Ejercicios a entregar, 2 de agosto de 2019

(1) Consideramos en el espacio euclideo n dimensional (n¿1) los intervalos acotados de la forma

$$I^{(n)} = (a_1, b_1]x(a_2, b_2]x....x(a_n, b_n]$$

Sea $\mathcal{J}^n$ la familia de todas las uniones finitas de intervalos de la forma $I^{(n)}$. Preube que:

(a) si $A, B \in \mathcal{J}^n$ entonces $A \cap B \in \mathcal{J}^n$

(b) si $A = (a_1, b_1]x(a_2, b_2]x....x(a_n, b_n]$ y $B = (c_1, d_1]x(c_2, d_2]x....x(c_n, d_n]$ y $B \subset A$ entonces $A - B \in \mathcal{J}^n$.

(c) si $A = (a_1, b_1]x(a_2, b_2]x....x(a_n, b_n]$ y $B \in \mathcal{J}^n$ y $B \subset A$ entonces $A - B \in \mathcal{J}^n$.

(d) $\mathcal{J}^n$ es un anillo sobre R^n

(2) Sea X un conjunto y (A_n) una sucesión de subconjuntos de de X. Se define el límite superior de A_n $(n \longrightarrow \infty)$ como el conjunto de los elementos de X que pertnecen a infinidad de A_n $n = 1, 2, ...$

(a) Demuestre que $lim_n sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p$

(b) Pruebe que si $\mathcal{S}$ es un σ-anillio sobre X y $A_n \in \mathcal{S}$ para todo n entonces $lim_n sup A_n \in \mathcal{S}$

(3) Se dice que una sucesión $(A_n) \subset X$ tiene límite si

$$lim_n sup A_n = lim_n inf A_n$$

y lo notaremos $lim_n A_n$. Demuestre que:

(a) Si (A_n) es monotona creciente tiene límite.

(b) Si (A_n) es monotona decreciente tiene límite.

(4) Pruebe que si $\mathcal{A}$ es un álgebre sobre X entonces $\mathcal{M}(A)$ coincide con la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.