```
Curso de Introducción al análisis complejo
Primer Semestre 2016
Cure--Universidad de la República
Mayo de 2016
```

PRÁCTICO II

1. Estudiar en qué puntos las siguientes funciones son derivables como funciones complejas (analíticas) y calcular sus derivadas:

   $f(x+iy) := x^2 + iy^2$, $h(x+iy) := x^2 + 2x \text{ - } iy$, $g(x+iy) := 2xy + i(x + \frac{2}{3}y^3)$.

2. Calcular los valores que deben tomar $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que f (resp.: g) sea analítica en $\mathbb{C}$:

   $f(x+iy) := x + ay + i(bx + cy)$ y $g(x+iy) := \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \operatorname{sen} x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

3. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : D \to \mathbb{C}$ analítica en D:
   (a) demostrar que si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante en D;
   (b) demostrar que si existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^{n+1}(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es un polinomio de grado $\leq n$.

4. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : D \to \mathbb{C}$ analítica en D y $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Probar que f es constante en D si se cumple una de las condiciones siguientes:
   (a) $v(x,y) = u(x,y)^2$ para todo $z = x + iy \in D$;
   (b) $u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$;
   (c) existen $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $au(x,y)^2 + bv(x,y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Probar que f es analítica en $\mathbb{C}$ si y sólo si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \lambda z + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

6. Sea D un abierto convexo y $f : D \subset \mathbb{C}$. Demostrar que si f es analítica en D y $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ para todo $x + iy \in D$, entonces f es constante en D.

7. Demostrar que una función analítica en un abierto conexo D del plano complejo y cuyos valores son reales, se reduce a una constante.