Clase 1

jueves, 06 de junio de 2019 5:09

Definición 1: Anillo de conjuntos

Un anillo $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X es una clase no vacía de subconjuntos de X que cumple:

a) Si E y $F \in \mathcal{R} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{R}$

b) si E y $F \in \mathcal{R} \Rightarrow E - F \in \mathcal{R}$

También se le llama anillo de Boole sobre X

Propiedad 2 Si $\mathcal{R}$ es un anillo sobre X entonces:

a) $\phi \in \mathcal{R}$

b) la unión finita de elementos de $\mathcal{R}$ pertenece a $\mathcal{R}$

c) la intersección finita de elementos de $\mathcal{R}$ pertenece a $\mathcal{R}$

d) la diferencia simétrica de elementos de $\mathcal{R}$ pertenece a $\mathcal{R}$

Dem: a) Como $\mathcal{R}$ es no vacía, existe $E \in \mathcal{R}$.

Por definición entonces $E - E = \phi \in \mathcal{R}$

b) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$

Sabemos que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$ luego

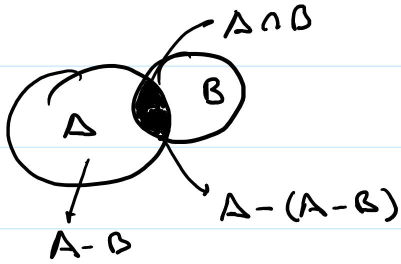
$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{R}$ o sea $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{R}$

$$(\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\in \mathcal{R}}) \cup \underbrace{A_3}_{\in \mathcal{R}} \in \mathcal{R} \quad \text{o sea} \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{R}$$

Procediendo en forma recurrente vemos que

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{R}$$

c) Me alcanza probar que si $A, B \in \mathcal{R}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{R}$

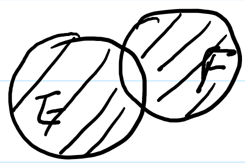


$$A \cap B = \underbrace{A - (\underbrace{A-B}_{\in \mathcal{R}})}_{\in \mathcal{R}}$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$$

Procediendo en forma recurrente probamos que la intersección finita de elementos de $\mathcal{R}$ está en $\mathcal{R}$

d) $E \Delta F = (E-F) \cup (F-E)$



Es claro que $E \Delta F \in \mathcal{R}$ pues es la unión de dos conjuntos que están en $\mathcal{R}$

Para probar que la diferencia simétrica de finitos conjuntos está en $\mathcal{R}$ se procede como en b)

<u>Propiedad 3</u> Sea $\mathcal{R}_i$ $i \in I$ una familia de anillos sobre X. Entonces:

$$\bigcap \{\mathcal{R}_i : i \in I\} \text{ es un anillo de } X$$

Dem: $\cap\{R_i : i\in I\}$ no es vacío pues $\phi\in R_i \ \forall i$ pues R_i es un anillo $\Rightarrow \phi\in\cap\{R_i : i\in I\}$

Sean E y $F\in\cap\{R_i : i\in I\}$

E y $F\in R_i \ \forall i$ pero R_i es un anillo $\Rightarrow E\cup F$ y $E-F\in R_i \ \forall i$ luego $E\cup F\in\cap\{R_i : i\in I\}$

$E-F\in\cap\{R_i : i\in I\}$

<u>Propiedad 4</u> Sea $\mathcal{C}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces existe un anillo sobre X mínimo que contiene a $\mathcal{C}$ (mediante la inclusión)

Dem: Sea $\{R_i : i\in I\}$ la familia de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$.

Esta familia no es vacía pues el conjunto de las partes de X es un anillo (verlo) y contiene a $\mathcal{C}$

La $\cap\{R_i : i\in I\}$ por la propiedad 3 es un anillo y este es mínimo con la relación de inclusión y como $\mathcal{C}\subset R_i \ \forall i \Rightarrow \mathcal{C}\subset\cap\{R_i : i\in I\}$

<u>Definición 5</u> En la proposición 4 al anillo mínimo de X que contiene a $\mathcal{C}$ se le llama anillo generado por $\mathcal{C}$ y se le nota $\mathcal{R}(\mathcal{C})$

Proposición 6 Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos del anillo $\mathcal{R}$. Entonces existe una sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{R}$ disjuntos dos a dos tal que

a) $B_n \subset A_n \quad \forall n$

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Dem: Pongamos

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 - A_1$$
$$B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$$
$$- - - - - - \text{———}$$
$$B_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$$

Es claro que $B_n \in \mathcal{R}$ pues es la diferencia de elementos de $\mathcal{R}$, para todo n

Los B_n son disjuntos dos a dos

$B_n = A_n - (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$ luego. $B_n \subset A_n \quad \forall n$

Sea $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y sea p tal A_p es el primer término de la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ al cual pertenece z

Si $p = 1 \Rightarrow z \in B_1$

si $p > 1 \Rightarrow z \in A_p$ y $z \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{p-1}$

