Cálculo

Serge Lang

Versión en español de

Manuel López Mateos
Universidad Nacional Autónoma de México

Con la colaboración de

Iván Castro Chadid
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Addison-Wesley Iberoamericana

Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la obra titulada *A First Course in Calculus, Fifth Edition*, de Serge Lang, publicada originalmente en inglés por Springer-Verlag New York Inc., ©1986 por Springer-Verlag New York Inc. Las ediciones anteriores en inglés fueron publicadas en 1978, 1973, 1968 y 1964 por Addison-Wesley Publishing Company Inc.

Esta edición en español es la única autorizada.

Obra compuesta y formada mediante el sistema TEX por el Taller Lima, México.

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

ISBN 0-201-62906-2 **Addison-Wesley Iberoamericana**
ISBN 968-6394-13-3 **Sistemas Técnicos de Edición**

ABCDEFGHIJ-M-99876543210

Se terminó de imprimir el 10 de enero de 1990 en los talleres de Programas Educativos, S.A. de C.V. Calzada Chabacano 65-A, 06850 México, D.F. La tirada fue de 3000 ejemplares.

Prefacio

El objetivo de un primer curso de cálculo es enseñar a los estudiantes los conceptos fundamentales de derivada e integral, y las técnicas básicas y aplicaciones relacionadas con ellas. Los alumnos muy inteligentes, con aptitudes obvias para las matemáticas, requerirán en seguida un curso sobre funciones de una variable real, más o menos como lo entiende un matemático profesional. Este libro no se dedica a ellos de manera especial (aunque espero que con él tendrán una buena introducción a temprana edad).

No he escrito este curso en el estilo que hubiera usado para una monografía avanzada, o para temas sofisticados. Uno escribe una monografía avanzada para sí mismo, porque quiere dar forma permanente a la visión particular de alguna parte bella de las matemáticas que de otra manera no sería accesible, algo parecido a cuando un compositor escribe su sinfonía en notación musical.

Este libro está escrito para los estudiantes a fin de darles acceso inmediato y agradable al tema. Espero haber logrado un equilibrio adecuado entre el tiempo excesivo dedicado a los detalles particulares y la insuficiencia de ejercicios técnicos necesarios para adquirir la familiaridad deseada con el tema. En todo caso, para un primer curso no son adecuados ciertos hábitos rutinarios de los matemáticos sofisticados.

Rigor. Esto no significa que deba abandonarse el llamado rigor. El desarrollo lógico de las matemáticas en este curso, a partir de los axiomas más básicos, se da a través de las etapas siguientes:

Teoría de conjuntos	Números (i.e. números reales)
Enteros (números completos)	Límites
Números racionales (fracciones)	Derivadas y subsecuentes.

Nadie en su sano juicio sugiere que se deba comenzar un curso con teoría de conjuntos. El mejor lugar para entrar al tema es entre límites y derivadas. En otras palabras, cualquier estudiante está preparado para aceptar como intuitivamente obvios los conceptos de números y límites y sus propiedades básicas. La experiencia muestra que los estudiantes *no* tienen la base psicológica adecuada para aceptar un estudio teórico de los límites y se resisten de manera formidable.

De hecho, sucede que se puede tener lo mejor de ambas ideas. Los razonamientos que muestran de qué manera se pueden reducir las propiedades de los límites a las de los números forman un conjunto completo en sí mismo. En términos lógicos su lugar es *antes* del tema de nuestro curso, pero lo incluimos como apéndice. Si algún estudiante lo considera necesario, basta que lo lea como si fuese el capítulo 0. En ese caso, todo lo que sigue es tan riguroso como cualquier matemático pudiera desear (al menos en lo que respecta a los objetos que tienen una definición analítica). No es necesario cambiar ni una palabra en ninguna demostración. Espero que esto termine de una vez con las posibles controversias acerca del llamado rigor.

La mayoría de los estudiantes no lo consideran necesario. Mi opinión es que la épsilon-delta debería quedar completamente fuera de un curso ordinario de cálculo.

Lenguaje y lógica. No se suele reconocer que algunas de las principales dificultades al enseñar matemáticas son análogas a las de la enseñanza de una lengua extranjera. (Las escuelas secundarias son las responsables de esto. Un entrenamiento adecuado en las escuelas secundarias eliminaría por completo esta dificultad.) Por ello, he hecho un gran esfuerzo por guiar verbalmente al estudiante, por decirlo así, en el uso de un lenguaje matemático apropiado. Me parece fundamental que se exija a los estudiantes que escriban sus trabajos de matemáticas en frases completas y coherentes. Una gran parte de sus dificultades con las matemáticas surge del uso caótico de los símbolos matemáticos y de fórmulas aisladas de frases con sentido y de cuantificadores apropiados. Se debe exigir que los trabajos sean limpios y legibles, y que no se vean como si acabara de brincar del tintero una mosca borracha. Al insistir en niveles razonables de expresión se producirá una impresionante mejoría en el rendimiento matemático. Deberá enseñarse el uso sistemático de palabras como "sea," "existe," "para todo," "si. . . entonces," "por lo tanto," como en las frases:

Sea $f(x)$ la función tal que ....
Existe un número tal que ....
Para todos los números x con $0 < x < 1$, tenemos ....
Si f es una función diferenciable y K una constante tal que $f'(x) = Kf(x)$, entonces $f(x) = Ce^{Kx}$ para alguna constante C.

Conexión. Me parece que no tiene sentido considerar la "teoría" como rival de las aplicaciones o de los "cálculos." Este libro trata ambos aspectos como complementarios entre sí. Un teorema nos proporciona casi siempre una herramienta para efectuar cálculos más eficientes (p.ej. la fórmula de Taylor para calcular valores de funciones). Está claro que en distintas clases se podrán resaltar diferentes aspectos, y quizá se omitan algunas demostraciones, pero según mi experiencia, si no se actúa con excesiva pedantería, los alumnos están dispuestos

e incluso deseosos de entender las razones que justifican un resultado, i.e. su demostración.

Es perjudicial para los estudiantes aprender cálculo (o para el caso, cualquier otra rama de las matemáticas) con miras a simplemente "conectar" fórmulas prefabricadas. La enseñanza adecuada consiste en hacer que el alumno tenga la aptitud de manejar un gran número de técnicas en forma rutinaria (en particular, saber cómo conectarlas), pero también consiste en adiestrar a los alumnos para que conozcan algunos principios generales que les permitan ocuparse de situaciones nuevas para las cuales no se conocen fórmulas que conectar.

Es imposible en un semestre, o en un año, tener tiempo para tratar con todas las aplicaciones deseables (economía, estadística, biología, química, física, etc.); por otro lado, al cubrir el balance adecuado entre las aplicaciones elegidas y los principios generales seleccionados se brindará a los estudiantes la capacidad de manejar por sí mismos otras aplicaciones o situaciones.

Problemas y ejercicios resueltos. Para conveniencia tanto de alumnos como de maestros, en la presente edición se ha añadido gran cantidad de problemas resueltos, y muchos de ellos se han colocado en la sección de respuestas, para su referencia. Lo hice así por dos razones cuando menos. Primera, en el texto podrían oscurecer las ideas principales del curso. Segundo, es buena idea hacer que los estudiantes piensen acerca de un problema antes de verlo resuelto. Serán entonces más receptivos, y retendrán mejor los métodos por haber enfrentado ellos mismos las dificultades (cualesquiera que sean, dependiendo de cada estudiante). Tanto la inclusión de ejemplos resueltos como su ubicación en la sección de ejercicios fueron peticiones de los estudiantes. Desafortunadamente, con esto entran en conflicto los requerimientos para una buena enseñanza, examinación y presión académica. Los estudiantes muestran una tendencia *de facto* a objetar que les pidan pensar (aunque fallen), pues tienen miedo a ser castigados con malas calificaciones en las tareas que realizan en casa. Los profesores pueden imponer grandes exigencias a los estudiantes, o bien, pueden adoptar el camino del menor esfuerzo y no pedirles sino que pongan nuevos números en un tipo de ejercicio que ya se ha resuelto (en la clase o en el libro). Me parece que las condiciones de los exámenes (tiempo limitado, presiones de otros cursos y otros exámenes) hacen difícil (si no es que irracional) *examinar* a los estudiantes con algo más que los problemas básicos de rutina, pero no concluyo que el curso debiera consistir exclusivamente en este tipo de material. Algunos estudiantes adoptan la actitud de menospreciar el material del curso que no viene en los exámenes. Yo me opongo rotundamente a esta actitud, pero no tengo una solución global para estas presiones conflictivas.

Organización general. No he hecho grandes innovaciones en la exposición del cálculo. Es natural que así sea, pues el tema se descubrió hace más de 300 años.

He reducido la cantidad de geometría analítica a lo que es necesario y suficiente para un primer curso general de esta rama de las matemáticas. Para algunas aplicaciones se requiere más, pero estas aplicaciones son bastante especializadas. Por ejemplo, si se requieren las propiedades particulares acerca del foco de una parábola en un curso de óptica, entonces ése es el lugar para presentarlas, no en un curso general dirigido a matemáticos, físicos, químicos, biólogos e ingenieros, sólo por mencionar algunos. Considero como un desafortunado accidente histórico el tremendo énfasis en la geometría analítica de las cónicas que ha sido la moda durante muchos años. Lo importante es que la idea básica de representar un gráfica mediante una figura en el plano sea comprendida en su totalidad, junto con ejemplos básicos. Deben pasarse por alto las más abstrusas propiedades de las elipses, parábolas e hipérbolas.

Se cubren primero la diferenciación y las funciones elementales; la integración se estudia en segundo lugar. Cada tema forma un todo coherente. Por ejemplo, en la parte de diferenciación se presentan tres veces los problemas de razones de cambio para ilustrar el mismo principio general pero en contextos de diversas funciones elementales (primero polinomios, después funciones trigonométricas y después funciones inversas). Esta repetición a intervalos breves es pedagógicamente adecuada y contribuye a la coherencia del tema. También es natural deslizarse de la integración a la fórmula de Taylor, probada con el término de residuo mediante integración por partes. Sería un tanto inconveniente romper con esta secuencia.

La experiencia ha mostrado que los capítulos III a VIII constituyen un programa adecuado para **un semestre (diferenciación y funciones elementales)**, mientras que los capítulos IX a XIII forman un programa adecuado para un **segundo semestre (integración y fórmula de Taylor)**. Los primeros dos capítulos se pueden usar como un rápido repaso para grupos que no estén particularmente bien preparados.

Me parece que todos estos factores compensan con creces la posible desventaja de que en otros cursos (física, y quizá química) se necesite integración desde el principio. Esto puede ser cierto, pero también se necesitan los otros temas, y desafortunadamente el curso ha de proyectarse de manera totalmente ordenada en el eje del tiempo.

Además, estudiar el log y la exponencial antes de la integración tiene la ventaja de que nos encontramos con un caso particular y concreto de la situación donde hallamos una antiderivada por medio del área: $\log x$ es el área bajo $1/x$ entre 1 y x. Vemos también en este caso concreto cómo $dA(x)/dx = f(x)$, donde $A(x)$ es el área. Después esto se hace en toda su generalidad al estudiar la integral. Más aún, al haberse utilizado en este caso concreto las desigualdades que incluyen sumas inferiores y sumas superiores, se comprenden más fácilmente en el caso general. Las clases que comienzan su curso sobre integración sin pasar por diferenciación bien podrían comenzar con la última sección del capítulo sobre logaritmos, i.e. la última sección del capítulo VIII.

La fórmula de Taylor se prueba con la forma integral del residuo, el cual

se estima de manera adecuada. La demostración con integración por partes es más natural que la otra (diferenciar una expresión complicada sacada de quién sabe dónde), y es la que se generaliza al caso de dimensión superior. Coloqué la integración después de la diferenciación, pues, de no ser así, no se dispondría de técnicas para evaluar integrales.

En lo personal pienso que los cálculos que surgen de manera natural de la fórmula de Taylor (cálculos de valores de funciones elementales, cálculo de e, π, $\log 2$, cálculos de integrales definidas hasta unos cuantos decimales, a los que se les da poca importancia en los cursos de cálculo) son importantes. Esto ya era evidente hace muchos años, y es más patente ahora a la luz de la proliferación de las calculadoras de bolsillo. El diseño de dichas calculadoras se basa precisamente en medios efectivos de cálculo que emplean los polinomios de Taylor. Cuando se aprende cómo estimar de manera efectiva el término de residuo en la fórmula de Taylor se adquiere una excelente idea de las funciones elementales, que no se podría obtener de otra manera.

