Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Análisis Real
13 de septiembre de 2019

Práctico 1; Solución del ejercicio 1, parte b.

1. Sea X un conjunto e $Y \subset X$. Pruebe que:
   a) Si R es un anillo sobre X entonces $R \cap Y$ es un anillo sobre Y y también sobre X.
   b) Si M es una clase no vacía de X y $R(M)$ es el anillo generado por sobre X entonces $R(M) \cap Y = R(M \cap Y)$.
   c) Si A es un álgebra sobre X entonces $A \cap Y$ es un álgebra sobre Y.
   d) Si S es un σ-anillo sobre X entonces $S \cap Y$ es un σ-anillo sobre Y y tambien sobre X.
   e) $S(M) \cap Y = S(M \cap Y)$ siendo $S(M)$ un σ-anillo generado por M.
   f) Si H es un σ-anillo hereditario sobre X entonces $H \cap Y$ es un σ-anillo hereditario sobre Y y tambien sobre X.
2. Sea P una clase no vacia de subconjuntos del conjunto X tal que si E y F estan en P entonces $E \cap F$ y $E \Delta F$ pertenece a P.

   Demuestre que P es un anillo.
3. Sea P una clase no vacia de subconjuntos del subconjunto X de manera que si E y F estan en P entonces $E \cup F$ y $E \Delta F$ pertenecen a P. Demuestre que P es un anillo.
4. Dar un ejemplo de un anillo que no sea σ-anillo y que no sea un álgebra.
5. Dar un ejemplo de un σ-anillo que no sea un álgebra.
6. Sea X un conjunto, M una clase no vacia de subconjuntos de X. Demuestre que cada elemento de $R(M)$ se puede recubrir por un número finito de elementos de M.
7. Sea X un conjunto, $Y \subset X$ y $X_Y : X \to \{0, 1\}$ la funcion caracteristica de Y o sea,

$$X_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

   Demostrar que si E, F, G son subconjuntos de X se tiene

   a) $X_{E \cap F} = X_F X_E$

b) $X_{E\cup F} = X_E + X_F - X_E X_F$

c) $X_{E\cup F\cup G} = X_E + X_F + X_G - X_E X_F - X_E X_G - X_G X_F + X_E X_G X_F$

8. Sea (A_n) una sucesion de subconjuntos de X. Se define el límite inferior de A_n $(n \to \infty)$ como el conjunto formado por todos aquellos elementos de X que pertenencen a todos los $A_n : n = 1, ..$ salvo un numero finito de ellos.

   a) Demostrar que $\liminf_n A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{p=n}^{\infty} A_p$

   b) Si S es un σ-anillo sobre X y $A_n \in S \, \forall n$ demostrar que $liminf_n A_n \in S$

9. Sea X un conjunto que posee más de dos elementos. Sea M la clase de todos los subconjuntos de X que no tienen más de dos elementos.

   a) ¿Es M una clase monótona?

   b) ¿Es M un anillo?

Solución del ejercicio 1, parte b.

Por la parte a $R(M) \cap Y$ es un anillo sobre Y, también sobre X que contiene a $M \cap Y$ entonces $R(M \cap Y) \subset R(M) \cap Y$.

Lo difícil es ver que $R(M \cap Y) \supset R(M) \cap Y$. Si $C \in R(M)$ entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera

1. $C \in M$

2. Existen $A, B \in R(M)$ tal que o $C = A \cup B$ o $C = A - B$.

probemos por inducción que $C \cap Y \in R(M \cap Y)$.

El caso 1 es nuestro caso base, $C \cap Y$ pertenece a $R(M \cap Y)$ porque pertenece a $M \cap Y$.

Probaremos que si C es del caso 2 entonces $C \cap Y \in R(M \cap Y)$ asumiendo que $A \cap Y, B \cap Y \in R(M \cap Y)$ como nuestra hipótesis de inducción. Si $C = A \cup B$ entonces

$$C \cap Y = (A \cup B) \cap Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$$

luego por ser $R(M \cap Y)$ un anillo y $A \cap Y, B \cap Y \in R(M \cap Y)$ tenemos que $(A \cap Y) \cup (B \cap Y) \in R(M \cap Y)$. Si $C = A - B$ entonces

$$C \cap Y = (A - B) \cap Y = (A \cap Y) - (B \cap Y)$$

luego por ser $R(M \cap Y)$ un anillo y $A \cap Y, B \cap Y \in R(M \cap Y)$ tenemos que $(A \cap Y) - (B \cap Y) \in R(M \cap Y)$.

¿Por que esta inducción cubre todos los elementos de $R(M)$? $R(M)$ es el anillo mas chico que contiene a M y los elementos descriptos en 1 y 2 forman un anillo que cotiene a M.