CAPÍTULO III

La derivada

Los dos conceptos fundamentales en este curso son los de derivada e integral. En este capítulo nos ocuparemos del primero.

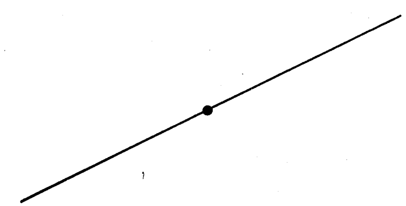
La derivada nos dará la pendiente de una curva en un punto. También tiene aplicaciones en física, donde puede interpretarse como razón de cambio.

Desarrollaremos algunas técnicas básicas que permitirán calcular la derivada en todas las situaciones comunes que probablemente encuentren en la práctica.

III, §1. LA PENDIENTE DE UNA CURVA

Consideremos una curva y tomemos un punto P sobre la curva. Queremos definir los conceptos de pendiente de la curva en un punto y de recta tangente a la curva en ese punto. Suele decirse que la tangente a la curva en el punto es la recta que toca la curva en un solo punto. Esto no tiene sentido, y las figuras subsecuentes los convencerán.

Consideren una recta



¿No quieren que la recta sea tangente a sí misma? ¿Sí? Pues esto contradice flagrantemente que la tangente es la recta que toca a la curva en un solo punto, pues la recta se toca a sí misma en todos sus puntos.

En las figuras 1, 2 y 3 vemos la recta tangente a la curva en el punto P. En la figura 1 la recta corta a la curva en otro punto Q. En la figura 2, la recta es tangente a la curva también en el punto Q. En la figura 3, la recta horizontal es tangente a la curva y "corta" la curva. La recta vertical y la inclinada intersecan la curva en un solo punto, pero no son tangentes.

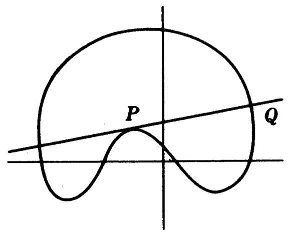


Figura 1

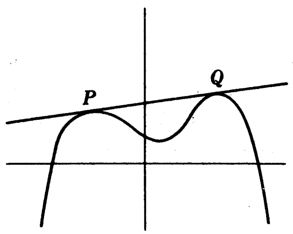


Figura 2

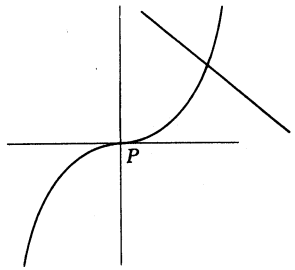


Figura 3

Observen, además, que no pueden esquivar las dificultades al querer distinguir una recta que "corte a la curva" de una que "toque a la curva," o diciendo que la recta debe estar a un lado de la curva (vean la figura 1).

Por lo tanto tenemos que dejar de lado la idea de tocar la curva en un solo punto y buscar otra idea.

Enfrentamos dos problemas. Uno es dar la idea geométrica correcta que nos permita definir la tangente a la curva, y el otro es comprobar que esta idea nos permite calcular de manera efectiva esta recta tangente cuando la curva está dada por una simple ecuación con coeficientes numéricos. Es una cuestión admirable que la solución al primer problema proporcione, de hecho, una solución al segundo.

En el capítulo II vimos que si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la recta, podemos determinar la ecuación de la recta. Por ello definiremos la pendiente de una curva en un punto y después obtendremos su

tangente mediante el método del capítulo II.

Nuestros ejemplos muestran que para definir la pendiente de la curva en P no debemos considerar lo que suceda en un punto Q alejado de P. Lo importante es lo que sucede cerca de P.

Así pues, tomemos cualquier punto Q sobre la curva dada $y = f(x)$, y supongamos que $Q \neq P$. Entonces los dos puntos P, Q determinan una recta con cierta pendiente que depende de P y de Q y que escribiremos como $S(P, Q)$. Supongan que el punto Q se acerca al punto P sobre la curva (pero se mantiene distinto de P). Entonces, conforme Q se acerca a P, la pendiente $S(P, Q)$ de la recta que pasa por P y Q deberá acercarse a la pendiente (desconocida) de la recta tangente (desconocida) a la curva en P. En el diagrama siguiente hemos dibujado la recta tangente a la curva en P y dos rectas entre P y otro punto

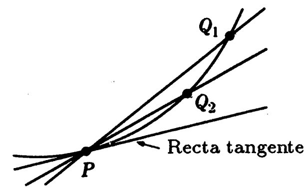


Figura 4

sobre la curva cercano a P (figura 4). El punto Q_2 está más cerca de P sobre la curva, por lo cual la pendiente de la recta entre P y Q_2 está más cerca de la pendiente de la recta tangente que la pendiente de la recta entre P y Q_1.

Si existe el límite de la pendiente $S(P, Q)$ cuando Q tiende a P, entonces deberá considerarse como la pendiente de la propia curva en P. Ésta es la idea básica de nuestra definición de pendiente de la curva en P. La tomamos como definición, quizá la definición más importante en este libro. Repitiendo:

Definición. Dada una curva $y = f(x)$, sea P un punto sobre la curva. La **pendiente** de la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q tiende a P.