También se debe destacar el cálculo de integrales como

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad \text{o} \quad \int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$$

que se puede realizar con facilidad numéricamente, sin el uso de una forma sencilla para la integral indefinida. De nuevo, este cálculo da una buena idea, que no se puede obtener de otra manera, de un aspecto de la integral. Muchos libros dan poca importancia a estas aplicaciones en aras de un amplio tratamiento de las aplicaciones de la integración a varias situaciones de ingeniería, como presión de fluidos sobre una presa, principalmente por accidente histórico. No tengo nada en contra de la presión del fluido, pero se debe tener presente que dedicar mucho tiempo a algún tema evita que se asigne a otros el tiempo adecuado. Por ejemplo, Ron Infante me dice que el cálculo numérico de integrales como

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

que se efectúa en el capítulo XIII, se presenta con frecuencia en el estudio de redes de comunicación, en relación con ondas cuadradas. Cada profesor debe usar su criterio para elegir el tema que debería enfatizar, a costa de otros.

Los capítulos sobre funciones de varias variables se incluyen para clases que puedan avanzar a mayor velocidad, y, por lo tanto, que tengan tiempo para estudiar material adicional en el primer año. **En circunstancias ordinarias no se cubrirán estos capítulos durante un curso de primer año. Por ejemplo, no se cubren durante el curso de primer año en Yale.**

Inducción. Pienso que durante el primer curso de cálculo se está en un buen momento para aprender inducción. Sin embargo, al tratar de enseñar inducción sin haber encontrado primero ejemplos naturales, se afrontan grandes dificultades psicológicas. Por lo tanto, durante la parte de diferenciación no he mencionado formalmente la inducción. Cuando surge una situación donde se puede usar inducción he realizado procedimientos por pasos para ilustrar el procedimiento inductivo. Después de suficientes repeticiones, el estudiante está listo para ver un patrón que pueda resumirse mediante la "inducción" formal, que será ahora un nombre dado a un concepto que ya se ha comprendido.

Material de repaso. La presente edición también subraya la importancia de presentar más material de repaso. El entrenamiento deficiente en la enseñanza media elemental es responsable de la mayoría de las dificultades experimentadas en el nivel medio superior. Estas dificultades no se deben al problema de comprender el cálculo sino a la incapacidad de manejar el álgebra elemental. Gran parte de los estudiantes no pueden dar de manera automática el desarrollo de expresiones como

$$(a+b)^2, \quad (a-b)^2, \quad \text{o} \quad (a+b)(a-b).$$

Las respuestas se deben memorizar como las tablas de multiplicar. Memorizar de rutina estas fórmulas básicas no es incompatible con aprender los principios generales: es complementario.

Para evitar malas interpretaciones, deseo afirmar explícitamente que la pobre preparación de tantos estudiantes de enseñanza media elemental no se puede atribuir a las "nuevas matemáticas" *versus* las "matemáticas antiguas". Cuando comencé a enseñar cálculo como estudiante graduado en 1950, hallé que la mayoría de los alumnos de primer año de los *colleges* estaban mal preparados. Hoy día se halla sólo cierto número (es difícil medir cuántos). Por otro lado, un grupo de tamaño definido, de los mejores, ha tenido la oportunidad de aprender algo de cálculo, incluso hasta por un año, lo cual hubiera sido inconcebible en tiempos anteriores. Por mala que sea la situación, hay, sin embargo, una mejoría.

Deseo agradecer a mis colegas de Yale y a otros más antiguos el haber sugerido mejoras al libro: Edward Bierstone (University of Toronto), Folke Eriksson (University of Gothenburg), R. W. Gatterdam (University of Wisconsin, Parkside), y George Metakides (University of Rochester). Agradezco a Ron Infante su ayuda con la revisión de galeras.

Mi reconocimiento también para Anthony Petrello por verificar los ejemplos resueltos y las respuestas en las ediciones anteriores.

S. Lang

Contenido

PARTE DOS

PARTE TRES

Parte uno

Repaso del material básico

Si ya se dominan las propiedades elementales de los números, y si ya se sabe acerca de coordenadas y se conocen las gráficas de las ecuaciones comunes (ecuaciones lineales, parábolas y elipses), entonces debería comenzarse directamente con el capítulo III que trata sobre derivadas.

CAPÍTULO I

Números y funciones

No es posible probar todo cuando se comienza el estudio de cualquier tipo de matemáticas. Cada vez que introducimos un nuevo concepto debemos definirlo en términos de un concepto cuyo significado ya conocemos, y es imposible continuar por siempre estas definiciones de manera regresiva. Así que debemos escoger un punto de partida, lo que suponemos conocido, y lo que deseamos explicar y probar en términos de lo supuesto.

Al principio de este capítulo describiremos la mayoría de las cosas que supondremos conocidas para este curso; en realidad, es muy poco. A grandes rasgos, suponemos que se sabe acerca de números, suma, resta, multiplicación y división (entre números distintos de 0). Recordaremos las propiedades de las desigualdades (cuando un número es mayor que otro). En algunas ocasiones daremos por conocidas ciertas propiedades de números con las que quizá no se hayan encontrado antes y que siempre deberán precisarse. Para los interesados, en el apéndice se proporcionan las demostraciones de estas propiedades.

I, §1. ENTEROS, NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS REALES

Los números más comunes son los números $1, 2, 3, \ldots$ que se llaman **enteros positivos**.

Los números $-1, -2, -3, \ldots$ se llaman **enteros negativos**. Cuando queremos hablar de los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0, los llamamos sencillamente **enteros**. Así los enteros son $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.

La suma y el producto de dos enteros también son enteros.

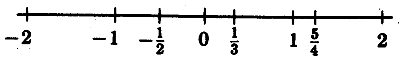
Además de los enteros tenemos **fracciones**, como $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{101}{27}$, $\frac{8}{16}, \ldots$, que pueden ser positivas o negativas, y que se pueden escribir como cocientes m/n, donde m, n son enteros y n no es igual a 0. Dichas fracciones se llaman **números racionales**. Todo entero m es un número racional, pues se puede escribir como $m/1$, pero, por supuesto, no es cierto que todo número racional sea un entero. Observamos que la suma y el producto de dos números racionales también son números racionales. Si a/b y m/n son dos números racionales (con a, b, m, n enteros y b, n distintos de 0), entonces su suma y su producto están dados por las fórmulas siguientes, que conocen desde la escuela elemental:

$$\frac{a}{b}\frac{m}{n} = \frac{am}{bn},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn}.$$

En esta segunda fórmula simplemente pusimos las dos fracciones sobre el denominador común bn.

Podemos representar los enteros y los números racionales de manera geométrica sobre una recta. Primero seleccionamos una unidad de longitud. Los enteros son los múltiplos de esta unidad, y los números racionales son partes fracionarias de esta unidad. En la recta a continuación hemos trazado algunos números racionales.



Observen que los enteros y números racionales negativos están a la izquierda del cero.

Finalmente, tenemos los números que se pueden representar mediante decimales infinitos, como $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ o $\pi = 3.14159\ldots$, y que se llamarán **números reales** o simplemente **números**.

Los enteros y los números racionales son casos particulares de estos decimales infinitos. Por ejemplo,

$$3 = 3.000000\ldots,$$

y

$$\tfrac{3}{4} = 0.7500000\ldots,$$

$$\tfrac{1}{3} = 0.3333333\ldots.$$

Vemos que puede haber muchas maneras de denotar el mismo número, por ejemplo, como la fracción $\frac{1}{3}$ o como el decimal infinito $0.33333\ldots$. Hemos escrito los decimales con puntos suspensivos al final. Si detenemos el desarrollo decimal en cualquier lugar dado, obtenemos una aproximación al número. Cuanto más lejos detengamos el decimal, mejor aproximación obtendremos.

Es fácil hallar el desarrollo decimal para una fracción mediante el proceso de división que conocen desde la escuela elemental.

Más adelante aprenderemos a hallar desarrollos decimales para otros números de los cuales quizá ya hayan oído hablar, como π. Probablemente les han dicho que $\pi = 3.14\ldots$ pero no les dijeron por qué. En el capítulo XIII aprenderán a calcular un número arbitrario de lugares decimales para π.

Los números se representan geométricamente como la colección de todos los puntos sobre la recta, no sólo aquellos que son una parte racional de la unidad de longitud o un múltiplo de ella.

Notamos que la suma y el producto de dos números son números. Si a es un número distinto de cero, entonces hay un número único b tal que $ab = ba = 1$, y escribimos

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{o} \quad b = a^{-1}.$$

Decimos que b es el **inverso** de a, o "a inverso." Hacemos énfasis en que la expresión

$$\mathbf{1/0} \quad \text{o} \quad \mathbf{0^{-1}} \quad \textbf{no está definida.}$$

En otras palabras, no podemos dividir entre cero, y no atribuimos significado alguno a los símbolos $1/0$ ó 0^{-1}.

Sin embargo, si a es un número, entonces el producto $0 \cdot a$ está definido y es igual a 0. El producto de cualquier número por 0 es 0. Más aún, si b es cualquier número distinto de 0, entonces $0/b$ está definido y es igual a 0; también se puede escribir $0 \cdot (1/b)$.

Si a es un número racional $\neq 0$, entonces $1/a$ también es un número racional. En efecto, si podemos escribir $a = m/n$, con enteros m y n ambos diferentes de 0, entonces

$$\frac{1}{a} = \frac{n}{m}$$

también es un número racional.

I, §2. DESIGUALDADES

Además de la suma, multiplicación, resta y división (entre números distintos de 0), estudiaremos ahora otra importante característica de los números reales.

Tenemos los **números positivos**, representados geométricamente sobre la recta por aquellos números distintos de cero que están a la derecha de 0. Si a es un número positivo, escribimos $a > 0$. Sin duda ya habrán trabajado con números positivos y con desigualdades. Las dos propiedades siguientes son las más básicas acerca de la positividad.

POS 1. *Si a y b son positivos, entonces también lo son el producto ab y la suma $a + b$.*

POS 2. *Si a es un número, entonces a es positivo, o $a = 0$, o $-a$ es positivo, y estas posibilidades son exclusivas entre sí.*

Si un número no es positivo y no es 0, entonces decimos que este número es **negativo**. Por **POS 2**, si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

Aunque ya sepan que el número 1 es positivo, de hecho se puede **probar** a partir de nuestras dos propiedades. Quizá les interese ver la demostración, que va como sigue y es muy sencilla. Por **POS 2** sabemos que 1 ó -1 es positivo; si 1 no es positivo, entonces -1 es positivo. Por **POS 1** se deduce entonces que $(-1)(-1)$ es positivo, pero este producto es igual a 1. En consecuencia, es el 1 el que debe ser positivo, no el -1. Usando la propiedad **POS 1**, podríamos concluir ahora que $1+1=2$ es positivo, que $2+1=3$ es positivo, y así sucesivamente.

Si $a>0$, diremos que a es **mayor que** 0. Si queremos decir que a es positivo o igual a 0, escribimos

$$a \geq 0$$

y esto se lee "a es mayor o igual que 0."

Dados dos números a y b, diremos que a es **mayor que** b y lo escribimos $a>b$ si $a-b>0$. Escribimos $a<0$ (a es **menor que** 0) si $-a>0$ y $a<b$ si $b>a$. Así, $3>2$ porque $3-2>0$.

Escribiremos $a \geq b$ cuando queramos decir que a es **mayor o igual que** b. Así, $3 \geq 2$ y $3 \geq 3$ son desigualdades verdaderas.

Hay otras reglas válidas acerca de las desigualdades.

En lo que sigue, sean a, b y c números.

Regla 1. *Si $a>b$ y $b>c$, entonces $a>c$.*

Regla 2. *Si $a>b$ y $c>0$, entonces $ac>bc$.*

Regla 3. *Si $a>b$ y $c<0$, entonces $ac<bc$.*

La regla 2 expresa el hecho de que se **preserva** una desigualdad multiplicada por un número positivo. La regla 3 dice que si multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número negativo, entonces la desigualdad **se invierte**. Por ejemplo, tenemos la desigualdad

$$1<3$$

Como $2>0$, tenemos también que $2\cdot 1<2\cdot 3$. Pero -2 es negativo y, si multiplicamos ambos lados por -2, obtenemos

$$-2>-6.$$

En la representación geométrica de los números reales sobre la recta, -2 está a la derecha de -6. Esto nos da la representación geométrica del hecho de que -2 es mayor que -6.

Si desean, pueden dar por supuestas estas tres reglas, como lo hicieron con **POS 1** y **POS 2**; todo esto se usa en la práctica. Sucede que las tres reglas se pueden probar en términos de **POS 1** y **POS 2**. Ahora bien, no podemos dar por supuestas todas las desigualdades que se encuentren en la práctica, por lo cual, sólo para mostrar algunas técnicas a las cuales conviene recurrir para otras

aplicaciones, mostraremos cómo se pueden deducir estas tres reglas a partir de **POS 1** y **POS 2**. Si desean pueden omitir estas (breves) demostraciones.

Para probar la regla 1 se supone que $a>b$ y $b>c$. Por definición, esto significa que $(a-b)>0$ y $(b-c)>0$. Usando la propiedad **POS 1**, concluimos que

$$a-b+b-c>0,$$

y cancelando b nos da $(a-c)>0$. Por definición, esto significa que $a>c$, como debía demostrarse.

