles entonces para cada $A \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

con $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

d) Sea $(E_n) \in \mathcal{H}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ disjuntos dos a dos y μ^*-medibles. Si $S = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$

entonces para todo $A \in \mathcal{H}$

$$\mu^*(A \cap S) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_j)$$

e) Sea $(E_n) \in \mathcal{H}$ disjuntos dos a dos μ^*-medibles entonces S es μ^*-medible

f) Sean $E, F \in \mathcal{H}$ μ^*-medibles $\Rightarrow$ $E-F$ es μ^*-medible

Dem: A cargo del lector.

Proposición 64: Sea $\mathcal{S}$ la clase de todos los elementos μ^*-medibles de $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{S}$ es un σ-anillo sobre X

Dem: Veamos primero que $\mathcal{S}$ no es No vacío. pues $\phi \in \mathcal{S}$ pues por definición $\mu^*(\phi) = 0$ y la prop 62 nos dice que ϕ es μ^*-medible o sea $\phi \in \mathcal{S}$

Sean $E, F \in \mathcal{S}$ por lema 63 (f), $E - F \in \mathcal{S}$

Sea $(A_n) \in \mathcal{S}$.

Consideremos $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1, \ldots, B_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$

$B_n \in \mathcal{S}$ $\forall n$ por lema 63 (b)(f)

Ahora $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ pero los B_n son disjuntos

dos a dos y $B_n \in \mathcal{S}$ luego lema 63 (e)

dos a dos y $B_n \in \mathcal{M}$ luego lema 63 (e)
implica $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M}$ o sea $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Teorema 65: La restricción μ de μ^* a $\mathcal{M}$ es una medida completa.

Dem: $\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$

Sea $(E_n) \in \mathcal{M}$ disjuntos dos a dos
Por el lema 63 parte (d) para todo $A \in \mathcal{M}$

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_n) \quad (1)$$

Consideremos en (1) $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$
Obtengo

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n)$$

Veamos que μ es completa
Sea $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$ debo probar que si $F \subset E$ entonces $F \in \mathcal{M}$ o sea F es μ^*-medibles
Como $F \subset E$ $\mu^*(F) \leq \mu^*(E) = 0$

luego $\mu^*(F)=0$ y por prop 62, $F \in \mathcal{M}$

Teoremas de Extensión

El problema es: dado un anillo $\mathcal{R}$ sobre X y λ una medida sobre $\mathcal{R}$ queremos hallar una medida μ sobre $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ (σ-anillo generado por $\mathcal{R}$) tal que μ restringida a $\mathcal{R}$ coincida con λ

O sea μ es una extensión de λ

Definición 66 Sea $\mathcal{R}$ un anillo sobre X y λ una medida sobre $\mathcal{R}$. Sea $A \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$

Sea $\mathcal{H} = \{ A \subset X : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ para alguna sucesión $(C_n) \in \mathcal{R} \}$

Para cada $A \in \mathcal{H}$, defino $\mu^* : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^*_+$ como

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(C_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n , (C_n) \in \mathcal{R} \right\}$$

Proposición 67: μ^* es una medida exterior sobre $\mathcal{H}(\mathcal{R})$

Dem: a) Es claro que $\mu^*(\phi) \geq 0$

Sea $(E_n) \in \mathcal{R}$ tal que $E_n = \phi \ \forall n$

$\phi \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ luego $\mu^*(\phi) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda(E_n)}_{= 0} = 0$

o sea $\mu^*(\phi) = 0$

b) Sean A y $B \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ con $A \subset B$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists (F_n) \in \mathcal{R}$ tal que

$$\mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(F_n)$$

y $B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$

Como $A \subset B \Rightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(F_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

como ε es arbitrario $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

c) Sea $(A_n) \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$

Para cada A_n, dado $\varepsilon > 0$ $\exists (E_{n_j}) \in \mathcal{R}$ tal que $A_n \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_{n_j}$ y $\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda(E_{n_j})$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_{n_j}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda(E_{nj}) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}}_{=\varepsilon} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

Pero ε es arbitrario luego

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

o sea μ^* es una medida externa sobre $\mathcal{H}(\mathcal{R})$

Proposición 68: La restricción de μ^* a $\mathcal{R}$ coincide con λ.

Dem: Sea $A \in \mathcal{R}$, Sea $(E_n) \in \mathcal{R}$ tal que $E_1 = A$, $\phi = E_2 = E_3 = \cdots$

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n) = \lambda(A) \quad (1)$$

Si $(F_n) \in \mathcal{R}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, como λ es una medida sobre $\mathcal{R}$

$$\lambda(A) \leq \sum^{+\infty} \lambda(F_n)$$

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(F_n)$$

$$\lambda(A) \leq \underbrace{\inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(F_n),\ (F_n) \in \mathcal{R}\ A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \right\}}_{\mu^*(A)}$$

$$\lambda(A) \leq \mu^*(A) \quad (2)$$

de (1) y (2) $\quad \lambda(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$

Proposición 69: Los conjuntos de $\mathcal{R}$ son μ^*-medibles

Dem: Sea $E \in \mathcal{R}$, consideremos $A \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $(E_n) \in \mathcal{R}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$

y $\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n)$

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda((E_n \cap E) \cup (E_n - E)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n \cap E) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n - E)$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n \cap E) \supset A \cap E \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n \cap E) \geq \mu^*(A \cap E) \quad (A)$$

$$\bigcup_{n=1} (E_n \cap E) \supset A \cap E \Rightarrow \sum_{n=1} \lambda(E_n \cap E) \geq \mu(A \cap E) \quad (A)$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n - E \supset A - E \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n - E) \geq \mu^*(A - E) \quad (B)$$

Tenemos entonces que:

$$\mu^*(A) + \varepsilon \underset{(A) y (B)}{\geq} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

o sea $E \in \mathcal{R}$ es μ^*-medible.