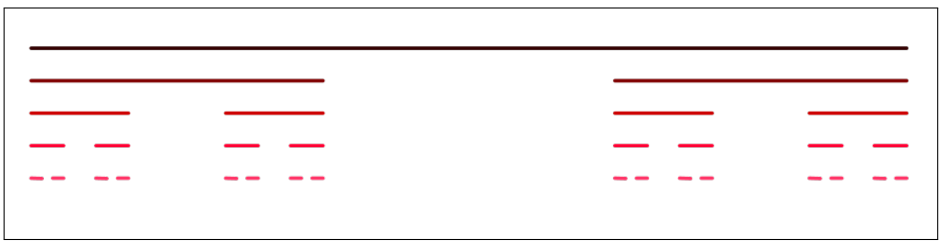
Práctico 3.

Definición 1. Considere los conjuntos $I_n = \bigcup_{i=1}^{3^{n-1}} (\frac{3i-2}{3^n}, \frac{3i-1}{3^n})$, por ejemplo I_1 seria el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Definimos recursivamente los siguientes conjuntos anidados $C_1 = [0,1] \backslash I_1$, $C_n = C_{n-1} \backslash I_n$. El conjunto de Cantor esta definido como la intersección de dichos conjuntos

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Figura 2. Los primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor.



Es importante aclarar que el conjunto de Cantor esta definido topologicamente, es decir todo conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor es considerado el conjunto de Cantor. Esto es particularmente importante para el primer ejercicio de este practico, ya que pedimos probar que el conjunto de Cantor tiene medida nula. Si bien esto es cierto para el conjunto definido en la definición 1 al que llamaremos conjunto ternario de Cantor, no es cierto para todos los conjuntos de cantor. Ver (Wikipedia: Cantor Gordo).

1. Probar que el conjunto ternario de Cantor tiene medida nula.

2. Probar que la cardinalidad del conjunto ternario de Cantor es 2^{ω}.

3. Probar la siguiente proposición del teórico:

   Proposición 89: Si $f : X \to \mathbb{R}^*$ es medible y $b \in \mathbb{R}$ entonces $b \cdot f$ es medible.

4. Probar la siguiente proposición del teórico:

   Proposición 90: $f : X \to \mathbb{R}$ medible y $p \in \mathbb{R}$ entonces $|f|^p$ es medible.

5. Probar la siguiente proposición del teórico:

   Proposición 91: $f : X \to \mathbb{R}^*$ medible y $f(x) \neq 0, \forall x \in X$ entonces $\frac{1}{f}$ es medible.

6. Sea $f : X \to \mathbb{R}^*$ medible, $A \subset X$ medible. Probar que si g coincide con f en A y vale 0 en A^c entonces g es medible.

7. Sea $A \subset X$ medible. Probar que $\mathcal{X}_A$ es medible.

8. Sea $f : X \to \mathbb{R}^*$ y $g : X \to \mathbb{R}^*$ medibles. Probar que $f \cdot g$ es medible.

9. Sean f y g funciones reales crecientes definidas en R^*. Demuestre que si B es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ entonces $\mu_{f+g}(B) = \mu_f(B) + \mu_g(B)$.