Para probar la regla 2 se supone que $a>b$ y $c>0$. Por definición,

$$a-b>0.$$

Y usando la propiedad de **POS 1** respecto al producto de números positivos, concluimos que

$$(a-b)c>0.$$

El lado izquierdo de esta desigualdad no es otro que $ac-bc$, que es por lo tanto >0. De nuevo por definición, esto nos da

$$ac>bc.$$

Dejamos la demostración de la regla 3 como ejercicio.

Damos un ejemplo para mostrar cómo usar las tres reglas.

Ejemplo. Sean a, b, c y d números con c, $d>0$. Suponer que

$$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}.$$

Deseamos probar la regla de la "multiplicación cruzada"

$$ad<bc.$$

Usando la regla 2, al multiplicar por c cada lado de la desigualdad original, obtenemos

$$a<bc/d.$$

Usando de nuevo la regla 2 y multiplicando cada lado por d obtenemos

$$ad<bc,$$

según se deseaba.

Sea a un número >0. Entonces existe un número cuyo cuadrado es a. Si $b^2=a$ observamos que

$$(-b)^2=b^2$$

también es a, de modo que b o $-b$ es positivo. Acordamos denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada **positiva** y llamarla simplemente **raíz cuadrada de** a. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2 y no a -2, aunque $(-2)^2=4$. Ésta es la convención más práctica que podemos hacer acerca del uso del signo $\sqrt{}$. Por supuesto, la raíz cuadrada de 0 es el 0 mismo. Un número negativo *no* tiene raíz cuadrada en los números reales.

Así, hay dos soluciones a una ecuación

$$x^2 = a$$

con $a > 0$. Estas dos soluciones son $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 3$ tiene las dos soluciones

$$x = \sqrt{3} = 1.732\ldots \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{3} = -1.732\ldots.$$

La ecuación $x^2 = 0$ tiene exactamente una solución, a saber, $x = 0$. La ecuación $x^2 = a$ con $a < 0$ no tiene solución en los números reales.

Definición. Sea a un número. Definimos el **valor absoluto** de a como

$$\boxed{|a| = \sqrt{a^2}.}$$

En particular,

$$\boxed{|a|^2 = a^2.}$$

Así, el valor absoluto de un número siempre es ≥ 0. El valor absoluto de un número positivo siempre es positivo.

Ejemplo. Tenemos

$$|3| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3,$$

pero

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Además, para cualquier número a obtenemos

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Teorema 2.1. *Si a es cualquier número, entonces*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0, \\ -a & si \quad a < 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $a \geq 0$, entonces a es el único número ≥ 0 cuyo cuadrado es a^2, de modo que $|a| = \sqrt{a^2} = a$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y

$$(-a)^2 = a^2,$$

por lo cual, en esta ocasión, $-a$ es el único número > 0 cuyo cuadrado es a^2, de donde $|a| = -a$. Esto prueba el teorema.

Teorema 2.2. *Si a y b son números, entonces*

$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Demostración. Tenemos

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a|\,|b|.$$

Como ejemplo, vemos que

$$|-6| = |(-3)\cdot 2| = |-3|\,|2| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Hay una última desigualdad sumamente importante.

Teorema 2.3. *Si a y b son dos números, entonces*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Observamos primero que ab es positivo, negativo, o bien 0. En cualquier caso, tenemos

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|.$$

Entonces, al multiplicar ambos lados por 2, obtenemos la desigualdad

$$2ab \leq 2|a|\,|b|.$$

Usando esta desigualdad hallamos:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a|\,|b| + b^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

Podemos extraer la raíz cuadrada de ambos lados y usar el teorema 2.1 para concluir que

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

con lo que probamos el teorema.

Más adelante hallarán gran cantidad de ejercicios para que practiquen con desigualdades; desarrollaremos algunos ejemplos numéricos para mostrarles el camino.

Ejemplo 1. Determinar los números que satisfacen la igualdad

$$|x + 1| = 2.$$

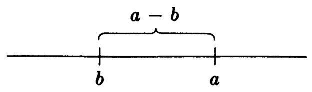
Esta igualdad significa que $x + 1 = 2$ o que $-(x + 1) = 2$, porque el valor absoluto de $x + 1$ es el mismo $(x + 1)$ o bien $-(x + 1)$. En el primer caso, al despejar x obtenemos $x = 1$, y en el segundo caso obtenemos $-x - 1 = 2$ o $x = -3$. Así, la respuesta es $x = 1$ o $x = -3$.

Sean a y b números. Podemos interpretar

$$|a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$$

como la distancia entre a y b.

Por ejemplo, si $a > b$, entonces esto está geométricamente claro a partir de la figura.



Por otro lado, si $a < b$, tenemos

$$|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|,$$

y $b > a$, de modo que vemos de nuevo que $|a - b| = |b - a|$ es la distancia entre a y b.

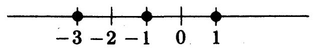
En el ejemplo anterior, el conjunto de números x tales que

$$|x + 1| = 2$$

es el conjunto de números cuya distancia a -1 es 2, pues podemos escribir

$$x + 1 = x - (-1).$$

Así, de nuevo vemos geométricamente que este conjunto de números está formado por 1 y -3, como se muestra en la figura.



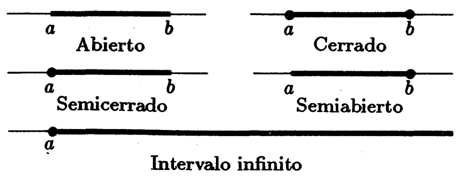
También daremos un ejemplo para mostrar cómo se determinan los números que satisfacen determinadas desigualdades. Para ello necesitamos cierta terminología. Sean a y b números, y supongamos que $a < b$.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b, y a veces se denota por (a, b).

La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b, y a veces se denota por $[a, b]$. A un solo punto también se le llamará intervalo cerrado.

En los dos casos anteriores, los números a y b se llaman **puntos extremos** de los intervalos. En ocasiones queremos incluir uno solo de ellos dentro del intervalo, y entonces definimos la colección de números x tales que $a \leq x < b$ como **intervalo semicerrado**, y de manera similar para aquellos números x tales que $a < x \leq b$.

Por último, si a es un número, llamamos **intervalo infinito** a la colección de números $x > a$, o $x \geq a$, o $x < a$, o $x \leq a$. A continuación se muestran dibujos de intervalos.



Ejemplo 2. Determinar todos los intervalos de números que satisfacen

$$|x| \leq 4.$$

Distinguimos dos casos; el primero es $x \geq 0$. Entonces, $|x| = x$, y en este caso, nuestra desigualdad equivale a

$$0 \leq x \leq 4.$$

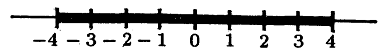
El segundo caso es $x < 0$, donde $|x| = -x$, y nuestra desigualdad equivale a $-x \leq 4$ o en otras palabras, $-4 \leq x$. Así, en el segundo caso, los números que satisfacen nuestra desigualdad son precisamente los que están en el intervalo

$$-4 \leq x < 0.$$

Si consideramos ahora ambos casos, vemos que el intervalo de números que satisfacen nuestra desigualdad $|x| \leq 4$ es el intervalo

$$-4 \leq x \leq 4.$$

También podemos expresar la respuesta en términos de distancia. Los números x tales que $|x| \leq 4$ son precisamente aquellos números cuya distancia al origen es ≤ 4 y en consecuencia conforman el intervalo cerrado entre -4 y 4, como se muestra en la figura.



De manera más general, sea a un número positivo. Un número x satisface la desigualdad $|x| < a$ si, y sólo si,

$$-a < x < a.$$

El argumento para probar esto es el mismo que en el caso particular $a = 4$ recién estudiado.

Ejemplo 3. Determinar todos los intervalos de números que satisfagan la desigualdad

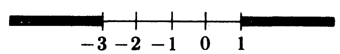
$$|x + 1| > 2.$$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades

$$x + 1 > 2 \qquad \text{o} \qquad -(x + 1) > 2.$$

De la primera obtenemos la condición $x > 1$, y de la segunda, la condición $-x - 1 > 2$ o, en otras palabras, $x < -3$. Se tienen así dos intervalos (infinitos), a saber

$$x > 1 \qquad \text{y} \qquad x < -3.$$



Ejemplo 4. Ahora, en cambio, queremos determinar el intervalo de números

x tales que

$$|x+1| < 2.$$

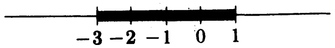
Éstos son los números x cuya distancia a -1 es < 2, pues podemos escribir

$$x + 1 = x - (-1).$$

Por lo tanto, es el intervalo de números que satisfacen

$$-3 < x < 1$$

según se muestra en la figura.



I, §2. EJERCICIOS

Determinar todos los intervalos de números x que satisfacen las desigualdades siguientes.

1. $|x| < 3$
2. $|2x+1| \le 1$
3. $|x^2 - 2| \le 1$
4. $|x-5| > 2$
5. $(x+1)(x-2) < 0$
6. $(x-1)(x+1) > 0$
7. $(x-5)(x+5) < 0$
8. $x(x+1) \le 0$
9. $x^2(x-1) \ge 0$
10. $(x-5)^2(x+10) \le 0$
11. $(x-5)^4(x+10) \le 0$
12. $(2x+1)^6(x-1) \ge 0$
13. $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$
14. $|x+4| < 1$
15. $0 < |x+2| < 1$
16. $|x| < 2$
17. $|x-3| < 5$
18. $|x-3| < 1$
19. $|x-3| < 7$
20. $|x-3| > 7$
21. $|x+3| > 7$

Probar las desigualdades siguientes para todos los números x y y.

22. $|x+y| \ge |x| - |y|$ [*Idea:* Escribir $x = x + y - y$ y aplicar el teorema 2.3 junto con el hecho de que $|-y| = |y|$.]
23. $|x-y| \ge |x| - |y|$
24. $|x-y| \le |x| + |y|$
25. Sean a y b números positivos tales que $a < b$. Mostrar que $a^2 < b^2$.
26. Sean a, b, c y d números > 0 tales que $a/b < c/d$. Mostrar que
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad \text{y} \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$
27. Sean a y b números > 0. Mostrar que
$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$
28. Sea $0 < a < b$ y $0 < c < d$. Probar que
$$ac < bd.$$

I, §3. FUNCIONES

Una función, definida para todos los números, es una asociación que a cualquier número dado asocia otro número.

Se acostumbra denotar una función mediante una letra, así como una letra "x" denota un número. Así, si denotamos por f una función dada y x es un número, entonces denotamos por $f(x)$ el número asociado con x mediante la función. Claro que esto no significa "f por x": no hay multiplicación aquí. Los símbolos $f(x)$ se leen "f de x." A veces se denota la asociación del número $f(x)$ al número x mediante una flecha especial, a saber

$$x \mapsto f(x).$$

Por ejemplo, consideremos la función que a cada número x asocia el número x^2. Si f denota esta función, entonces tenemos $f(x) = x^2$. En particular, el cuadrado de 2 es 4 y por consiguiente, $f(2) = 4$. El cuadrado de 7 es 49, por lo que $f(7) = 49$. El cuadrado de $\sqrt{2}$ es 2 y por lo tanto $f(\sqrt{2}) = 2$. El cuadrado de $(x+1)$ es

$$x^2 + 2x + 1$$

y así $f(x+1) = x^2 + 2x + 1$. Si h es cualquier número,

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2.$$

Para tomar otro ejemplo, sea g la función que a cada número asocia el número $x + 1$. Entonces podemos describir g mediante los símbolos

$$x \mapsto x + 1$$

y escribir $g(x) = x + 1$. Por lo tanto, $g(1) = 2$. Además, $g(2) = 3$, $g(3) = 4$, $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$ y $g(x+1) = x + 2$ para cualquier número x.

Podemos ver el **valor absoluto** como una función,

$$x \mapsto |x|$$

definida por la regla: Dado cualquier número a, le asociamos el mismo número a si $a \ge 0$, y le asociamos el número $-a$ si $a < 0$. Denotemos por F la función valor absoluto. Entonces $F(x) = |x|$ para cualquier número x. Tenemos en particular que $F(2) = 2$, y también que $F(-2) = 2$. El valor absoluto no se define mediante una fórmula como x^2 o $x + 1$. En seguida damos otro ejemplo de una función que no está definida mediante una fórmula.

Consideremos la función G descrita por la siguiente regla:

$$G(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ es un número racional.}$$
$$G(x) = 1 \quad \text{si } x \text{ no es un número racional.}$$

Entonces en particular, $G(2) = G(\frac{2}{3}) = G(-\frac{3}{4}) = 0$ pero

$$G(\sqrt{2}) = 1.$$

Deben comprender que es posible construir una función con sólo prescribir de manera arbitraria la regla que asocia un número a uno dado.

Si f es una función y x un número, entonces $f(x)$ se llama **valor** de la función en x. Así, si f es la función

$$x \mapsto x^2,$$

el valor de f en 2 es 4 y el valor de f en $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$.

