Guia 4

(La finalidad de la guia es presentar una síntesis, un punteo acerca del desarrollo de la clase, en modo alguno sustituye la clase o bibliografia de estudio)

Número Real - Completitud

Definición 1. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}, \quad L, l \in \mathbb{R}$. *Decimos que:*

(1) L *es extremo superior (supremo) de* $A \Leftrightarrow L = min\{k \in \mathbb{R}/k \geq a \quad \forall a \in A\}$

Notación: $L = supA = \overline{ext}A$

(2) l *es extremo inferior (ínfimo) de* $A \Leftrightarrow l = max\{h \in \mathbb{R}/h \leq a \quad \forall a \in A\}$

Notación: $l = infA = \underline{ext}A$

Axioma 10. ***(Axioma de Completitud)*** *Todo conjunto de reales no vacío u acotado superiormente tiene extremo superior.*

Introducido el axioma 10 podemos volveremos al problema inicial para probar que existe un número real (que ya vimos no es racional) cuyo cuadrado es 2.

A los reales no racionales los denominaremos irracionales.

0.1. Algunas consecuencias de la completitud

Teorema 1. *Todo conjunto de reales no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.*

Teorema 2. *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*

Teorema 3. *Para cada número real* x *existe un entero positivo* n *tal que* $n > x$.

Teorema 4. ***Propiedad Arquimediana*** *Si* $x > 0$ *e* $y \in \mathbb{R}$ *es un número real arbitrario, entonces existe un número natural* n *tal que* $nx > y$.

Teorema 5. *Sea* $h > 0$ *y* S *un subconjunto de números reales. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si S *tiene extremo superior, entonces existe* $s \in S$ *tal que* $s > sup(s) - h$

(2) Si S *tiene extremo inferior, entonces existe* $t \in S$ *tal que* $t < inf(s) + h$

Teorema 6. *Todo número real* a *no negativo tiene raíz cuadrada.*

Bibliografia utilizada en la elaboración de la guia:

Apostol, Tom M. «Calculos» Volumen 1. Reverté