$\Rightarrow z \in A_p - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{p-1}) = B_p$

Como z es arbitrario

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Corolario 7: Sean $A_1, \ldots, A_n$ elementos del anillo $\mathcal{R}$. Entonces existen en $\mathcal{R}$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que son disjuntos dos a dos y

$$B_j \subset A_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$
$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Dem: Ponemos $\phi = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$

Tengo una sucesión $(A_p)_{p=1}^{\infty}$, por la propiedad 6 existen $(B_p)_{p=1}^{\infty}$ elementos de $\mathcal{R}$ y disjuntos dos a dos y cumplen

$$B_p \subset A_p \quad \forall p$$
$$\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$$

Sabemos que $A_p = \phi$ para $p > n \Rightarrow B_p = \phi ; p > n$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \\ \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Sea $\mathcal{J}$ la clase de todas las uniones finitas de los intervalos de la forma $(a, b]$

Proposición 8: Si A y $B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$

<u>Dem:</u> Sean $A = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i]$

$$B = \bigcup_{j=1}^{q} (c_j, d_j]$$

$$A \cap B = \bigcup \{ (a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] \quad i=1,\dots,p \quad j=1,\dots,q \}$$

esta es una unión finita

Si pruebo que $(a_i, b_i] \cap (c_j, d_j]$ es de la forma $(a, b]$ $\Rightarrow$ $A \cap B$ es la unión finita de intervalos de la forma $(a, b]$ luego $\in \mathcal{A}$

- Si $(a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] = \emptyset$ entonces este conjunto lo puedo escribir como $(a, a]$ con a un número real cualesquiera.
- Si $(a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] \neq \emptyset$ existe α real tal que $a_i < \alpha \leq b_i$

$$c_j < \alpha \leq d_j$$

luego $\underbrace{\max\{a_i, c_j\}}_{a} < \alpha \leq \underbrace{\min\{b_i, d_j\}}_{b}$

$$a < \alpha \leq b$$

como α es cualquier elemento de la intersección

$$(a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] = (a, b]$$

<u>Proposición 9</u> Si $B \in \mathcal{A}$ y $(a, b] \supset B$ entonces $(a, b] - B \in \mathcal{A}$

Dem: Sea $B = \bigcup_{j=1}^{q} (a_j, b_j]$

$(a, b] - B = \overset{\text{es finita}}{\bigcap} \{ (a,b] - (a_j, b_j] \quad j = 1, \dots, q \}$

$(a, b] - (a_j, b_j] \in \mathcal{F}$ (ver prop 10)

luego la $\bigcap$ finita $\in \mathcal{F}$ de donde

$(a, b] - B \in \mathcal{F}$

Propiedad 10 Si $(a, b] \supset (c, d] \Rightarrow (a, b] - (c, d] \in \mathcal{F}$

Dem: $(a, b] - (c, d] = \underbrace{(a, c]}_{\in \mathcal{F}} \cup \underbrace{(d, b]}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

Teorema 11: La clase $\mathcal{F}$ es un anillo

Dem: Es claro que $\mathcal{F}$ no es vacío

Por otra parte si

$A = \bigcup_{i=1}^{p} (a_i, b_i]$

$B = \bigcup_{i=p+1}^{q} (a_i, b_i]$

$\Rightarrow A \cup B = \bigcup_{i=1}^{q \to \text{finito}} (a_i, b_i] \in \mathcal{F}$

Probemos que $A - B \in \mathcal{I}$

Sea $(a,b]$ tal que $A \cup B \subset (a,b]$

$$A - B = A \cap B^c = \underbrace{\underset{\in \mathcal{I}}{A} \cap (\underbrace{(a,b] - B}_{\in \mathcal{I} \text{ prop } 9})}_{\in \mathcal{I} \text{ prop } 8}$$

luego $\mathcal{I}$ es un anillo

Nota: Si consideramos las uniones finitas de intervalos de la forma $[a,b)$, igualmente se comprueba que esta familia es un anillo.

Definición 12: Algebra de Conjuntos

Un álgebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X que cumple

a) $X \in \mathcal{A}$

b) Si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

c) Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Proposición 13: Si $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre $X \Rightarrow \mathcal{A}$ es un anillo

Dem: Sean $A, B \in \mathcal{A}$ debo probar que $A - B \in \mathcal{A}$

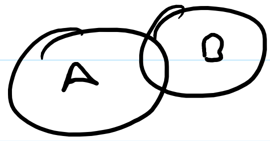
$$A - B = (A^c \cup B)^c$$

Como $\mathcal{A}$ es un algebra $A^c \in \mathcal{A}$

y $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ luego

$(A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$ o sea

$A - B \in \mathcal{A}$



$$A - B = A \cap B^c$$

$$A \cap B^c = (\underbrace{(A \cap B^c)^c}_{A^c \cup B})^c = (A^c \cup B)^c$$

de donde $\mathcal{A}$ es un anillo.