Para describir una función necesitamos simplemente dar su valor en cualquier número x. Ésta es la razón por la cual empleamos la notación $x \mapsto f(x)$. A veces, por brevedad, hablamos de la función $f(x)$, queriendo referirnos con ello a la función f cuyo valor en x es $f(x)$. Por ejemplo, diríamos "sea $f(x)$ la función $x^3 + 5$" en lugar de decir "sea f la función que a cada número x le asocia $x^3 + 5$." Usando la flecha especial $\mapsto$, también podríamos decir "sea f la función $x \mapsto x^3 + 5$."

También nos gustaría poder definir una función para algunos números y dejarla indefinida para otros. Por ejemplo, nos gustaría decir que $\sqrt{x}$ es una función (la función raíz cuadrada, cuyo valor en un número x es la raíz cuadrada de ese número), pero observamos que un número negativo no tiene raíz cuadrada. Por tal motivo, es deseable hacer un poco más general el concepto de función enunciando explícitamente para qué números está definida. Por ejemplo, la raíz cuadrada está definida sólo para números ≥ 0. Esta función se denota por $\sqrt{x}$. El valor $\sqrt{x}$ es el único número ≥ 0 cuyo cuadrado es x.

Así en general, sea S una colección de números. Por **función definida en** S, entendemos una asociación que a cada número x en S le asocia un número. Llamamos a S el **dominio de definición** de la función. Por ejemplo, el dominio de definición de la función raíz cuadrada es la colección de todos los números ≥ 0.

Demos otro ejemplo de una función que no está definida para todos los números. Sea S la colección de todos los números $\neq 0$. La función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

está definida para números $x \neq 0$ y, por lo tanto, está definida en el dominio S. Para esta función particular tenemos $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$, y

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En la práctica, las funciones se usan para denotar la dependencia de una cantidad con respecto a otra.

Ejemplo. El área dentro de un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Así pues, el área es una función del radio r, y podemos escribir también

$$A(r) = \pi r^2.$$

Si el radio es 2, entonces el área dentro de un círculo de radio 2 está dada por

$$A(2) = \pi 2^2 = 4\pi.$$

Ejemplo. Un automóvil se mueve a una rapidez constante de 50 km/hr. Si se mide el tiempo en horas, la distancia recorrida es una función del tiempo, es decir, si denotamos por s la distancia, entonces

$$s(t) = 50t.$$

La distancia es el producto de la rapidez por el tiempo transcurrido, de modo que, después de dos horas, la distancia es

$$s(2) = 50 \cdot 2 = 100\,\text{km}.$$

Una palabra final antes de pasar a los ejercicios: No existe ninguna razón mágica por la cual siempre debamos usar la letra x para describir una función $f(x)$. En lugar de hablar de la función $f(x) = 1/x$ podríamos de igual manera decir $f(y) = 1/y$ o $f(q) = 1/q$. Desafortunadamente, la manera más neutral de escribirlo sería $f(\text{espacio}) = 1/\text{espacio}$, y esto no es conveniente en absoluto.

I, §3. EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = 1/x$. ¿Cuál es $f(-\frac{2}{3})$?
2. Sea de nuevo $f(x) = 1/x$. ¿Cuál es $f(2x+1)$ (para cualquier número x tal que $x \neq -\frac{1}{2}$)?
3. Sea $g(x) = |x| - x$. ¿Cuáles son $g(1)$, $g(-1)$, $g(-54)$?
4. Sea $f(y) = 2y - y^2$. ¿Cuáles son $f(z)$, $f(w)$?
5. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}?$$
¿Cuál es el valor de esta función para $x = 5$?
6. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (raíz cúbica de x)? ¿Cuál es $f(27)$?
7. Sea $f(x) = x/|x|$, definida para $x \neq 0$. ¿Cuáles son:
(a) $f(1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(-3)$ (d) $f(-\frac{4}{3})$?
8. Sea $f(x) = x + |x|$. ¿Cuáles son:
(a) $f(\frac{1}{2})$ (b) $f(2)$ (c) $f(-4)$ (d) $f(-5)$?
9. Sea $f(x) = 2x + x^2 - 5$. ¿Cuáles son:
(a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(x+1)$?
10. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula $f(x) = \sqrt[4]{x}$ (raíz cuarta de x)? ¿Cuál es $f(16)$?
11. Se dice que una función (definida para todos los números) es una función **par** si $f(x) = f(-x)$ para todo x. Se dice que es una función **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Determinar si las funciones siguientes son impares o pares.
(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

12. Sea f cualquier función definida para todos los números. Mostrar que la función $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par. ¿Qué sucede con la función
$$h(x) = f(x) - f(-x),$$
es par, impar o ni lo uno ni lo otro?

I, §4. POTENCIAS

En esta sección simplemente resumimos algo de aritmética elemental.

Sea n un entero ≥ 1 y sea a cualquier número. Entonces a^n es el producto de a consigo mismo n veces. Por ejemplo, sea $a = 3$. Si $n = 2$, entonces $a^2 = 9$. Si $n = 3$, entonces $a^3 = 27$. Así obtenemos una función llamada n-ésima **potencia**. Si f denota esta función, entonces $f(x) = x^n$.

Recordemos la regla
$$x^{m+n} = x^m x^n$$
para cualquier número x y enteros m, $n \geq 1$.

De nuevo, sea n un entero ≥ 1, y sea a un número positivo. Definimos $a^{1/n}$ como el único número positivo b tal que $b^n = a$. (Con base en las propiedades de los números se sobreentiende que existe ese número único b.) Obtenemos una función llamada la **raíz** n-ésima. Así, si f es la raíz cuarta, entonces $f(16) = 2$ y $f(81) = 3$.

La función raíz n-ésima también se puede definir en 0, haciendo que la raíz n-ésima de 0 sea el 0 mismo.

Si a y b son dos números ≥ 0 y n es un entero ≥ 1, entonces
$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Hay otra regla útil y elemental. Sean m y n enteros ≥ 1 y sea a un número ≥ 0. Definimos $a^{m/n}$ como $(a^{1/n})^m$, que también es igual a $(a^m)^{1/n}$. Esto permite definir potencias fraccionarias, y da una función
$$f(x) = x^{m/n}$$
definida para $x \geq 0$.

Prosigamos ahora con potencias con números negativos o 0. Deseamos definir x^a cuando a es un número racional negativo o 0 y $x > 0$. Queremos que la regla fundamental
$$x^{a+b} = x^a x^b$$
sea cierta. Esto significa que debemos definir x^0 como 1. Por ejemplo, como
$$2^3 = 2^{3+0} = 2^3\,2^0,$$
vemos en este ejemplo que la única manera de que se cumpla esta ecuación es estableciendo $2^0 = 1$. De manera análoga, en general, si la relación
$$x^a = x^{a+0} = x^a x^0$$
es cierta, entonces x^0 debe ser igual a 1.

Supongamos finalmente que a es un número racional positivo, y sea x un número > 0. **Definimos**
$$\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}.}$$

Así pues,
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \text{y} \quad 4^{-2/3} = \frac{1}{4^{2/3}}.$$

Observamos que, en este caso particular,
$$(4^{-2/3})(4^{2/3}) = 4^0 = 1.$$

En general,
$$x^a x^{-a} = x^0 = 1.$$

Estamos tentados a definir x^a incluso si a no es un número racional. Esto es más delicado. Por ejemplo, carece totalmente de sentido decir que $2^{\sqrt{2}}$ es el producto de 2 por sí mismo un número raíz cuadrada de 2, veces. El problema de definir 2^a (o x^a) cuando a no es racional se posterga para un capítulo posterior. Hasta ese capítulo, donde trataremos de dicha potencia, supondremos que existe una función, que se escribe x^a, descrita como lo hemos hecho anteriormente para los números racionales y que satisface la relación fundamental
$$x^{a+b} = x^a x^b, \qquad x^0 = 1.$$

Ejemplo. Tenemos una función $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ definida para todo $x > 0$. Sin lugar a dudas es difícil describir sus valores para números particulares, como $2^{\sqrt{2}}$. Durante mucho tiempo no se supo si $2^{\sqrt{2}}$ era o no un número racional. La solución (*no lo es*) fue hallada apenas en 1927 por el matemático Gelfond, quien cobró fama por resolver un problema catalogado como verdaderamente difícil.

Advertencia. No se confunda una función como x^2 con una función como 2^x. Dado un número $c > 0$, podemos ver c^x como una función definida para todo x (la cual se analizará en detalle en el capítulo VIII). Esta función se llama **función exponencial**, de manera que 2^x y 10^x son funciones exponenciales. Seleccionaremos un número
$$e = 2.718\ldots$$
y la función exponencial e^x como la que presenta ciertas propiedades que la hacen mejor que cualquier otra función exponencial. El significado de nuestro uso de la palabra "mejor" se explicará en el capítulo VIII.

I, §4. EJERCICIOS

Hallar a^x y x^a para los siguientes valores de x y a.

1. $a = 2$ y $x = 3$
2. $a = 5$ y $x = -1$
3. $a = \frac{1}{2}$ y $x = 4$
4. $a = \frac{1}{3}$ y $x = 2$
5. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 4$
6. $a = 3$ y $x = 2$
7. $a = -3$ y $x = -1$
8. $a = -2$ y $x = -2$
9. $a = -1$ y $x = -4$
10. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 9$
11. Si n es un entero impar como $1, 3, 5, 7, \ldots$, ¿se puede definir una función de raíz n-ésima para todos los números?

CAPÍTULO II

Gráficas y curvas

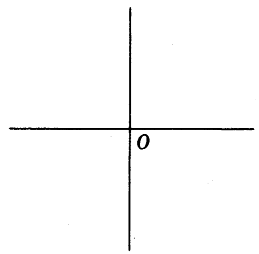
Las ideas contenidas en este capítulo nos permiten traducir enunciados o afirmaciones entre el lenguaje de los números y el lenguaje de la geometría, en ambos sentidos.

Esta posibilidad es fundamental para todo lo que sigue, pues así podemos usar nuestra intuición geométrica como ayuda para resolver problemas acerca de números y funciones y, recíprocamente, podemos usar teoremas acerca de números y funciones para obtener resultados acerca de geometría.

II, §1. COORDENADAS

Una vez seleccionada una unidad de longitud, podemos representar los números como puntos sobre una recta. Extenderemos ahora este procedimiento al plano y a pares de números.

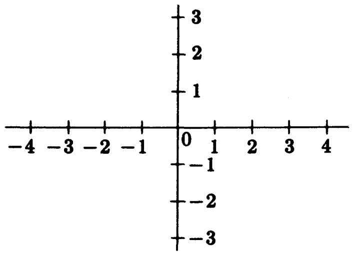
Consideremos una recta horizontal y una recta vertical intersecándose en un origen O.



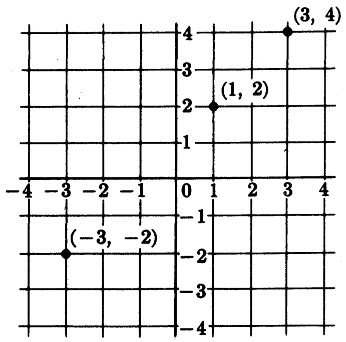
Estas rectas se llamarán **ejes coordenados** o simplemente **ejes**.

Se selecciona una unidad de longitud y se corta la recta horizontal en segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots$ hacia la izquierda y hacia la derecha, y hacemos lo mismo con la recta vertical, pero hacia arriba y hacia abajo, como se indica en la figura siguiente.

Sobre la recta vertical se puede considerar que los puntos que están por abajo del cero corresponden a los enteros negativos, así como consideramos que los puntos de la izquierda sobre la recta horizontal corresponden a los enteros negativos. Vean la figura.



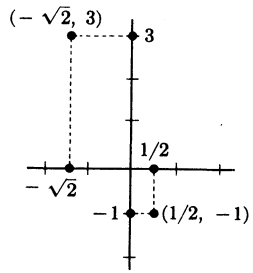
Ahora es posible cortar el plano en cuadrados cuyos lados tengan longitud 1.



Describamos cada punto donde se intersecan dos rectas mediante un par de enteros. Supongan que tenemos dados un par de enteros como $(1, 2)$. Nos desplazamos hacia la derecha del origen 1 unidad y verticalmente hacia arriba 2 unidades para obtener el punto $(1, 2)$ señalado en la figura. También hemos señalado el punto $(3, 4)$. El diagrama es muy semejante a un mapa.

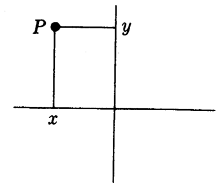
Más aún, también podemos usar números negativos. Por ejemplo, para describir el punto $(-3, -2)$ nos desplazamos hacia la izquierda del origen 3 unidades y verticalmente hacia abajo 2 unidades.

En realidad no existe razón alguna para que nos debamos limitar a puntos descritos por enteros. Por ejemplo, también podemos tener el punto $(\frac{1}{2}, -1)$ y el punto $(-\sqrt{2}, 3)$ como en la figura de la página siguiente.



