Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

*Análisis Real 2019*

**Ejercicios a entregar, 27 de noviembre de 2019**

(1) (a) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Ponemos

$$(a\mu)(B) = a\mu(B)$$

con $a \in R$ no negativo y $B \in \mathcal{A}$.Demuéstrese que $(a\mu)$

(b) Si $f : X \longrightarrow [0, 1]$ medible y $\lambda = a\mu$. Demuéstrese que

$$b \int_A f d\mu = \int_A f d\lambda$$

con $A \in \mathcal{A}$

(2) Sea $f_n$ una función real en R definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < \frac{1}{n+1} \\ x^{-3/2} & si \quad \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

(a) Demusestre que $f_n esintegrableLebesgue$

(b) Probar que no existe una función g real definida en R e integrable Lebesgue tal que $|f_n| \geq g$

(c) Sea f el límite puntual de $f_n$. Demuéstrese que aunque por b) no se cumplen las condiciones del teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\lim_n \int_R f_n dx = \int_R f dx$$

(3) Sea $f : [a, b] \longrightarrow R^*$ una función integrable Lebesgue.

(a) Sea $g : [a, b] \longrightarrow R$ una función no negativa decreciente. Entonces existe un punto $y \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg dx = g(a) \int_a^y f(t)dt$$

.

(b) Sea $g : [a, b] \longrightarrow R$ una función monótona. Entonces existe un punto $y \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg dx = g(b) \int_y^b f(t)dt + g(a) \int_a^y f(t)dt$$

.

(4) Sean $(R, \mathcal{A}, \lambda)$ y$(R, \mathcal{B}, \mu)$ dos espacios de medida sobre la recta real, de manera que $\mathcal{A}$ es la $\sigma$-álgebra de los conjuntos de Lebesgue de R, $\lambda$ es la medida de Lebesgue, $\mathcal{B}$ es la familia de todas la partes de R y $\mu$ la medida sobre R tal que si A es un subconjunto finito de R, $\mu(A)$ es el número de elementos de A y si A es infinito $\mu(A) = \infty$.

Sea $M = \{(x, x) : x \in R\}$.

Demuéstrese que

$$\int_R \mu(M_x) d\lambda \neq \int_R \lambda(M_y) d\mu$$

(5) Sean $(R, \mathcal{A}, \lambda)$ y$(R, \mathcal{B}, \mu)$ dos espacios de medida de manera que $\lambda$ y $\mu$ son $\sigma$-finitas. Sea $f(x) : X \longrightarrow R^*$ $\lambda$-integrable y sea $g(y) : Y \longrightarrow R^*$ $\mu$-integrable.

Demuéstrese que $f(x)g(y) : XxY \longrightarrow R^*$ es $\lambda x \mu$-integrable y

$$\int_{XxY} f(x)g(y) d(\lambda x \mu) = \int_X f(x) d\lambda \int_Y g(y) d\mu$$