Clase 2

Friday, August 16, 2019 7:09 PM

Proposición 14: Sea $\mathcal{R}$ un anillo sobre X.
$\mathcal{R}$ es un álgebra si y solo si $X \in \mathcal{R}$

Dem: $(\Rightarrow)$ Si $\mathcal{R}$ es un álgebra por definición $X \in \mathcal{R}$

$(\Leftarrow)$ Sea $A \in \mathcal{R}$ debo probar que $A^c \in \mathcal{R}$
pero como por hipótesis $X \in \mathcal{R}$ $A^c = X - A$
como $\mathcal{R}$ es un anillo $X - A \in \mathcal{R}$ luego $A^c \in \mathcal{R}$
o sea $\mathcal{R}$ es un álgebra.

Proposición 15: Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia no vacía de álgebras sobre X. Entonces $\bigcap \{A_i : i \in I\}$ es un álgebra sobre X

Dem: Como A_i es un álgebra $\forall i$, A_i es un anillo para todo i (proposición 13) y sabemos que $\bigcap \{A_i : i \in I\}$ es un anillo (propiedad 3)

Como A_i es un álgebra, $X \in A_i$ $\forall i$ por lo tanto $X \in \bigcap \{A_i : i \in I\}$
Por la proposición 14 $\Rightarrow \bigcap \{A_i : i \in I\}$ es un álgebra.

Proposición 16 Sea $\mathcal{A}$ una clase no vacía de subconjuntos de X. Entonces existe en X un álgebra mínima que contiene a $\mathcal{G}$.

Dem: Sea la familia $\{A_i : i \in I\}$ donde A_i es un álgebra y $\mathcal{G} \subseteq A_i \ \forall i$

Esta familia es no vacía ya que el conjunto de las partes de X es un álgebra y contiene a $\mathcal{G}$

Luego por la prop 15 $\bigcap \{A_i : i \in I\}$ es un álgebra y es mínima con respecto a la inclusión.

Nota: Al álgebra mínima que contiene a $\mathcal{G}$ se le llama álgebra generada por $\mathcal{G}$.

Definición 17: Se dice que una clase $\mathcal{S}$ no vacía de subconjuntos de X es un σ-anillo si cumple:

a) Si E y $F \in \mathcal{S} \Rightarrow E - F \in \mathcal{S}$

b) Si $E_n \in \mathcal{S}$ $n = 1, \dots$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$

Proposición 18: Si $\mathcal{S}$ es un σ-anillo sobre X entonces $\mathcal{S}$ es un anillo sobre X.

Dem: Como $\mathcal{S}$ es no vacío entonces existe $E \in \mathcal{S}$

Luego $E - E = \emptyset \in \mathcal{S}$

Sean E y $F \in \mathcal{S}$ y definamos $E_1 = E$, $E_2 = F$, $E_3 = \dots = \emptyset$

$\bigcup^{\infty} E \in \mathcal{S}$

$$E \cup F = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{S}$$

Proposición 19: Sea $\mathcal{S}$ un σ-anillo sobre X. Sean $E_n \in \mathcal{S}$ $n=1,2,\ldots$ entonces

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{S}$$

Dem: Sea $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{S}$ por definición

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \underset{\in \mathcal{S}}{E} - \underbrace{\left(E - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)}_{\text{si pruebo que } \in \mathcal{S} \text{ ya está}}$$

$$E - \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(E - E_n)}_{z\in E \text{ y } z\notin E_n}}_{z \in E \text{ y } z \notin \text{ a todo } E_n}$$

Pero $E - E_n \in \mathcal{S}$ luego $\bigcup_{n=1}^{+\infty}(E - E_n) \in \mathcal{S}$ o sea $E - \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{S}$

Proposición 20 Sean $\{\mathcal{S}_i : i \in I\}$ una familia no vacía de σ-anillos sobre X. Entonces $\bigcap\{\mathcal{S}_i : i\in I\}$ es un σ-anillo.

Proposición 21 Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces existe un σ-anillo mínimo (respecto a la inclusión) que contiene a $\mathcal{G}$

Demuestra el lector las prop 20 y 21

<u>Nota</u>: Al σ-anillo mínimo de la prop 21 se le llama σ-anillo generado por $\mathcal{G}$, y lo notamos $\mathcal{S}(\mathcal{G})$

Definición 22: Se dice que una clase $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X es un σ-anillo hereditario si:

a) $\mathcal{H}$ es un σ-anillo

b) si $A \in \mathcal{H}$ y $B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{H}$

Proposición 23: Sea $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ una familia de σ-anillos hereditarios sobre $X \Rightarrow \bigcap \{\mathcal{H}_i \; i \in I\}$ es un σ-anillo hereditario sobre X

Proposición 24: Sea $\mathcal{G}$ una flia no vacía de subconjuntos de X. Entonces existe un σ-anillo hereditario mínimo que contiene a $\mathcal{G}$. Lo notaremos por $\mathcal{H}(\mathcal{G})$

Demuestra el lector las prop 23 y 24

Proposición 25: Sea $\mathcal{G}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Si $A \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$ entonces existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Dem: Sea $\mathcal{P}$ la familia de conjuntos de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ que puede ser recubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{C}$

Es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ es un σ-anillo hereditario (probarlo) por lo tanto $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}$ pues $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ es el mínimo anillo hereditario.

