

Los Números Reales

Matemática I

Celia Dos Santos

CURE - Rocha

11 de marzo de 2026

1 Conceptos Básicos de Conjuntos

2 1.1. Introducción

3 1.2. Axiomas de cuerpo

4 1.2. Axiomas de Orden

5 1.3. Axioma de Completitud

Definición y Pertenencia

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos.

Los objetos que constituyen la colección se llaman **elementos**.

Los conjuntos los designamos con letras mayúsculas $A, B, C, \dots$ y los elementos con minúsculas $a, b, c, \dots$

- **Pertenencia ($\in$):** Utilizamos la notación

$$x \in A$$

para indicar que “ x es un elemento de A ” o que “ x pertenece a A ”.

Si x no pertenece a A escribimos

$$x \notin A$$

- Formas de definir conjuntos (**extensión/compreensión**)
 - **Por extensión:** se enumeran todos los elementos del conjunto. Por ejemplo $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 - **Por comprensión:** se describe una propiedad que cumplen los elementos. Por ejemplo $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 4\}$

Definición

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales si constan exactamente de los mismos elementos en cuyo caso escribiremos

$$A = B$$

Es decir,

$$A = B \iff (\forall x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x \in B \implies x \in A)$$

Definición

Se dice que un conjunto A es un subconjunto del conjunto B , y escribiremos

$$A \subseteq B$$

cuando todo elemento de A pertenece también a B . Decimos también que A está incluido (o contenido) en B .

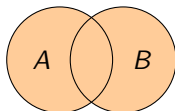
Es decir,

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

Operaciones entre Conjuntos: Unión, Intersección y Diferencia

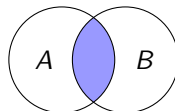
Unión

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



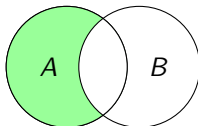
Intersección

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

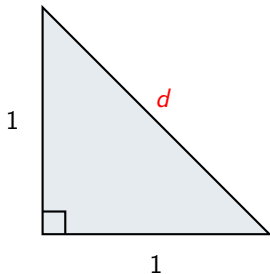


Diferencia

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



Motivación: La insuficiencia de los Racionales ($\mathbb{Q}$)



Teorema de Pitágoras

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

Teorema: $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración.

Supongamos que $d = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$.

- ❶ $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$.
- ❷ Por tanto, a^2 es par, lo que implica que a es par ($a = 2k$).
- ❸ Sustituyendo: $2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$.
- ❹ Entonces b^2 es par, lo que implica que b es par.
- ❺ **Contradicción:** Si a y b son pares, no son primos entre sí.

Luego, $d \notin \mathbb{Q}$.



Conjunto de los Números Reales: $\mathbb{R}$

No daremos una definición concreta de número real. Lo que haremos será enumerar una serie de propiedades que admitimos como axiomas. Todas las propiedades que utilizaremos de los números reales o están entre los axiomas o se pueden deducir de ellos.

Admitimos pues la existencia de una cuádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ en la cual:

- $\mathbb{R}$ es un conjunto.
- $+$ y $\cdot$ dos funciones $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $<$ es una relación en $\mathbb{R}$

que satisface todas las propiedades que a continuación enunciaremos como axiomas.

Axiomas de Cuerpo

A1 [Asociatividad] *La suma y el producto son operaciones asociativas:*

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

A2 [Conmutatividad] *La suma y el producto son operaciones conmutativas:*

$$x + y = y + x, \quad xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A3 [Distributividad] *El producto tiene la propiedad distributiva con respecto a la suma:*

$$x(y + z) = (xy) + (xz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

A4 Elementos Neutros *Existen dos números reales distintos, 0 y 1, tales que para cada número real x se tiene:*

$$0 + x = x + 0 = x \quad y \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

A5 Elementos Simétricos *Cada número real tiene un elemento simétrico respecto de la suma y cada número real no nulo tiene un simétrico respecto del producto.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x = 1$$

Consecuencias de los Axiomas de Cuerpo

- ❶ Por Axioma 4 $\mathbb{R} \neq \emptyset$, tiene al menos dos elementos 0 y 1
- ❷ Unicidad de los neutros
- ❸ Cancelativa

Para poder definir la relación de orden partiremos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado por $\mathbb{R}^+$ que llamaremos **reales positivos** que tiene las propiedades siguientes:

A6 [Tricotomía] *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una, y sólo una, de las tres afirmaciones siguientes:*

- $x = 0$ o
- $x \in \mathbb{R}^+$ o
- $-x \in \mathbb{R}^+$

A7 [Estabilidad] *La suma y el producto de números reales positivos son también números positivos:*

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x + y, xy \in \mathbb{R}^+$$

Definiciones: menor que, mayor que

Veamos como comparar dos números. Para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\textcircled{1} \quad x < y \iff y - x \in \mathbf{R}^+$$

$$\textcircled{2} \quad x > y \iff y < x$$

$$\textcircled{3} \quad x \leq y \iff x < y \quad \text{o} \quad x = y$$

$$\textcircled{4} \quad x \geq y \iff y \leq x$$

Propiedades de las desigualdades

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades:

① $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se verifica una y sólo una de las siguientes:

$$x < y, \quad y < x \quad \text{o} \quad x = y$$

② $x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y \quad \text{y} \quad y < z \implies x < z$

③ $x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies x + z < y + z$

④ $x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y \quad \text{y} \quad z > 0 \implies xz < yz$

⑤ $x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \implies x^2 > 0$

⑥ $x, y, z, w \in \mathbb{R}, \quad x < y, \quad z < w \implies x + z < y + w$

⑦ $x, y, z, w \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < y, \quad 0 < z < w \implies xz < yw$

Definiciones

Sea $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío

- ❶ $k \in \mathbb{R}$ es **cota inferior de** S si y sólo si $k \leq x \quad \forall x \in S$
- ❷ $k \in \mathbb{R}$ es **cota superior de** S si y sólo si $k \geq x \quad \forall x \in S$
- ❸ Decimos que S está acotado superiormente si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que k es cota superior de S
- ❹ Decimos que S está acotado inferiormente si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que k es cota inferior de S .
- ❺ Decimos que S está acotado si está acotado superior e inferiormente.
- ❻ Si S está acotado inferiormente, $k \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo de** S si es la mayor cota inferior.
- ❼ Si S está acotado superiormente, $k \in \mathbb{R}$ es el **supremo de** S si es la menor cota superior.

Axioma de Completitud

Si $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío y está acotado superiormente, entonces A tiene un supremo en $\mathbb{R}$

Nota: Este axioma distingue a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$