La idea de definir la pendiente de esta manera fue descubierta en el siglo XVII por Newton y Leibnitz. Veremos que esta definición nos permite determinar la pendiente de manera efectiva en la práctica.

Primero observamos que, cuando $y = ax + b$ es una recta, la pendiente de la recta entre cualesquiera dos puntos distintos sobre la curva es siempre la misma, y es la pendiente de la recta conforme la definimos en el capítulo anterior.

Ejemplo. Veamos ahora el siguiente ejemplo sencillo,

$$y = f(x) = x^2.$$

Deseamos determinar la pendiente de esta curva en el punto $(1, 1)$.

Tomemos un punto cercano a $(1, 1)$, por ejemplo un punto cuya abscisa sea 1.1. Entonces $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$. Así el punto $(1.1, 1.21)$ está sobre la curva. La pendiente de la recta entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por consiguiente, la pendiente de la recta entre $(1,1)$ y $(1.1, 1.21)$ es

$$\frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1.$$

En general, la abscisa de un punto cercano a $(1,1)$ se puede escribir como $1+h$ donde h es algún número pequeño, positivo o negativo, pero $h \neq 0$. Tenemos

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2.$$

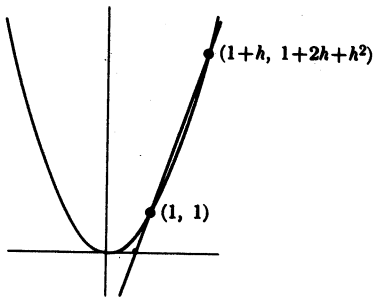


Figura 5

Así el punto $(1+h, 1+2h+h^2)$ está sobre la curva. Cuando h es positivo, la recta entre nuestros dos puntos se vería como en la figura 5. Cuando h es negativo, entonces $1+h$ es menor que 1 y la recta se vería así:

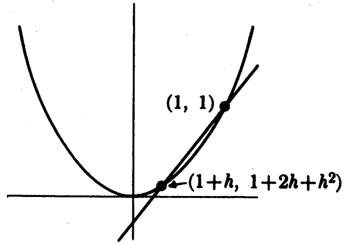


Figura 6

Por ejemplo, h podría ser -0.1 y $1 + h = 0.9$.

Por tal motivo, la pendiente de la recta entre nuestros dos puntos es el cociente

$$\frac{(1+2h+h^2) - 1}{(1+h) - 1},$$

que es igual a

$$\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

A medida que el punto cuya abscisa es $1+h$ tiende a nuestro punto $(1,1)$, el número h tiende a 0. Conforme h tiende a 0, la pendiente de la recta entre nuestros dos puntos tiende a 2, de modo que es, por definición, la pendiente de la curva en el punto $(1,1)$.

¡Podrán apreciar lo sencillo que resultan los cálculos y lo fácil que fue obtener esta pendiente!

Tomemos otro ejemplo. Deseamos hallar la pendiente de la misma curva $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$. De nuevo tomamos un punto cercano cuya abscisa sea $-2+h$ para h pequeño $\neq 0$. La ordenada de este punto cercano es

$$f(-2+h) = (-2+h)^2 = 4 - 4h + h^2.$$

La pendiente de la recta entre los dos puntos es, pues,

$$\frac{4 - 4h + h^2 - 4}{-2 + h - (-2)} = \frac{-4h + h^2}{h} = -4 + h.$$

Conforme h tiende a 0, el punto cercano tiende al punto $(-2, 4)$ y vemos que la pendiente tiende a -4.

III, §1. EJERCICIOS

Hallar las pendientes de las curvas siguientes en los puntos indicados:

1. $y = 2x^2$ en el punto $(1, 2)$
2. $y = x^2 + 1$ en el punto $(-1, 2)$
3. $y = 2x - 7$ en el punto $(2, -3)$
4. $y = x^3$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
5. $y = 1/x$ en el punto $(2, \frac{1}{2})$
6. $y = x^2 + 2x$ en el punto $(-1, -1)$
7. $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$
8. $y = x^2$ en el punto $(3, 9)$
9. $y = x^3$ en el punto $(1, 1)$
10. $y = x^3$ en el punto $(2, 8)$
11. $y = 2x + 3$ en el punto cuya abscisa es 2.
12. $y = 3x - 5$ en el punto cuya abscisa es 1.
13. $y = ax + b$ en un punto arbitrario.

(En los ejercicios 11, 12 y 13, usar el método de la h y verificar si este método da la misma respuesta para la pendiente que la expuesta en el capítulo II, §3.)