Además $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}(\mathcal{C})$ por como lo definimos

luego $\mathcal{P} = \mathcal{H}(\mathcal{C})$

o sea todo $A \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ puede ser recubierto por una unión numerable de elementos de $\mathcal{C}$.

Definición 26: σ-álgebra. Una σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X que cumple

a) $X \in \mathcal{A}$

b) Si $A_n \in \mathcal{A}$ $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

c) Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Proposición 27. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre $X \Rightarrow \mathcal{A}$ es un σ-anillo sobre X.

Dem: Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A - B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$$
$$\downarrow$$
$$((A \cap B^c)^c)^c$$

Como $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ $\Big\}$ $\Rightarrow A^c \cup B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$
$B \in \mathcal{A}$

o sea $A - B \in \mathcal{A}$.

Proposición 28: Sea $\mathcal{R}$ un σ-anillo de X
$\mathcal{R}$ es una σ-álgebra si y solo si $X \in \mathcal{R}$

Dem: ~~Idem~~ Análogo a prop 14

Proposición 29: Sea $\{\mathcal{A}_i \; i \in I\}$ una familia no vacía de σ-álgebras sobre X
Entonces $\bigcap \{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ es una σ-álgebra sobre X

Proposición 30: Sea $\mathcal{G}$ una clase no vacía de subconjuntos de X. Entonces existe la mínima σ-álgebra sobre X que incluye a $\mathcal{G}$. A esta σ-álgebra se le llama σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$ ($\mathcal{A}(\mathcal{G})$)

Dejamos a cargo del lector la demostración de 29 y 30

Definición 31: Sea X es un espacio topológico

A la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por los conjuntos abiertos de X se le llama σ-álgebra de Borel. A los conjuntos $B \in \mathcal{B}$ se les llama conjuntos de Borel o Borelianos.

Definición 32: En un conjunto X, una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X se dice:

a) que es monótona creciente (expansiva) si

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n$$

b) que es monótona decreciente (contractiva) si

$$A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n$$

Definición 33: Una clase no vacía $\mathcal{M}$ de subconjuntos se dice que es monótona si cumple.

a) si $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, \ldots$ y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

b) Si $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, \ldots$ y $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Proposición 34: Si $\mathcal{S}$ es un σ-anillo entonces $\mathcal{S}$ es una clase monótona

Dem: Trivial.

Proposición 35: Sea $\mathcal{M}$ una clase monótona en X. Si $\mathcal{M}$ es un anillo $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ es un σ-anillo.

Dem: Sea $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, \ldots$

Quiero probar que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Sea la sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ definida como:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_1 \cup A_2$$

$$\text{------}$$

$$B_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Como $\mathcal{M}$ es un anillo $B_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$

Además (B_n) es monótona creciente por lo tanto como $\mathcal{M}$ es una clase monótona $\Rightarrow$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M} \quad \text{pero} \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

luego $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$ o sea $\mathcal{M}$ es un σ-anillo.

Nota: Sea $\mathcal{P}$ una clase no vacía de subconjuntos de X. Sabemos que el conjunto de las partes de X es una clase monótona.

Se puede probar que la intersección de una familia no vacía de clases monótonas es una clase monótona (Hacerlo) y que existe una clase monótona mínima sobre X

que contiene a $\mathcal{P}$ ($\mathcal{M}(\mathcal{P})$) a la cual llamaremos clase monótona generada por $\mathcal{P}$ (Hacerlo)

Definición 36: Sea $\mathcal{M}$ una clase monótona de X. Dado $F \subset X$ notamos por $\mathcal{U}(F)$ a la clase de subconjuntos $E \subset X$ tales que
$E-F$, $F-E$ y $E \cup F \in \mathcal{M}$

Es claro que si $E \in \mathcal{U}(F)$ entonces $F \in \mathcal{U}(E)$

Proposición 37: Si la clase $\mathcal{U}(F)$ es no vacía entonces $\mathcal{U}(F)$ es una clase monótona

Dem: Práctico 1

Teorema 38: Si $\mathcal{R}$ es un anillo sobre X entonces la clase monótona generada por $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}(R)$ es un σ-anillo y coincide con el σ-anillo generado por $\mathcal{R}$ ($\mathcal{S}(R)$)

