Guia 3

(La finalidad de la guia es presentar una síntesis, un punteo acerca del desarrollo de la clase, en modo alguno sustituye la clase o bibliografia de estudio)

Número Real

Valor Absoluto

Definición 1. *Dado un número real a, denominamos valor absoluto de a y anotamos $|a|$:*

$$|a| = a \quad si\ a \geq 0 \qquad y \qquad |a| = -a \quad si\ a < 0$$

Teorema 1. ***(Propiedades del valor absoluto)***

1) $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3) $|a^2| = |a|^2 = a^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

4) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \quad o \quad a = -b$

5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

6) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$

7) $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

8) *Sea* $r \in \mathbb{R}^+$ *entonces*

   (i) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

   (ii) $|a| \geq r \Leftrightarrow a \geq r \quad o \quad a \leq -r$

9) *(Desigualdad Triangular)* $|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

10) $|a - b| \geq |a| - |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Número Natural

Para introducir los números naturales se empieza con el 1 cuya existencia queda asegurada con el axioma 4 y como $1 > 0 \Rightarrow 1 + 1 > 1 + 0 \Rightarrow 1 + 1 > 1 > 0$. Por lo tanto el número $1 + 1$ es necesariamente distinto del 0 y del 1 y lo denominamos 2

Al ser $2 > 1 \Rightarrow 2+1 > 1+1 \Rightarrow 2+1 > 2 > 1 > 0$. Entonces el real $2+1$ es un número distinto del0, del 1 y del 2. Lo denominamos 3. Y así sucesivamente. Formalizamos esta idea.

Definición 2. ***(Conjunto Inductivo)*** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es un conjunto inductivo si y solo si cumple:*

(1) $0 \in A$

(2) Si $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$

Llamaremos $\mathcal{F}$ a la famila de todos los conjuntos inductivos.

Definición 3. *LLamamos conjunto de los* ***números naturales*** *y anotamos $\mathbb{N}$, a la intersección de todos los conjuntos inductivos.*

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

Teorema 2. $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$

Teorema 3. ***(De inducción completa)*** *Este teorema constituye la base para un tipo de razonamiento que se denomina demostración por inducción.*

Hipótesis) $\begin{cases} 1)\ H \subseteq \mathbb{N} \\ 2)\ 0 \in H \\ 3)\ Si\ \ x \in H \Rightarrow x+1 \in H \end{cases}$ *Tesis)* $H = \mathbb{N}$

Teorema 4. $\nexists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < n < 1$

Teorema 5. *Si* $a \in \mathbb{N}$ *entonces* $\nexists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < n < a+1$

Teorema 6. *Sean* $a, b \in \mathbb{N}$ *Si* $a < b \Rightarrow a+1 \leq b$

Definición 4. *Sea $A \subseteq\in \mathbb{R}$, $\quad A \neq \emptyset$ decimos que:*

1) A está ***acotado superiormente*** *si y sólo si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $k \geq a \quad \forall a \in A$. k se denomina* ***cota superior*** *de A*

2) A está ***acotado inferiormente*** *si y sólo si $\exists h \in \mathbb{R}$ tal que $h \leq a \quad \forall a \in A$. h se dice* ***cota inferior*** *de A*

3) A está acotado si y sólo si A está acotado superior e inferiormente.

Definición 5. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $M \in \mathbb{B}$ y $m \in \mathbb{R}$. Decimos que:*

1) M es máximo de $A \Leftrightarrow$ $\begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A \\ M \in A \end{cases}$

2) m es mínimo de A $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \\ m \in A \end{cases}$

Teorema 7. ***(Principio de buena ordenación)*** *Todo conjunto de naturales no vacío tiene mínimo.*

Teorema 8. *Todo conjunto de naturales no vacío y acotado superiormente tiene máximo.*

Teorema 9. ***(Principio de inducción completa)*** *Sea P una proposición referida a los naturales tal que* $\begin{cases} (1) P(n_0) \text{ es verdadera siendo } n_0 \in \mathbb{N} \\ (2) Si\ P(x) \text{ es verdadera } \Rightarrow P(x+1) \text{ es verdadera } \forall x \in \mathbb{N},\ x \geq n_0 \end{cases}$ *entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$*

Número Entero

Definición 6. *Llamamos conjunto de los* ***números enteros*** *y anotamos $\mathbb{Z}$ al conjunto formado por los naturales y sus opuestos.*

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \ \text{tal que} \ x \in \mathbb{N} \ \text{ó} \ -x \in \mathbb{N}\}$$

Observación 1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

Número Racional

Definición 7. *Llamamos conjunto de los números racionales y anotamos $\mathbb{Q}$ al conjunto*

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \tfrac{p}{q} \ \text{con} \ p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0\right\}$$

Bibliografia utilizada en la elaboración de la guia:

Apostol, Tom M. «Calculos» Volumen 1. Reverté