No trazamos todos los cuadrados sobre el plano, sino sólo las rectas útiles para hallar nuestros dos puntos.

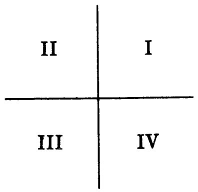
En general, si tomamos cualquier punto P en el plano y trazamos las rectas perpendiculares hacia el eje horizontal y hacia el eje vertical, obtenemos dos números x y y como en la figura que sigue.



La recta perpendicular desde P hacia el eje horizontal determina un número x que es negativo en la figura porque está a la izquierda del origen. El número y determinado por la perpendicular desde P hacia el eje vertical es positivo, pues está arriba del origen. Los dos números x y y se llaman **coordenadas** del punto P, y podemos escribir $P = (x, y)$.

Todo par de números (x, y) determina un punto del plano. Hallamos el punto desplazándonos una distancia x desde el origen O en la dirección horizontal y después una distancia y en la dirección vertical. Si x es positivo nos desplazamos hacia la derecha de O; si x es negativo, lo hacemos hacia la izquierda de O. Si y es positivo, vamos verticalmente hacia arriba y si y es negativo vamos verticalmente hacia abajo. Las coordenadas del origen son $(0, 0)$. Usualmente el eje horizontal se llama **eje x** y el eje vertical, **eje y**. Si un punto P se describe por dos números, digamos $(5, -10)$, es costumbre llamar al primer número coordenada x o abscisa y al segundo número coordenada y u ordenada. Así, 5 es la abscisa y -10 es la ordenada de nuestro punto. Es obvio que podemos usar otras letras además de x y y, por ejemplo t y s, o u y v.

Nuestros dos ejes separan el plano en cuatro **cuadrantes**, los cuales están numerados como se indica en la figura:



Si (x, y) es un punto en el primer cuadrante, entonces tanto x como y son > 0. Si (x, y) es un punto en el cuarto cuadrante, entonces $x > 0$ pero $y < 0$.

II, §1. EJERCICIOS

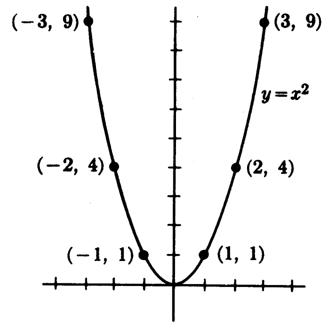
1. Localizar los puntos siguientes: $(-1, 1)$, $(0, 5)$, $(-5, -2)$, $(1, 0)$.
2. Localizar los puntos siguientes: $(\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{4}{3}, -2)$, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
3. Sean (x, y) las coordenadas de un punto en el segundo cuadrante. ¿Es x positivo, o negativo? ¿Es y positivo, o negativo?
4. Sean (x, y) las coordenadas de un punto en el tercer cuadrante. ¿Es x positivo, o negativo? ¿Es y positivo, o negativo?
5. Localizar los puntos siguientes: $(1.2, -2.3)$, $(1.7, 3)$.
6. Localizar los puntos siguientes: $(-2.5, \frac{1}{3})$, $(-3.5, \frac{5}{4})$.
7. Localizar los puntos siguientes: $(1.5, -1)$, $(-1.5, -1)$.

II, §2. GRÁFICAS

Sea f una función. Definimos la **gráfica** de f como la colección de todos los pares de números $(x, f(x))$ cuya primera coordenada es cualquier número para el cual f está definido y cuya segunda coordenada es el valor de la función en la primera coordenada.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ está formada por todos los pares (x, y) tales que $y = x^2$. En otras palabras, es la colección de todos los pares (x, x^2), como $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-3, 9)$, etc.

Como cada par de números corresponde a un punto sobre el plano (una vez seleccionado un sistema de ejes y una unidad de longitud), podemos ver la gráfica de f como una colección de puntos en el plano. En la siguiente figura se ha trazado la gráfica de la función $f(x) = x^2$ junto con los puntos que dimos como ejemplo.



Para determinar la gráfica localizamos multitud de puntos construyendo una tabla con las abscisas y ordenadas.

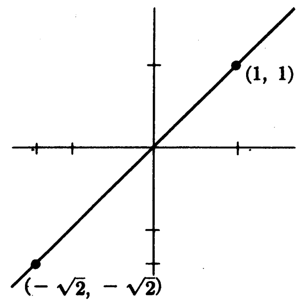
x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	$f(x)$
-1	1
-2	4
-3	9
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

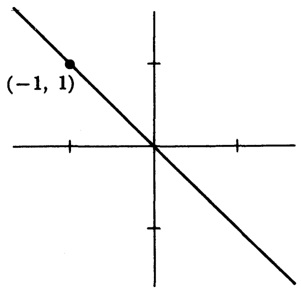
En esta etapa del juego no hay sino este método de ensayo y error para determinar la gráfica de una función. Más adelante desarrollaremos técnicas que permitirán elaborarlas con mayor destreza.

Daremos ahora varios ejemplos de gráficas de funciones que se presentan con frecuencia en nuestro estudio.

Ejemplo 1. Considerar la función $f(x) = x$. Los puntos sobre esta gráfica son del tipo (x, x). La primera coordenada debe ser igual a la segunda. Así, $f(1) = 1$, $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, etc. La gráfica se ve así:

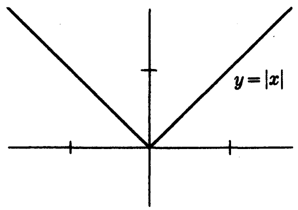


Ejemplo 2. Sea $f(x) = -x$. Su gráfica se ve así:



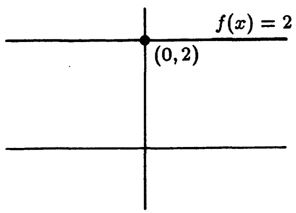
Se puede observar que las gráficas de las dos funciones anteriores son rectas. Más adelante estudiaremos el caso general de una recta.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = |x|$. Cuando $x \geq 0$, sabemos que $f(x) = x$, y cuando $x \leq 0$, sabemos que $f(x) = -x$, de aquí que la gráfica de $|x|$ se obtenga combinando las dos anteriores y se vea así:



Todos los valores de $f(x)$ son ≥ 0, sin importar si x es positivo o negativo.

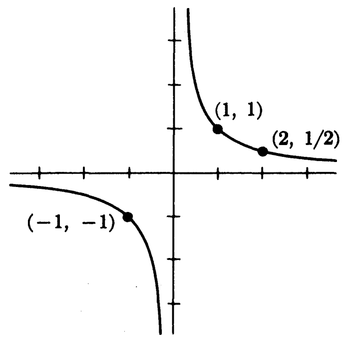
Ejemplo 4. Hay una clase de funciones incluso más sencillas que las recién vistas, a saber, las funciones constantes. Por ejemplo, podemos definir una función f tal que $f(x) = 2$ para todos los números x. En otras palabras, asociamos el número 2 a cualquier número x. Es una asociación muy sencilla, y la gráfica de esta función es una recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, 2)$.



Si tomáramos la función $f(x) = -1$, la gráfica sería una recta horizontal que intersecara al eje vertical en el punto $(0, -1)$.

En general, sea c un número fijo. La gráfica de cualquier función $f(x) = c$ es la recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, c)$. La función $f(x) = c$ se llama función **constante**.

Ejemplo 5. El último de nuestros ejemplos es la función $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Tras localizar unos cuantos puntos de la gráfica, observarán que se ve como sigue.



Por ejemplo, se pueden localizar los puntos siguientes:

x	$1/x$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3

x	$1/x$
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3

Conforme x se hace positivo muy grande, $1/x$ se va haciendo muy pequeño. A medida que x se acerca a 0 desde la derecha, $1/x$ se va haciendo muy grande. Un fenómeno similar ocurre cuando x se acerca a 0 desde la izquierda; en ese caso x es negativo y $1/x$ es negativo. Por lo tanto, en ese caso $1/x$ es negativo muy grande.

Al tratar de determinar cómo se ve la gráfica de una función, conviene observar lo siguiente:

Los puntos en los que la gráfica interseca a los dos ejes coordenados.

Lo que sucede cuando x se vuelve muy grande positivo y muy grande negativo.

Pero, en términos generales, la técnica principal que usarán al resolver los ejercicios es localizar multitud de puntos hasta discernir cómo se ve la gráfica.

II, §2. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las funciones siguientes y localizar al menos tres puntos sobre cada gráfica. En todos estos casos damos el valor de la función en x.

1. $x+1$	2. $2x$	3. $3x$
4. $4x$	5. $2x+1$	6. $5x+\frac{1}{2}$
7. $\frac{x}{2}+3$	8. $-3x+2$	9. $2x^2-1$
10. $-3x^2+1$	11. x^3	12. x^4
13. $\sqrt{x}$	14. $x^{-1/2}$	15. $2x+1$
16. $x+3$	17. $\lvert x\rvert+x$	18. $\lvert x\rvert+2x$
19. $-\lvert x\rvert$	20. $-\lvert x\rvert+x$	21. $\frac{1}{x+2}$
22. $\frac{1}{x-2}$	23. $\frac{1}{x+3}$	24. $\frac{1}{x-3}$
25. $\frac{2}{x-2}$	26. $\frac{2}{x+2}$	27. $\frac{2}{x}$
28. $\frac{-2}{x+5}$	29. $\frac{3}{x+1}$	30. $\frac{x}{\lvert x\rvert}$

(En los ejercicios 13, 14 y del 21 al 30, las funciones no están definidas para todos los valores de x.)

31. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=0$ si $x\le 0$. $f(x)=1$ si $x>0$.

32. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x$ si $x<0$. $f(0)=2$. $f(x)=x$ si $x>0$.

33. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x^2$ si $x<0$. $f(x)=x$ si $x\ge 0$.

34. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=\lvert x\rvert+x$ si $-1\le x\le 1$.
$f(x)=3$ si $x>1$. [$f(x)$ no está definida para otros valores de x.]

35. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x^3$ si $x\le 0$. $f(x)=1$ si $0<x<2$. $f(x)=x^2$ si $x\ge 2$.

36. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x$ si $0<x\le 1$. $f(x)=x-1$ si $1<x\le 2$.
$f(x)=x-2$ si $2<x\le 3$. $f(x)=x-3$ si $3<x\le 4$.

[$f(x)$ quedó indefinida para otros valores de x, pero intenten definirla de manera que se preserve la simetría de la gráfica.]

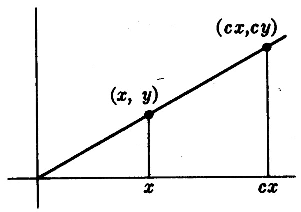
II, §3. LA RECTA

Uno de los tipos básicos de funciones es el tipo cuya gráfica representa una recta. Ya vimos que la gráfica de la función $f(x)=x$ es una recta. Si tomamos $f(x)=2x$, entonces la recta se inclina y se empina más, y aún más para $f(x)=3x$. La gráfica de la función $f(x)=10\,000x$ se vería casi vertical. En general, sea a un número positivo $\neq 0$. Entonces, la gráfica de la función

$$f(x)=ax$$

representa una recta. El punto $(2,2a)$ está sobre la recta, pues $f(2)=2a$. El punto $(\sqrt{2},\sqrt{2}a)$ también está sobre la recta, y si c es cualquier número, el punto (c,ca) está sobre la recta. Las coordenadas (x,y) de estos puntos se obtienen construyendo una transformación de semejanza, comenzando con las coordenadas $(1,a)$ y multiplicándolas por algún número c.

Podemos visualizar este procedimiento mediante triángulos semejantes. En la figura que se muestra a continuación tenemos una recta. Si seleccionamos un punto (x,y) sobre la recta y bajamos la perpendicular desde este punto al eje x, obtenemos un triángulo rectángulo.



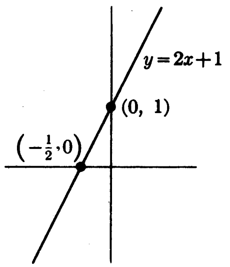
Si x es la longitud de la base del triángulo más pequeño de la figura y y es su altura, y si cx es la longitud de la base del triángulo más grande, entonces cy es la altura del triángulo más grande: el triángulo más pequeño es semejante al más grande.

Si a es un número <0, la gráfica de la función $f(x)=ax$ también será una recta, la cual se inclina hacia la izquierda; por ejemplo, las gráficas de

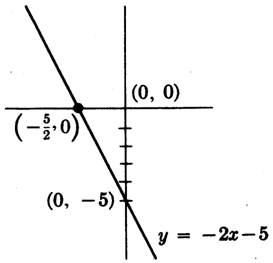
$$f(x)=-x \qquad \text{o} \qquad f(x)=-2x.$$

Damos ahora ejemplos de rectas más generales, que no pasan por el origen.

