Clase 3

Friday, August 16, 2019 10:03 PM

Proposición 48: Sea $\mathcal{R}$ un anillo sobre X, (A_n) una sucesión en $\mathcal{R}$ monótona creciente y tal que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$ y sea μ una medida sobre $\mathcal{R}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

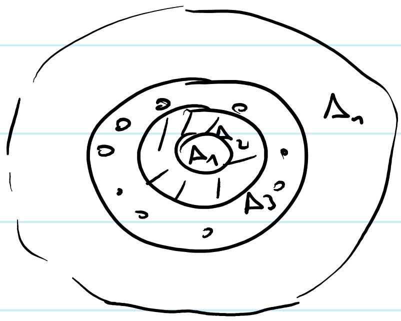
<u>Dem:</u> Si existe p tal que $\mu(A_p) = +\infty$ como la sucesión es creciente $A_p \subset A_{p+1} \subset \ldots \Rightarrow$

$\mu(A_p) = \mu(A_{p+1}) = \_\_ = +\infty$

Sabemos que $A_p \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ luego por monotonía

$\mu(A_p) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ o sea $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty = \lim_n \mu(A_n)$

Supongamos que $\mu(A_n) < \infty \ \forall n$



Sea $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1, \ldots, B_n = A_n - A_{n-1}$

Se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y los B_n son disjuntos dos a dos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\mu(A_1)+\mu(A_2-A_1)+\mu(A_3-A_2)+\dots+\mu(A_n-A_{n-1})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\cancel{\mu(A_1)}+\cancel{\mu(A_2)}-\cancel{\mu(A_1)}+\cancel{\mu(A_3)}-\cancel{\mu(A_2)}+\dots+\mu(A_n)-\cancel{\mu(A_{n-1})}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$ o sea

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

Proposición 49: Sea $\mathcal{R}$ un anillo en X, (A_n) una sucesión monótona creciente en $\mathcal{R}$ y tal que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\in\mathcal{R}$ y $\mu(A_1)<\infty$.
Sea μ una medida sobre $\mathcal{R}$ entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=\lim_{n}\mu(A_n)$$

Dem: Sea $B_1=\phi$, $B_2=A_1-A_2$, ..., $B_n=A_1-A_n$

La sucesión B_n es monótona creciente

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n=A_1-\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Por prop 48

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_n \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n) \quad (1)$$

Como $A_1 \supset \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ y $\mu(A_1) < \infty$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \quad (2)$$

de (1) y (2) $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$

Proposición 50 Sea $(A_n) \in \mathcal{R}$, $\underline{A \in \mathcal{R}}$.
($\mathcal{R}$ un anillo sobre X), μ una medida sobre $\mathcal{R}$
y tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ entonces

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Dem: Sabemos que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \cap A)$$

$A_n \cap A \in \mathcal{R}$ $\forall n$ luego por la prop 6 existe una $(B_n) \in \mathcal{R}$ tal que $B_n \subset A_n \cap A$ y

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \cap A)}_{A}$$ y los B_n disjuntos dos a dos

B_n disjuntos dos a dos

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \cap A)$$

$B_n \subset A_n \cap A$

$$\underset{A_n \cap A \subset A_n}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

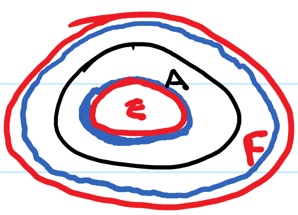
Corolario 51: Si $(A_n) \in \mathcal{R}$ $n=1,2,\ldots$ y $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Dem Tomar $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ en la prop 50

Definición 52: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{R}$ un anillo sobre X y λ una medida aditiva definida en $\mathcal{R}$

Decimos que λ es regular si dado $A \in \mathcal{R}$ y $\varepsilon > 0$ existen E y $F \in \mathcal{R}$ tales que $\bar{E}$ es un compacto contenido en A, $\mathring{F}$ contiene a A y $\lambda(F - E) < \varepsilon$



Proposición 53: Si λ es una medida aditiva

regular sobre $\mathcal{R}$ entonces λ es una medida.

<u>Dem:</u> Sea $(A_n) \in \mathcal{R}$ disjuntos dos a dos y tal que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$ debo probar que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$$

. Dado $p>0$ arbitrario $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \supset \bigcup_{n=1}^{p} A_n$

luego $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geq \overbrace{\sum_{n=1}^{p}}^{\text{finitos}} \lambda(A_n)$ entonces

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \qquad (1)$$

. Veamos ahora que $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$

Para $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ $\exists$ $E \in \mathcal{R}$ tal $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n - E\right) < \varepsilon/2$ con ε arbitrario y además $\bar{E} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Para cada A_n existen $F_n \in \mathcal{R}$ tal que

$$\lambda(F_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

además $\mathring{F}_n \supset A_n$

Se cumple que $\bar{E} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathring{F}_n}$

es un cubrimiento abierto de $\bar{E}$

Como $\bar{E}$ es compacto $\quad \bar{E} \subset \bigcup_{n=1}^{q} \mathring{F}_n$

$$E \subset \bar{E} \subset \bigcup_{n=1}^{q} \mathring{F}_n \subset \bigcup_{n=1}^{q} F_n$$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1} A_n - E\right) + \lambda(E) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \lambda(E) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{q} F_n\right) =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{q} \lambda(F_n) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{q}\left(\lambda(F_n - A_n) + \lambda(A_n)\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{q} \lambda(F_n - A_n) + \sum_{n=1}^{q} \lambda(A_n) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda(F_n - A_n)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}}_{\leq \varepsilon/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$$ como ε es arbitrario

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \qquad (2)$$

Por (1) y (2) $\quad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$

o sea λ es una medida.

Definición 54: Espacio de Medida

Consideremos un conjunto X y un σ-anillo $\mathcal{S}$

Al par $(X, \mathcal{S})$ se le llama espacio medible

y cada elemento de $\mathcal{S}$ se le llama conjunto medible

Sea μ una medida sobre $\mathcal{S}$ entonces a terna

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ se le llama espacio de medida.

Definición 55: Se dice que el espacio $(X, \mathcal{S}, \mu)$

es completo si dado $A \in \mathcal{S}$ y tal que $\mu(A) = 0$

cada subconjunto de A pertenece a $\mathcal{S}$

También se dice que μ es completa.

Prop 56: Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de

medida y sea

$$\overline{\mathcal{S}} = \{ A \cup M : A \in \mathcal{S}, M \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0 \}$$

Entonces $\overline{\mathcal{S}}$ es un σ-anillo sobre X y que

contiene a $\mathcal{S}$

Dem: A cargo del lector.

Prop 57 : Si para $P \in \bar{\mathcal{S}}$ definimos $\bar{\mu}(P) = \mu(A)$ con A tal que $P = A \cup M$, $A \in \mathcal{S}$, $M \subset B \in \mathcal{S}$ $\mu(B) = 0$. Entonces $\bar{\mu}$ es una aplicación de $\bar{\mathcal{S}}$ en $\mathbb{R}_+^*$ y $\bar{\mu}$ es una medida completa.

Dem: A cargo del lector

El espacio $(X, \bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ se le llama compleción de $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Es claro que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ.

Def 58 Sea μ una medida sobre $\mathcal{R}$ (anillo)

Diremos que μ es finita si $\forall A \in \mathcal{R}$, $\mu(A) < \infty$

Diremos que μ es σ-finita si cada elemento de $\mathcal{R}$ es unión numerable de elementos de $\mathcal{R}$ cuya medida es finita. $\forall A \in \mathcal{R}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $A_n \in \mathcal{R}$, $\mu(A_n) < \infty$.