

Práctico 1

1. Sea X un conjunto e $Y \subset X$. Pruebe que:
 - (a) Si R es un anillo sobre X entonces $R \cap Y$ es un anillo sobre Y y también sobre X .
 - (b) Si M es una clase no vacía de X y $R(M)$ es el anillo generado por sobre X entonces $R(M) \cap Y = R(M \cap Y)$
 - (c) Si A es un álgebra sobre X entonces $A \cap Y$ es un álgebra sobre Y .
 - (d) Si S es un σ -anillo sobre X entonces $S \cap Y$ es un σ -anillo sobre Y y también sobre X .
 - (e) $S(M) \cap Y = S(M \cap Y)$ siendo $S(M)$ un σ -anillo generado por M .
 - (f) Si H es un σ -anillo hereditario sobre X entonces $H \cap Y$ es un σ -anillo hereditario sobre Y y también sobre X .
2. Sea P una clase no vacía de subconjuntos del conjunto X tal que si E y F están en P entonces $E \cap F$ y $E \Delta F$ pertenece a P .
Demuestre que P es un anillo.
3. Sea P una clase no vacía de subconjuntos del subconjunto X de manera que si E y F están en P entonces $E \cup F$ y $E \Delta F$ pertenecen a P . Demuestre que P es un anillo.
4. Dar un ejemplo de un anillo que no sea σ -anillo y que no sea un álgebra.
5. Dar un ejemplo de un σ -anillo que no sea un álgebra.
6. Sea X un conjunto, M una clase no vacía de subconjuntos de X . Demuestre que cada elemento de $R(M)$ se puede recubrir por un número finito de elementos de M .
7. Sea X un conjunto, $Y \subset X$ y $X_Y : X \rightarrow \{0, 1\}$ la función característica de Y o sea,

$$X_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Demstrar que si E, F, G son subconjuntos de X se tiene

(a) $X_{E \cap F} = X_F X_E$

(b) $X_{E \cup F} = X_E + X_F - X_E X_F$

(c) $X_{E \cup F \cup G} = X_E + X_F + X_G - X_E X_F - X_E X_G - X_G X_F + X_E X_G X_F$

8. Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de X . Se define el límite inferior de A_n ($n \rightarrow \infty$) como el conjunto formado por todos aquellos elementos de X que pertenecen a todos los $A_n : n = 1, \dots$ salvo un número finito de ellos.

(a) Demostrar que $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p$

(b) Si S es un σ -anillo sobre X y $A_n \in S \forall n$ demostrar que $\liminf_n A_n \in S$

9. Sea X un conjunto que posee más de dos elementos. Sea M la clase de todos los subconjuntos de X que no tienen más de dos elementos.

(a) ¿Es M una clase monótona?

(b) ¿Es M un anillo?