Ejemplo 1. Sea $g(x)=2x+1$. Cuando $x=0$, entonces $g(x)=1$. Cuando $g(x)=0$, entonces $x=-\frac{1}{2}$. La gráfica se ve como en la figura de la página siguiente.



Ejemplo 2. Sea $g(x) = -2x - 5$. Si $x = 0$, entonces $g(x) = -5$. Si $g(x) = 0$, entonces $x = -\frac{5}{2}$. La gráfica se ve como sigue



Con frecuencia nos referiremos a una función $f(x) = ax+b$ como a una recta (aunque, por supuesto, es la gráfica la que es una recta).

El número a que es el coeficiente de x se llama **pendiente** de la recta, y determina cuánto se inclina la recta. Como acabamos de ver en los ejemplos, cuando la pendiente es positiva, la recta está inclinada hacia la derecha, y cuando la pendiente es negativa, la recta está inclinada hacia la izquierda. A la relación $y = ax + b$ se le llama también **ecuación** de la recta, y da la relación entre la abscisa y la ordenada de un punto sobre la recta.

Sea $f(x) = ax+b$ una recta, y sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos de la recta. Es fácil hallar la pendiente de la recta en términos de las coordenadas de estos dos puntos. Por definición sabemos que

$$y_1 = ax_1 + b$$

y

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Restando tenemos

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1).$$

En consecuencia, si los dos puntos son distintos, $x_2 \neq x_1$, entonces podemos

dividir entre $x_2 - x_1$ y obtener

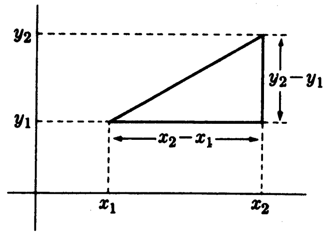
$$\boxed{\text{pendiente de la recta} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Esta fórmula da la pendiente en términos de las coordenadas de dos puntos distintos sobre la recta.

Geométricamente, nuestro cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es simplemente la razón del lado vertical y el lado horizontal del triángulo del diagrama siguiente:



En general, sea a un número y (x_1, y_1) algún punto.

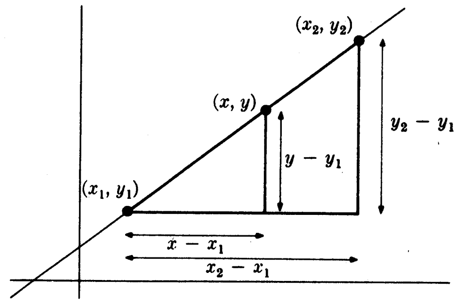
Deseamos hallar la ecuación de la recta que tenga pendiente igual a a y que pase por el punto (x_1, y_1).

La condición de que un punto (x, y) con $x \neq x_1$ esté sobre la recta es equivalente a la condición de que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a.$$

Así, la ecuación de la recta deseada es

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1).}$$



Ejemplo 3. Sean $(1,2)$ y $(2,-1)$ dos puntos ¿Cuál es la pendiente de la recta que los une? ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Primero hallamos la pendiente. Tenemos:

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{2-1} = -3.$$

La recta debe pasar por el punto dado $(1,2)$. Por lo tanto, su ecuación es

$$y - 2 = -3(x-1).$$

Ésta es una respuesta correcta. A veces puede ser útil poner la ecuación en la forma

$$y = -3x + 5,$$

pero es igualmente válido dejarla en la primera forma.

Observen que no importa a cuál punto llamemos (x_1, y_1) y a cuál llamemos (x_2, y_2). Obtendríamos la misma respuesta para la pendiente.

También podemos determinar la ecuación de una recta si conocemos la pendiente y un punto.

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta con pendiente -7 que pasa por el punto $(-1,2)$.

La ecuación es

$$y - 2 = -7(x+1).$$

Ejemplo 5. En general, sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos distintos con $x_1 \neq x_2$. Deseamos hallar la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos. Su pendiente debe, pues, ser igual a

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por ello la ecuación de la recta se puede expresar mediante la fórmula

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq x_1$, o para todos los puntos mediante

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).}$$

Por último, debemos mencionar las rectas verticales. Éstas no se pueden representar mediante ecuaciones del tipo $y = ax + b$. Supongamos que tenemos una recta vertical que interseca al eje x en el punto $(2,0)$. La coordenada y u ordenada de cualquier punto sobre la recta puede ser arbitraria. Así, la ecuación de la recta es simplemente $x = 2$. En general, la ecuación de la recta vertical que interseca al eje x en el punto $(c, 0)$ es $x = c$.

Podemos hallar el punto de intersección de dos rectas al resolver simultáneamente dos ecuaciones lineales.

Ejemplo 6. Hallar el punto de intersección de las dos rectas

$$y = 3x - 5 \quad \text{y} \quad y = -4x + 1.$$

Resolvemos

$$3x - 5 = -4x + 1$$

o de manera equivalente, $7x = 6$. Esto da $x = \frac{6}{7}$, de donde

$$y = 3 \cdot \frac{6}{7} - 5 = \frac{18}{7} - 5.$$

Por consiguiente, el punto común es

$$\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7} - 5\right).$$

II, §3. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las rectas siguientes:

1. $y = -2x + 5$
2. $y = 5x - 3$
3. $y = \frac{x}{2} + 7$
4. $y = -\frac{x}{3} + 1$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes?

5. $(-1,1)$ y $(2,-7)$
6. $(3,\frac{1}{2})$ y $(4,-1)$
7. $(\sqrt{2},-1)$ y $(\sqrt{2},1)$
8. $(-3,-5)$ y $(\sqrt{3},4)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto dado?

9. pendiente 4 y punto $(1,1)$
10. pendiente -2 y punto $(\frac{1}{2},1)$
11. pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto $(\sqrt{2},3)$
12. pendiente $\sqrt{3}$ y punto $(-1,5)$

Trazar las gráficas de las rectas siguientes:

13. $x = 5$
14. $x = -1$
15. $x = -3$
16. $y = -4$
17. $y = 2$
18. $y = 0$

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos siguientes?

19. $(1,\frac{1}{2})$ y $(-1,1)$
20. $(\frac{1}{4},1)$ y $(\frac{1}{2},-1)$
21. $(2,3)$ y $(\sqrt{2},1)$
22. $(\sqrt{3},1)$ y $(3,2)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes?

23. $(\pi,1)$ y $(\sqrt{2},3)$
24. $(\sqrt{2},2)$ y $(1,\pi)$
25. $(-1,2)$ y $(\sqrt{2},-1)$
26. $(-1,\sqrt{2})$ y $(-2,-3)$
27. Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

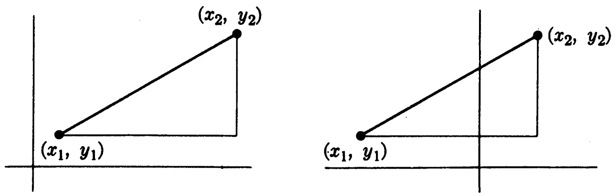
(a) $y = 2x$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 2x + 5$
(d) $y = 2x - 1$ (e) $y = 2x - 5$

28. Se dice que dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Sean $y = ax + b$ y $y = cx + d$ las ecuaciones de dos rectas con $b \neq d$. (a) Si son paralelas, demostrar que no tienen punto en común. (b) De no ser paralelas, demostrar que tienen exactamente un punto en común.

29. Hallar el punto en común de los siguientes pares de rectas:
(a) $y = 3x + 5$ y $y = 2x + 1$ (b) $y = 3x - 2$ y $y = -x + 4$
(c) $y = 2x$ y $y = -x + 2$ (d) $y = x + 1$ y $y = 2x + 7$

II, §4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en el plano, como en los diagramas siguientes, por ejemplo.



(a) (b)

De este modo podemos construir un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento de recta que une nuestros dos puntos se puede determinar a partir de las longitudes de los dos lados. El cuadrado del lado inferior es $(x_2 - x_1)^2$, que es igual a $(x_1 - x_2)^2$.

El cuadrado de la longitud del lado vertical es $(y_2 - y_1)^2$, que es igual a $(y_1 - y_2)^2$. Si L denota la longitud del segmento de recta, entonces, por Pitágoras,

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y en consecuencia,

$$\boxed{L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Ejemplo 1. Sean los dos puntos $(1, 2)$ y $(1, 3)$. Entonces la longitud del segmento de recta entre ellos es

$$\sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2} = 1.$$

A la longitud L también se le llama **distancia** entre los dos puntos.

Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los puntos $(-1, 5)$ y $(4, -3)$.

La distancia es

$$\sqrt{(4-(-1))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{89}.$$

II, §4. EJERCICIOS

Hallar la distancia entre los puntos siguientes:

1. Los puntos $(-3, -5)$ y $(1, 4)$
2. Los puntos $(1, 1)$ y $(0, 2)$
3. Los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$
4. Los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 2)$
5. Los puntos $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(1, 1)$
6. Hallar las coordenadas de la cuarta esquina de un rectángulo cuyas otras tres esquinas son $(-1, 2)$, $(4, 2)$, $(-1, -3)$.
7. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo encontrado en el ejercicio 6?
8. Hallar las coordenadas de la cuarta esquina de un rectángulo cuyas otras tres esquinas son $(-2, -2)$, $(3, -2)$, $(3, 5)$.
9. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo del ejercicio 8?
10. Si x y y son números, definir la distancia entre estos dos números como $|x - y|$. Mostrar que esta distancia es la misma que la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(y, 0)$ en el plano.

II, §5. CURVAS Y ECUACIONES

Sea $F(x, y)$ una expresión que incluya un par de números (x, y). Sea c un número. Consideremos la ecuación

$$F(x, y) = c.$$

Definición. La **gráfica** de la ecuación es la colección de puntos (a, b) en el plano que satisfacen la ecuación, esto es, tal que

$$F(a, b) = c.$$

Esta gráfica también se conoce como **curva**, y usualmente no haremos distinción entre la ecuación

$$F(x, y) = c$$

y la curva que representa la ecuación.

Por ejemplo,

$$x + y = 2$$

es la ecuación de una recta y su gráfica es la recta. Estudiaremos a continuación importantes ejemplos de ecuaciones que surgen con frecuencia.

Si f es una función, entonces podemos formar la expresión $y - f(x)$, y la gráfica de la **ecuación**

$$y - f(x) = 0$$

no es otra que la gráfica de la **función** f como ya lo estudiamos en la sección §2.

Deberán observar que hay ecuaciones del tipo

$$F(x, y) = c$$

que no se obtienen a partir de una función $y = f(x)$, i.e. de una ecuación

$$y - f(x) = 0.$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una de dichas ecuaciones.

Estudiaremos ahora ejemplos importantes de gráficas de ecuaciones

$$F(x, y) = 0 \quad \text{o} \quad F(x, y) = c.$$

II, §6. EL CÍRCULO

La expresión $F(x, y) = x^2 + y^2$ tiene una interpretación geométrica sencilla. Por el teorema de Pitágoras, es el cuadrado de la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Así, los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1^2 = 1$$

son simplemente aquellos puntos cuya distancia al origen es 1. Ellos forman el círculo de radio 1, con centro en el origen.

De manera análoga, los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4$$

son aquellos puntos cuya distancia al origen es 2. Ellos forman el círculo de radio 2. En general, si c es cualquier número > 0, entonces la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = c^2$$

es el círculo de radio c, con centro en el origen.

Ya hemos señalado que la **ecuación**

$$x^2 + y^2 = 1$$

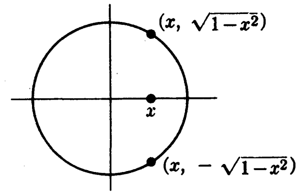
o $x^2 + y^2 - 1 = 0$ no es del tipo $y - f(x) = 0$. Sin embargo, podemos escribir nuestra ecuación en la forma

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Para cualquier valor de x entre -1 y $+1$ podemos despejar y y obtener

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Si $x \neq 1$ y $x \neq -1$, entonces obtenemos dos valores de y para cada valor de x. Geométricamente estos dos valores corresponden a los puntos indicados en el diagrama de la página siguiente.



Existe una función, definida para $-1 \leq x \leq 1$, tal que

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

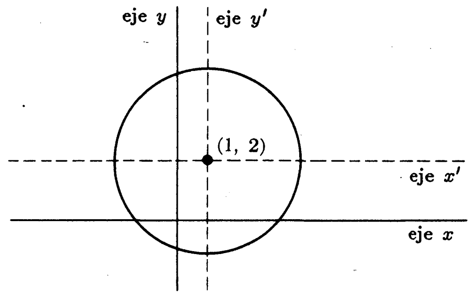
y la gráfica de esta función es la mitad superior de nuestro círculo. De manera análoga, existe otra función

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

definida también para $-1 \leq x \leq 1$, cuya gráfica es la mitad inferior del círculo. Ninguna de estas funciones está definida para otros valores de x.