Dem: Probemos primero que $\mathcal{U}(F)$ con $F \in \mathcal{R}$ es una clase monótona.
o sea $\mathcal{U}(F)$ debe no ser vacía por 37
Para ello probaré que cualquier conjunto $E \in \mathcal{R}$ está en $\mathcal{U}(F)$
Sea $E \in \mathcal{R}$ luego por ser $\mathcal{R}$ anillo $E-F, F-E, E \cup F$

están en $\mathcal{R}$ luego como $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{R})$ entonces
$E-F$, $F-E$, $E \cup F$ están en $\mathcal{M}(\mathcal{R})$
luego por la prop 37, $\mathcal{U}(F)$ es una clase monótona
Pero $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es mínima una clase monótona que contiene a $\mathcal{R}$
y además $\mathcal{U}(F)$ contiene a $\mathcal{R}$.
Por lo tanto $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{U}(F)$ $\forall F \in \mathcal{R}$

Probemos que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es un σ-anillo, por la proposición 35 alcanza con probar que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es un anillo.
Sean A y $B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ debemos probar que
$A-B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ y $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ $\circledast$
pero $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{U}(P)$ con $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) \Rightarrow$
$A \in \mathcal{U}(B)$ (tomando $P = B$ y observando que $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$) luego $A-B$, $B-A$, $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$

Probemos $\circledast$
Sea $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, sea $F \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathcal{U}(F)$
pero entonces $F \in \mathcal{U}(P)$, pero F es arbitrario
luego $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}(P)$ $\forall P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$

Hemos probado que $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es un σ-anillo.
Falta ver que $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{R})$
$\mathcal{M}(\mathcal{R})$ es un σ-anillo que incluye a $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{R})$

Como $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ es una clase monótona (prop 34) que es denso en $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{R})$

luego $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{R})$

Definición 39: Llamamos recta real ampliada y la notaremos por R^* al conjunto de los números real junto con los elementos $+\infty$ y $-\infty$ extendiendo las operaciones y las relaciones de orden mediante las reglas o convenios siguientes

$\forall x \in R$

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$x - (+\infty) = -\infty$$

$$x - (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) - x = +\infty$$

$$(-\infty) - x = -\infty$$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|-\infty|^x = |+\infty|^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$$

$$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$

$\mathbb{R}^*$ esta dotado de una topología $\mathcal{U}$

$A\subset \mathbb{R}^*$, $A\in\mathcal{U} \iff$ cumple

a) si A no contiene a $+\infty$ ni a $-\infty$, A es un abierto de $\mathbb{R}$

b) Si $-\infty\in A \Rightarrow A\cap\mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y $\exists a\in\mathbb{R}$ tal $\forall x\in A$ $x<a$

c) si $+\infty\in A\Rightarrow A\cap\mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y $\exists b\in\mathbb{R}$ tal que $\forall x\in A$ $b<x$

Definimos $\mathbb{R}^*_+=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}\cup\{+\infty\}$

Definición 40: Sea ahora $\mathcal{R}$ un anillo sobre X. Una aplicación $\lambda:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^*_+$ es una medida aditiva si:

1) $\lambda(\emptyset)=0$

2) si $A,B\in\mathcal{R}$ y $A\cap B=\emptyset\Rightarrow \lambda(A\cup B)=\lambda(A)+\lambda(B)$

Por recurrencia si $A_1,A_2,\ldots,A_n$ elementos disjuntos dos a dos de $\mathcal{R}$ $\Rightarrow$

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda(A_i)$$

Proposición 41: (Monotonía) Si $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$

Dem: Como $B - A \in \mathcal{R}$ y $B = A \cup (B-A)$ y $A \cap (B-A) = \phi$ entonces

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B-A) \geq \lambda(A)$$

Proposición 42: (Propiedad Sustractiva)

Si $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B$ y $\lambda(A) < +\infty$ entonces

$$\lambda(B-A) = \lambda(B) - \lambda(A)$$

Dem: Sabemos por prop 41 $\lambda(A) + \lambda(B-A) = \lambda(B)$

como $\lambda(A)$ es finito $\lambda(B-A) = \lambda(B) - \lambda(A)$

Proposición 43: Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ y

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

entonces $\lambda(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j)$

Dem: Sabemos que podemos encontrar $B_n \in \mathcal{R}$ disjuntos dos a dos tal que $B_n \subset A_n \ \forall n$ y $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

$$\lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(B_j) \underset{B_j \subset A_j \forall j}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j)$$

Definición 44: Se dice que la medida λ es finita si $\lambda(A) < +\infty \quad \forall A \in \mathcal{R}$

Corolario 45: Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j)$
(finitamente subaditiva)

Es inmediato tomando $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ en la prop 43

Definición 46: Sea $\mathcal{R}$ un anillo sobre un conjunto X
Una aplicación $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ se dice que es una medida si cumple

1) $\mu(\phi) = 0$

2) Si $A_n \in \mathcal{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ y $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$ con (A_n) disjuntos dos a dos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

esto se llama aditividad completa.

Propiedad 47: La aplicación μ es una medida aditiva

Dem: $A, B \in \mathcal{R}$ y $A \cap B = \phi$ tomamos

$A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \ldots = \phi$