Guia 2

(La finalidad de la guia es orientar acerca del desarrollo de la clase, es decir se presenta una síntesis de lo desarrollado en clase, en modo alguno sustituye la clase o bibliografia de estudio)

Número Real

¿Cuáles son las insuficiencias de los racionales que hacen necesrio presentar una nueva estructura algebraica? Presentamos una, no la única. Consideramos la ecuación $x^2 = 2$ y trataremos de probar que no existe un racional x tal que elevado al cuadrado sea 2. La idea de la prueba será suponer que x es racional y llegar a una contradicción.

Par cubrir esta, así como otras, carencias de los racionales itroduciremos a los números reales. Para ello existen fundamentalmente dos caminos.[1] El constructivo, crear a los naturales, a partir de ellos a los enteros, luego los racionales y a partir de estos últimos generar a los números reales. El otro camino, que usaremos nosotros, consiste en crear directamente a los reales, siendo los naturales, los enteros y los racionales subestructuras de los reales.

Consideraremos los números reales como concepto primitivo que satisfacen un cierto número de propiedades que tomamos como axiomas Los axiomas se agrupan en tres grups: Axiomas de cuerpo, aximas de orden y axioma de completitud(o continuidad, o del extremo superior).

Axiomas de Cuerpo

En un conjunto que llamaremos de los números reales, y anotaremos $mathbbR$, en el cual están definidas dos operaciones [2] que denominamos adición y multiplicación, y anotamos $+$ y $\cdot$ respectivamente, que cumplen:

Axioma 1. ***Conmutativa***

$$a + b = b + c \quad \forall a, b, \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Axioma 2. ***Asociativa***

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

[1] Cualquiera de los dos caminos implica la utilización del método aximático

[2] Una operación en un conjunto no vacío A, es una función $A \times A \to A$, por tanto debe cumplirse que «el resultado de la operación» debe pertenecer al conjunto y debe ser único.

Axioma 3. ***Distributiva***

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Axioma 4. ***Existencia de elemantos neutros***

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \quad a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \quad 1 \neq 0, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Axioma 5. ***Existencia del opuesto***

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R}, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Axioma 6. ***Existencia del inverso***

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \exists \tfrac{1}{a} \in \mathbb{R}, \quad a \cdot \tfrac{1}{a} = \tfrac{1}{a} \cdot a = 1$$

Observación 1. *Por el Axioma 4 podemos afirmar que* $\mathbb{R}$ *es un conjunto no vacío, que tiene al menos dos elementos: el* 0 *y el* 1 *neutros de la suma y el producto.*

Algunas consecuencias de los axiomas de cuerpo

Teorema 1. ***Unicidad de los neutros***

1) 0 *es el único neutro de la adición.*

2) 1 *es el único neutro de la multiplicación.*

Teorema 2. ***Cancelativas***

1) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

2) $a \cdot b = a \cdot c$ *y* $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

Teorema 3. ***Absorción***

$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Teorema 4. ***Ausencia de divisores de 0***

$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ *o* $b = 0$

Axiomas de Orden

Este grupo de axiomas introduce una relación de orden en los números reales.

Existe un subconjunto de los reales a los cuales denominaremos reales positivos y anotaremos R^+, que cumple:

Axioma 7. *Si* $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \quad y \quad a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

Axioma 8. *Para todo real* $a \neq 0$, *se cumple que* $a \in \mathbb{R}^+ \quad o \quad -a \in \mathbb{R}^+$, *pero no ambos.*

Axioma 9. $0 \neq \mathbb{R}^+$

Algunas consecuancias de los axiomas de orden

Teorema 5. $\mathbb{R}^+ \neq \emptyset$ *(Probar que* $1 \in \mathbb{R}^+$*)*

Definición 1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *decimos que:*

1) $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$
2) $a > b \Leftrightarrow b < a$
3) $a \leq b \Leftrightarrow a < b \quad o \quad a = b$
4) $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

Teorema 6. $a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$

Definición 2. *Llamamos conjunto de los reales negativos y anotamos* $\mathbb{R}^-$ *al conjunto formado por los opuestos de los reales positivos.*

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / -x \in \mathbb{R}^+\}$$

Teorema 7. ***(Tricotomía)*** *Para* a *y* b *reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones* $a < b$, $b < a$, $a = b$

Teorema 8. ***Transitiva*** *Si* $a < b$ *y* $b < c$ *entonces* $a < c$

Teorema 9. *Si* $a < b$ *entonces* $a + c < b + c$

Teorema 10. *Si* $a < b$ *y* $c \neq 0$*entonces* $ac < bc$

Teorema 11. $a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Teorema 12. $1 > 0$

Teorema 13. *Si* $a < b$ *y* $c < 0$ *entonces* $ac > bc$

Teorema 14. *Si* $a < b$ *entonces* $-a > -b$

Teorema 15. *Si* $ab > 0$ *entonces* a *y* b *son o ambos positivos o ambos negativos.*

Teorema 16. *Si* $a < c$ *y* $b < d$ *entonces* $a + b < c + d$

Teorema 17. ***(Densidad)*** *Dados dos números reales cualesquiera a y b con $a < b$ se cumple que:* $\exists c \in \mathbb{R}$ *tal que* $a < c < b$

Bibliografia utilizada en la elaboración de la guia:

Apostol, Tom M. «Calculos» Volumen 1. Reverté