Ahora pedimos la ecuación del círculo cuyo centro es $(1, 2)$ y cuyo radio tiene longitud 3. Está formado por los puntos (x, y) cuya distancia a $(1, 2)$ es 3. Éstos son los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$



En la figura anterior se ha trazado la gráfica de esta ecuación. También podemos poner

$$x' = x - 1 \quad \text{y} \quad y' = y - 2.$$

En el nuevo sistema coordenado (x', y'), la ecuación del círculo es, pues,

$$x'^2 + y'^2 = 9.$$

Hemos trazado los ejes (x', y') como líneas punteadas.

Como un ejemplo más, deseamos determinar los puntos que están a una distancia 2 del punto $(-1, -3)$. Son los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$\left(x - (-1)\right)^2 + \left(y - (-3)\right)^2 = 4$$

o, en otras palabras,

$$(x+1)^2+(y+3)^2=4.$$

(¡Observen cuidadosamente la cancelación de los signos menos!) Así, la gráfica de esta ecuación es el círculo de radio 2 y centro $(-1,-3)$.

> *En general, sean a y b dos números y r un número >0. Entonces el círculo de radio r y centro (a,b) es la gráfica de la ecuación*
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Podemos poner

$$x'=x-a \quad \text{y} \quad y'=y-b,$$

por lo que, en términos de las nuevas coordenadas x', y', la ecuación del círculo es

$$x'^2+y'^2=r^2.$$

Completar el cuadrado

Ejemplo. Supongamos que se da la ecuación

$$x^2+y^2+2x-3y-5=0,$$

donde x^2 y y^2 tienen el mismo coeficiente 1. Deseamos ver si ésta es la ecuación de un círculo, para lo cual usamos el método de **completar el cuadrado**, que repasamos ahora.

Queremos que la ecuación sea de la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

porque así sabríamos inmediatamente que representa un círculo con centro en (a,b) y de radio r. Por ello, necesitamos que x^2+2x sea el primero de los dos términos del desarrollo

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2.$$

De manera análoga, necesitamos que y^2-3y sea el primero de los dos términos del desarrollo

$$(y-b)^2=y^2-2by+b^2.$$

Esto significa que $a=-1$ y $b=3/2$. Entonces,

$$x^2+2x+y^2-3y-5=(x+1)^2-1+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-5.$$

Así, $x^2+y^2+2x-3y-5=0$ es equivalente a

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=5+1+\frac{9}{4}=\frac{33}{4}.$$

En consecuencia, nuestra ecuación dada es la ecuación de un círculo de radio $\sqrt{33/4}$, con centro en $(-1,3/2)$.

II, §6. EJERCICIOS

Esbozar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

1. (a) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ (b) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
   (c) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ (d) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$
2. (a) $x^2+(y-1)^2=9$ (b) $x^2+(y-1)^2=4$
   (c) $x^2+(y-1)^2=25$ (d) $x^2+(y-1)^2=1$
3. (a) $(x+1)^2+y^2=1$ (b) $(x+1)^2+y^2=4$
   (c) $(x+1)^2+y^2=9$ (d) $(x+1)^2+y^2=25$
4. $x^2+y^2-2x+3y-10=0$
5. $x^2+y^2+2x-3y-15=0$
6. $x^2+y^2+x-2y=16$
7. $x^2+y^2-x+2y=25$

II, §7. DILATACIONES Y LA ELIPSE

Dilataciones

Antes de estudiar la elipse queremos hacer algunas observaciones acerca de "estiramientos" o, para usar una palabra más adecuada, dilataciones.

Sea (x,y) un punto en el plano. Entonces $(2x,2y)$ es el punto obtenido al estirar sus dos coordenadas en un factor de 2, como se ilustra en la figura 1, donde también hemos trazado $(3x,3y)$ y $(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$.

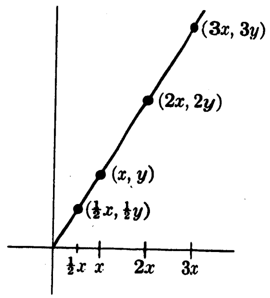


Figura 1

Definición. En general, si $c>0$ es un número positivo, a (cx,cy) le llamamos **dilatación** de (x,y) en un factor c.

Ejemplo. Sea

$$u^2+v^2=1$$

la ecuación del círculo de radio 1. Pongamos

$$x = cu \quad \text{y} \quad y = cv.$$

Entonces,

$$u = x/c \quad \text{y} \quad v = y/c.$$

Por lo tanto, x y y satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

o, de manera equivalente,

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

El conjunto de puntos (u, v) que satisfacen esta ecuación es el círculo de radio c. Así, podemos decir:

La dilatación del círculo de radio 1 *en un factor de* $c > 0$ *es el círculo de radio* c.

Esto se ilustra en la figura 2 con $c = 3$.

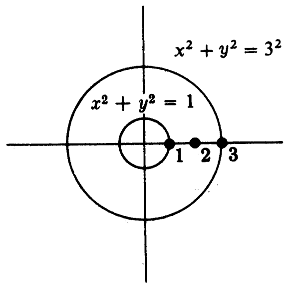


Figura 2

La elipse

No hay razón alguna por la cual debamos dilatar la primera y la segunda coordenadas en el mismo factor; podemos usar factores diferentes. Por ejemplo, si ponemos

$$x = 2u \quad \text{y} \quad y = 3v$$

estamos dilatando la primera coordenada en un factor de 2, y estamos dilatando la segunda coordenada en un factor de 3. En ese caso, supongamos que (u, v) es un punto sobre el círculo de radio 1; en otras palabras, digamos que se tiene

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Entonces, (x, y) satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Interpretamos esto como la ecuación de un "círculo estirado," como se muestra en la figura 3.

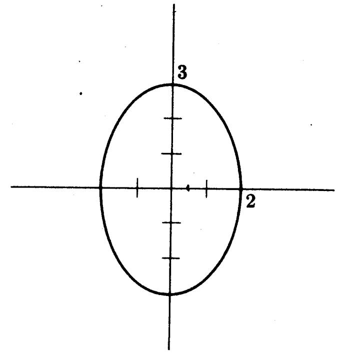


Figura 3

De manera más general, sean a y b números > 0. Pongamos

$$x = au \quad \text{y} \quad y = bv.$$

Si (u, v) satisface

$$(*) \qquad u^2 + v^2 = 1,$$

entonces (x, y) satisface

$$(**) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Recíprocamente, podemos poner $u = x/a$ y $v = y/b$ para ver si los puntos que satisfacen la ecuación $(*)$ corresponden a los puntos de $(**)$ bajo esta transformación, y viceversa.

Definición. Una **elipse** es el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación $(**)$ en algún sistema coordenado del plano. Acabamos de ver que una elipse es un círculo dilatado, mediante una dilatación en factores a, $b > 0$ en las primera y segunda coordenadas, respectivamente.

Ejemplo. Esbozar la gráfica de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Esta elipse es un círculo dilatado en factores de 2 y 5, respectivamente. Noten que,

$$\text{cuando } x = 0, \text{ tenemos } \frac{y^2}{25} = 1, \text{ de modo que } y^2 = 25 \text{ y } y = \pm 5.$$

Además,

cuando $y = 0$, tenemos $\dfrac{x^2}{4} = 1$, de modo que $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

Por lo tanto, la gráfica de la elipse se ve como en la figura 4.

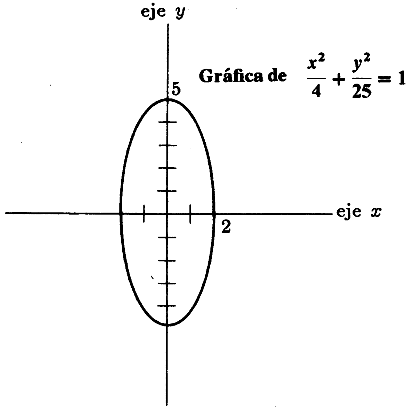


Figura 4

Ejemplo. Trazar la gráfica de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

En este caso, pongamos

$$x' = x - 1 \quad \text{y} \quad y' = y + 2.$$

Sabemos que en las coordenadas (u, v)

$$u^2 + v^2 = 1$$

es la ecuación de un círculo con centro $(1, -2)$ y radio 1. A continuación ponemos

$$u = \frac{x'}{5} \quad \text{y} \quad v = \frac{y'}{2}.$$

La ecuación original es de la forma

$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1,$$

que puede escribirse en términos de u y v como

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Así, nuestra elipse se obtiene del círculo $u^2 + v^2 = 1$ mediante la dilatación

$$u = x'/5 \quad \text{y} \quad v = y'/2,$$

o, de manera equivalente,

$$x' = 5u \quad \text{y} \quad y' = 2v.$$

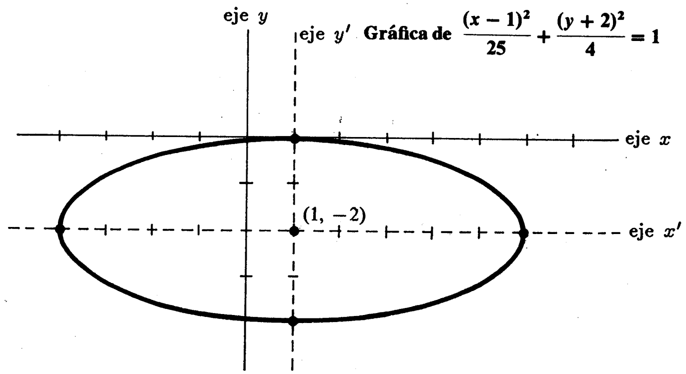
La manera más fácil de esbozar su gráfica es dibujar el nuevo sistema de coordenadas con coordenadas x', y'. Para hallar los cruces de la elipse con estos nuevos ejes, vemos que cuando $y' = 0$, entonces

$$\frac{x'^2}{5^2} = 1, \qquad \text{de modo que} \qquad x' = \pm 5.$$

Del mismo modo, cuando $x' = 0$, entonces

$$\frac{y'^2}{2^2} = 1, \qquad \text{de modo que} \qquad y' = \pm 2.$$

La gráfica se ve como sigue:



II, §7. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las curvas siguientes.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
3. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
4. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
5. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$
6. $4x^2 + 25y^2 = 100$
7. $\dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$
8. $25x^2 + 16y^2 = 400$
9. $(x-1)^2 + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

II, §8. LA PARÁBOLA

Una **parábola** es una curva que es la gráfica de una función

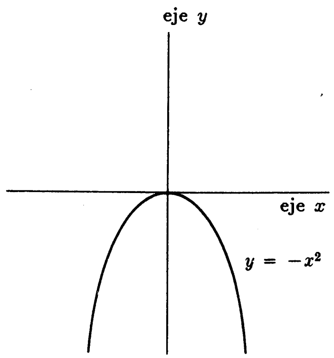
$$y = ax^2$$

en algún sistema coordenado, con $a \neq 0$.

Ejemplo. Ya sabemos cómo se ve la gráfica de la función $y = x^2$. Consideremos ahora

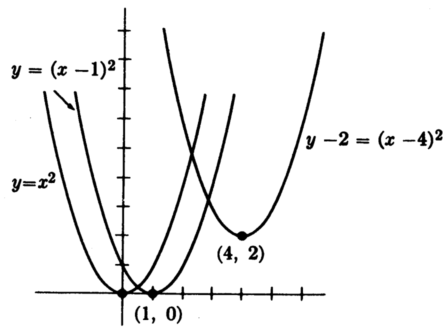
$$y = -x^2.$$

Por simetría se puede ver fácilmente que la gráfica es semejante a la de esta figura.



Si graficamos la ecuación $y = (x-1)^2$, notaremos que se ve exactamente igual, pero como si el origen estuviera colocado en el punto $(1, 0)$.

De manera análoga, la curva $y - 2 = (x-4)^2$ se ve de nuevo como $y = x^2$ excepto que toda la curva se ha movido como si el origen fuera el punto $(4, 2)$. En el siguiente diagrama se han trazado las gráficas de estas ecuaciones.



Podemos formalizar estas observaciones como sigue. Supongan que en nuestro

sistema de coordenadas dado escogemos un punto (a, b) como el nuevo origen. Ponemos las nuevas coordenadas $x' = x - a$ y $y' = y - b$. Así, cuando $x = a$, tenemos $x' = 0$, y cuando $y = b$, tenemos $y' = 0$. Si tenemos una curva

$$y' = x'^2$$

en el nuevo sistema coordenado cuyo origen está en el punto (a, b), entonces se produce la ecuación

$$(y - b) = (x - a)^2$$

en términos del sistema de coordenadas antiguo. Este tipo de curva se conoce como **parábola**.

Podemos aplicar la misma técnica de completar el cuadrado que usamos para el círculo.

