Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Análisis Real 2019

Práctico 2

1. Probar la siguiente proposición del teórico:
Proposición 37: Si la clase $\mathcal{U}(F)$ es no vacía entonces $\mathcal{U}(F)$ es una clase monótona.

2. Probar las siguientes proposiciones del teórico:
Proposición 56: Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sea

$$\overline{\mathcal{S}} = \{A \cup M : A \in \mathcal{S}, M \subset B \in \mathcal{S}, \mu(B) = 0\}$$

entonces $\overline{\mathcal{S}}$ es un σ-anillo sobre $\mathcal{X}$ y que contiene a $\mathcal{S}$.
Proposición 57: Si para $P \in \overline{\mathcal{S}}$ definimos $\overline{\mu}(P) = \mu(A)$ con A tal que $P = M \cup A, A \in \mathcal{S}, M \subset B \in \mathcal{S}$ con $\mu(B) = 0$. Entonces $\overline{\mu}$ es una aplicación de $\overline{\mathcal{S}}$ en $\mathbb{R}_+$ y $\overline{\mu}$ es una medida completa.

3. Probar el siguiente lema del teórico:
Lema 63:
   (a) Si $E, F \in \mathcal{H}$ y son μ^*-medibles, entonces $E \cup F$ es μ^*-medible.
   (b) Si $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{H}$ y son μ^*-medibles entonces $\cup_{i=1}^n E_i$ es μ^*-medible.
   (c) Si $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{H}$ son disjuntos dos a dos y μ^*-medibles entonces para cada $A \in \mathcal{H}$ se tiene que
   $$\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$
   con $S_n = \cup_{i=1}^n E_i$.
   (d) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ disjuntos dos a dos y μ^*-medibles. Si $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ entonces para todo $A \in \mathcal{H}$ se tiene
   $$\mu^*(A \cap S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A \cap E_n)$$
   (e) Sean $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ disjuntos dos a dos, μ^*-medibles entonces $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es μ^*-medible.
   (f) Sean $E, F \in \mathcal{H}$ μ^*-medibles entonces $E - F$ es μ^*-medible.

4. Sea $\mathcal{M}$ el anillo hereditario formado por las partes de un conjunto $\mathcal{X}$. Sea μ^* la medida exterior definida sobre $\mathcal{M}$. Demuestre que la clase $\mathcal{M}$ de todos los elementos de $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra.

5. Sea $\mathcal{S}$ el σ-anillo de todas las partes de $\mathcal{X}$. Sea $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por

   (a) $\mu(A) = n$ si A tiene n elementos.

   (b) $\mu(A) = +\infty$ si A es infinito.

   Demostrar que μ es una medida.

6. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente. De un ejemplo donde $\mu(A_1) = +\infty$ y $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_n \mu(A_n)$.

7. Sea $\mathcal{S}$ una familia de $\mathscr{P}(X)$ tal que $A \in \mathscr{S}$ si A es finito o su complemento es finito. Demostrar que $\mathscr{S}$ es un álgebra sobre X. ¿Cuando $\mathscr{S}$ es una σ-álgebra?

8. Proponga un ejemplo de una medida aditiva sobre un anillo que no sea una medida.