Práctico 4.

1. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Sea f una función medible de $\mathcal{X}$ en $[0, +\infty]$. Demuestre que si
$$\int_{\mathcal{A}} f \, d\mu < \infty$$
el conjunto $A = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > 0\}$ es unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$ cuyas medidas son finitas.

2. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X en $[0, +\infty]$ que converge puntualmente a f. Supongamos que existe un numero positivo M tal que
$$\int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu \leq M \, \forall n \in \mathbb{N}$$
Demostrar que $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq M$.

3. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X en $[0, +\infty]$. Hallar un ejemplo en el cual el signo de $\leq$ del lema de Fatou se pueda sustituir por el signo $<$.

4. Probar la siguiente proposición del teórico:

   Proposición 124:

   a) Si $0 \leq f \leq g$ entonces $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.
   b) Si $A \subset B$ y $f \geq 0$ entonces $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.
   c) Si $f = 0$ para todo $x \in E$ entonces $\int_E f \, d\mu = 0$ aunque $\mu(E) = \infty$.
   d) Si $\mu(E) = 0$ entonces $\int_E f \, d\mu = 0$ aunque $f(x) = \infty$ para todo $x \in E$.
   e) Si $f \geq 0$ se tiene que $\int_E f \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_E f \, d\mu$.

5. Probar la siguiente proposición del teórico:

   Proposición 133: Sean $f, g \in L^1(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ y además se cumple
$$\int_{\mathcal{X}} \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu + \beta \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu$$

6. Demostrar que si f y g son integrables y para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene
$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$$
entonces $f = g$ ctp.

7. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $\mu(X) < \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas definidas en X y μ-integrables, que convergen uniformemente a f. Demostrar que
$$\lim_n \int_{\mathcal{X}} f_n\, d\mu = \int_{\mathcal{X}} f\, d\mu$$
.