Ejemplo. ¿Cuál es la gráfica de la ecuación

$$2y - x^2 - 4x + 6 = 0?$$

Completando el cuadrado, podemos escribir

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4.$$

Así, nuestra ecuación se puede reescribir como

$$2y = (x+2)^2 - 10$$

o

$$2(y+5) = (x+2)^2.$$

Ahora escogemos un nuevo sistema de coordenadas

$$x' = x + 2 \qquad \text{y} \qquad y' = y + 5$$

de modo que nuestra ecuación se vuelve

$$2y' = x'^2 \qquad \text{o} \qquad y' = \tfrac{1}{2}x'^2.$$

Ésta es una función cuya gráfica ya conocen; su elaboración queda como ejercicio.

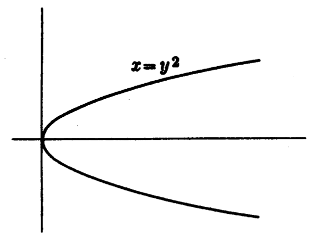
Observemos que, si tenemos una ecuación

$$x - y^2 = 0$$

o

$$x = y^2,$$

obtendremos una parábola inclinada horizontalmente.



Podemos aplicar ahora la técnica de cambiar el sistema coordenado para ver cómo es la gráfica de una ecuación más general.

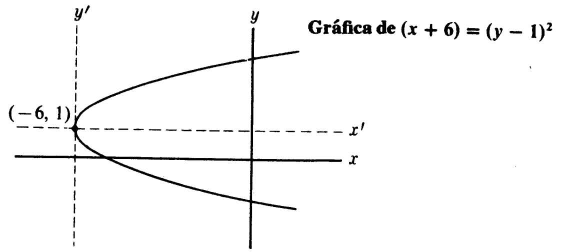
Ejemplo. Trazar la gráfica de

$$x - y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$(x + 6) = (y - 1)^2$$

y, por lo tanto, su gráfica se ve así:



Supongan que nos dan la ecuación de una parábola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$. Deseamos determinar dónde interseca esta parábola al eje x. Éstos son los valores para los cuales $f(x) = 0$ y se llaman **raíces** de f. En la secundaria se muestra que las raíces de f están dadas por la **fórmula cuadrática**:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Deben leer esta fórmula en voz alta tantas veces como sea necesario para que la memoricen, igual que las tablas de multiplicar. *Deberá usarse automáticamente*, sin mayor razonamiento, para hallar las raíces de una ecuación cuadrática.

Ejemplo. Queremos hallar las raíces de la ecuación

$$-2x^2 + 5x - 1 = 0.$$

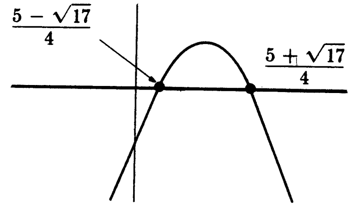
Las raíces son

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2(-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Así, las dos raíces son

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{5 - \sqrt{17}}{4}.$$

Éstos son los dos puntos donde la parábola $y = -2x^2 + 5x - 1$ cruza al eje x, y su gráfica se muestra en la figura.



Demostración de la fórmula cuadrática. Daremos ahora la demostración de la fórmula cuadrática para convencerlos de que es cierta. Con este fin, queremos resolver

$$(*) \qquad \boxed{ax^2 + bx + c = 0.}$$

Como suponemos que $a \neq 0$, esto equivale a resolver la ecuación

$$(**) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

obtenida al dividir entre a. Recordemos la fórmula

$$(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2.$$

Queremos hallar t de modo que $x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x$ tenga la forma $x^2 + 2tx$. Esto significa que tenemos

$$\frac{b}{a} = 2t, \qquad \text{esto es} \qquad t = \frac{b}{2a}.$$

Sumamos ahora $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación $(**)$, y obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Esto se puede reescribir en la forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

o, de manera equivalente,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Al sacar raíz cuadrada tenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

lo cual prueba la fórmula cuadrática.

Observación. Puede suceder que $b^2 - 4ac < 0$, en cuyo caso la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

Ejemplo. Hallar las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

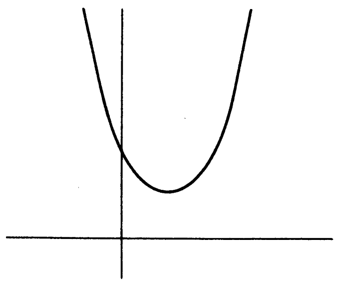
Las raíces son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4-12}}{6}.$$

Como $4 - 12 = -8 < 0$, la ecuación no tiene raíces en los números reales. La ecuación

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

es la ecuación de una parábola cuya gráfica se ve como en la figura. La gráfica no cruza el eje x.



El estudio de la fórmula cuadrática en esta sección ilustra algunos principios pedagógicos generales acerca de la relación entre la memorización rutinaria y el papel de las demostraciones al aprender matemáticas.

1. Deben memorizar de oído la fórmula cuadrática:

x es igual a menos b más menos la raíz cuadrada de b cuadrado menos $4ac$ sobre $2a$

como si memorizaran un poema, repitiéndolo en voz alta. Dicha memorización es necesaria para ciertas cuestiones de matemáticas básicas, a fin de inducir la obtención de la respuesta correcta como un reflejo condicionado, sin perder tiempo.

2. Independientemente de usar la fórmula como reflejo condicionado, deberán ver la demostración completando el cuadrado. Aprender a manejar la lógica y el idioma español para establecer teoremas también es parte de las matemáticas. Además, la técnica de completar los cuadrados surge a menudo en el contexto de graficar círculos, elipses, parábolas y además, en la fórmula cuadrática. Saber la fórmula como reflejo condicionado y conocer la demostración son dos funciones complementarias diferentes en el entrenamiento matemático, ninguna de las cuales excluye a la otra.

II, §8. EJERCICIOS

Trazar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

1. $y = -x + 2$
2. $y = 2x^2 + x - 3$
3. $x - 4y^2 = 0$
4. $x - y^2 + y + 1 = 0$

Completar el cuadrado en las siguientes ecuaciones y cambiar el sistema de coordenadas para ponerlas en la forma

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad \text{o} \quad y' = cx'^2 \quad \text{o} \quad x' = cy'^2$$

para cierta constante c.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$
8. $y - 2x^2 - x + 3 = 0$
9. $y - x^2 - 4x - 5 = 0$
10. $y - x^2 + 2x + 3 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$
12. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -3$
13. $x - 2y^2 - y + 3 = 0$
14. $x - y^2 - 4y = 5$

II, §9. LA HIPÉRBOLA

Ya sabemos cómo se ve la gráfica de la ecuación

$$xy = 1 \quad \text{o} \quad y = 1/x.$$

Es evidente que es igual a la gráfica de la función

$$f(x) = 1/x$$

(definida para $x \neq 0$). Si escogemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el punto (a, b), la ecuación

$$y - b = \frac{1}{x - a}$$

se conoce como **hipérbola**. En términos del nuevo sistema de coordenadas

$$x' = x - a$$

y $y' = y - b$, nuestra hipérbola tiene el antiguo tipo de ecuación

$$x'y' = 1.$$

Si nos dan una ecuación como

$$xy - 2x + 3y = 1$$

queremos poner esta ecuación en la forma

$$(x - a)(y - b) = c,$$

o expandiendo,

$$xy - ay - bx + ab = c.$$

Esto nos dice cómo deben ser a y b. Así

$$xy - 2x + 3y = (x+3)(y-2) + 6.$$

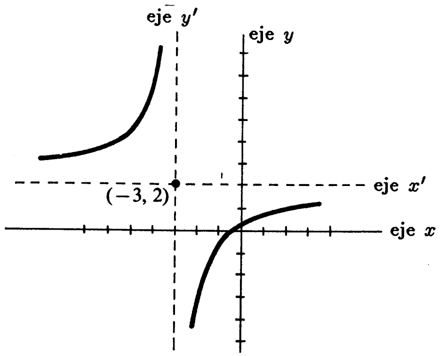
Por lo tanto $xy - 2x + 3y = 1$ es equivalente a

$$(x+3)(y-2) + 6 = 1$$

o, en otras palabras,

$$(x+3)(y-2) = -5.$$

La gráfica de esta ecuación se ha trazado en el siguiente diagrama.

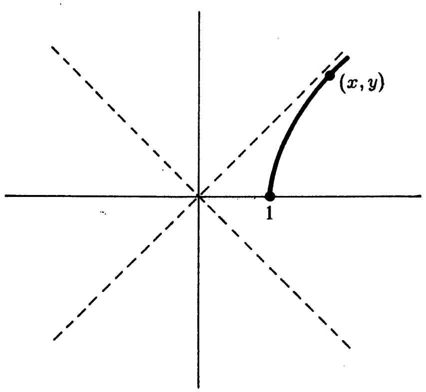


Hay otra forma para la hipérbola. Tratemos de graficar la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si despejamos y obtenemos

$$y^2 = x^2 - 1$$



de modo que

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

La gráfica es simétrica porque, si (x, y) es un punto sobre la gráfica, resulta que $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$ son también puntos sobre la gráfica. En efecto, veamos la gráfica en el primer cuadrante cuando $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Como $x^2 - 1 = y^2$, se sigue que $x^2 - 1 \geq 0$, de modo que $x^2 \geq 1$. Por ello la gráfica existe sólo para $x \geq 1$. Afirmamos que en el primer cuadrante se ve como en la figura de la página anterior. Para corroborarlo podemos, claro está, construir primero una tabla con unos cuantos valores para ver de manera experimental la apariencia de la gráfica. Háganlo. Aquí la describiremos teóricamente

A medida que crece x, la expresión $x^2 - 1$ crece, de modo que $\sqrt{x^2 - 1}$ crece también y lo mismo sucede con y.

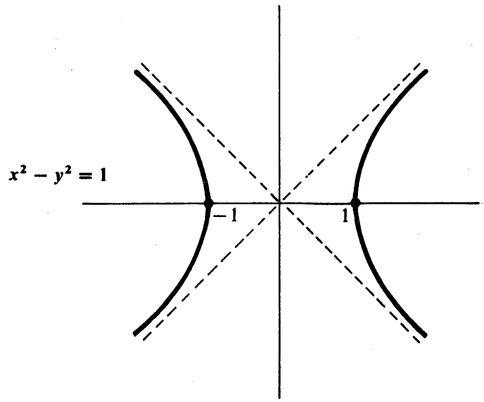
Además, como $y^2 = x^2 - 1$, se sigue que $y^2 < x^2$, de modo que $y < x$ para x, y en el primer cuadrante. Hemos trazado la recta $y = x$. El conjunto de puntos con $y < x$ se encuentra debajo de esta recta en el primer cuadrante.

Dividamos la ecuación $y^2 = x^2 - 1$ entre x^2. Obtenemos

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Cuando x se vuelve grande, sucede que

$$1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{tiende a} \quad 1.$$



La razón y/x es la pendiente de la recta que va del origen al punto (x, y). Por lo tanto, esta pendiente tiende a 1 cuando x se vuelve grande. Además, de la expresión

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

vemos que cuando x es grande, $x^2 - 1$ es casi igual a x^2 y, por ende, su raíz cuadrada será casi igual a x. Con esto la gráfica de la hipérbola se acerca más y más a la gráfica de la recta $y = x$. Esto justifica que hayamos dibujado la gráfica de esa manera.

Finalmente, por simetría, toda la gráfica de la hipérbola se ve como la figura anterior. Ésta se obtiene al reflejar la gráfica del primer cuadrante sobre el eje x y sobre el eje y, y también reflejando la gráfica respecto al origen.

II, §9. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las curvas siguientes:

1. $(x-1)(y-2) = 2$
2. $x(y+1) = 3$
3. $xy - 4 = 0$
4. $y = \dfrac{2}{1-x}$
5. $y = \dfrac{1}{x+1}$
6. $(x+2)(y-1) = 1$
7. $(x-1)(y-1) = 1$
8. $(x-1)(y-1) = 1$
9. $y = \dfrac{1}{x-2} + 4$
10. $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$
11. $y = \dfrac{4x-7}{x-2}$
12. $y = \dfrac{-2x-1}{x+1}$
13. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
15. Graficar la ecuación $y^2 - x^2 = 1$.
16. Graficar la ecuación $(y-1)^2 - (x-2)^2 = 1$.
17. Graficar la ecuación $(y+1)^2 - (x-2)^2 = 1$.

Parte dos

Diferenciación y funciones elementales

En esta parte aprenderemos a diferenciar. Geométricamente hablando esto equivale a hallar la pendiente de una curva, o su razón de cambio. Analizaremos sistemáticamente las técnicas para hacerlo y la manera en que se aplican a las funciones elementales: polinomios, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas y exponenciales y funciones inversas.

Una de las razones por las que diferimos la integración para después de esta sección es que las técnicas de integración dependen, hasta cierto punto, de nuestro conocimiento de las derivadas de ciertas funciones, pues una de las propiedades de la integración radica en ser la operación inversa a la diferenciación.

En los capítulos III, §9, IV, §4 y VII, §4, hallarán que los problemas de razones aplicados son semejantes entre sí pero con diferentes tipos de funciones. Éste es un ejemplo de cómo se hilvana de manera coherente la misma idea a lo largo de la parte de diferenciación.