III, §2. LA DERIVADA

Continuamos con la función $y = x^2$. En lugar de escoger un valor numérico definido para la abscisa de un punto, podríamos trabajar en un punto arbitrario sobre la curva. Sus coordenadas son, pues, (x, x^2). Escribimos la abscisa de un punto cercano, como $x + h$ para algún h pequeño, positivo o negativo, pero $h \neq 0$. La ordenada de este punto cercano es

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

Por lo tanto la pendiente de la recta entre ellos es

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{x + h - x} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h.\end{aligned}$$

Conforme h tiende a 0, $2x + h$ tiende a $2x$. En consecuencia, la pendiente de la curva $y = x^2$ en un punto arbitrario (x, y) es $2x$. En particular, cuando $x = 1$ la pendiente es 2 y cuando $x = -2$ la pendiente es -4, como lo hallamos antes mediante el cálculo explícito usando las abscisas particulares 1 y -2.

Sin embargo, esta vez hemos hallado una fórmula general que nos da la pendiente de cualquier punto de la curva. Así, cuando $x = 3$ la pendiente es 6 y cuando $x = -10$ la pendiente es -20.

El ejemplo que hemos resuelto nos brinda el procedimiento para tratar funciones más generales.

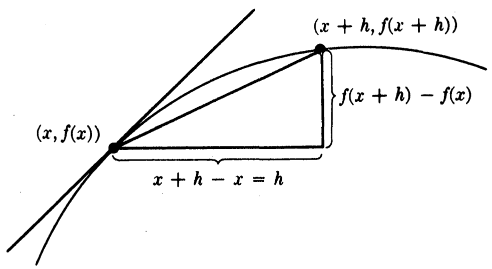
Dada una función $f(x)$, su **cociente de Newton** es

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Este cociente es la pendiente de la recta entre los puntos

$$(x, f(x)) \quad \text{y} \quad (x + h, f(x+h)),$$

como se ilustra en la figura.



Definición. Si el cociente de Newton tiende a un límite cuando h tiende a 0, entonces definimos la **derivada de** f **en** x como este límite, esto es

$$\boxed{\textbf{derivada de } f \textbf{ en } x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

La derivada de f en x se denotará de manera abreviada mediante una de las notaciones $f'(x)$, df/dx, o bien $df(x)/dx$. Entonces, por definición,

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Es por eso que las dos expresiones $f'(x)$ y df/dx significan lo mismo. Sin embargo queremos subrayar que en la expresión df/dx no multiplicamos f o x por d, ni dividimos df entre dx. La expresión se lee *como un todo*. Hallaremos más adelante que, en ciertas circunstancias, la expresión se comporta *como si* dividiéramos, razón por la cual adoptamos esta manera clásica de escribir la derivada.

La derivada puede verse entonces como una función f', definida en todos los números x tales que el cociente de Newton tienda a un límite cuando h tiende a 0. Observamos que al tomar el límite, tanto el numerador $f(x + h) - f(x)$ como el denominador h tienden a 0. No obstante, su cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tiende a la pendiente de la curva en el punto $(x, f(x))$.

Definición. La función f es **diferenciable** si tiene derivada en todos los puntos donde está definida.

Ejemplo 1. La función $f(x) = x^2$ es diferenciable y su derivada es $2x$. Así, en este caso tenemos

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x.$$

Hemos usado de manera sistemática la letra x, pero se puede usar cualquier otra letra: **La veracidad de los enunciados matemáticos es invariante bajo permutaciones del alfabeto.** Así por ejemplo, si $f(u) = u^2$, entonces

$$f'(u) = \frac{df}{du} = 2u.$$

Lo que es importante aquí es que debe aparecer *la misma letra* u en cada uno de estos lugares, y que la letra u sea diferente de la letra f.

Resolvamos algunos ejemplos antes de pasar a los ejercicios de esta sección.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 2x + 1$. Hallar la derivada $f'(x)$.

Formamos el cociente de Newton. Tenemos $f(x + h) = 2(x + h) + 1$. Así

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x + 2h + 1 - (2x + 1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Cuando h tiende a 0 (lo cual también se puede escribir como $h \to 0$), este cociente de Newton es igual a 2, y por lo tanto, el límite es 2. Así

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = 2$$

para todos los valores de x. La derivada es constante.

Ejemplo 3. Hallar la pendiente de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto cuya abscisa es 3, y hallar la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Asimismo, podemos hallar la pendiente en un punto arbitrario sobre la gráfica; ésta es la derivada $f'(x)$. Tenemos

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2(x^2 + 2xh + h^2).$$

El cociente de Newton es

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x^2+2xh+h^2)-2x^2}{h} \\ &= \frac{4xh+2h^2}{h} \\ &= 4x + 2h. \end{aligned}$$

Y por definición

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x.$$

Así $f'(x) = 4x$. En el punto $x = 3$ tenemos

$$f'(3) = 12,$$

que es la pendiente deseada.

Al igual que para la ecuación de la recta tangente, cuando $x = 3$ tenemos $f(3) = 18$. Por lo tanto debemos hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 18)$, con pendiente 12. Esto es fácil, y la ecuación es, a saber,

$$y - 18 = 12(x - 3).$$

Observación sobre la notación. En el ejemplo anterior tenemos

$$\frac{df}{dx} = 4x = f'(x).$$

Queremos la derivada cuando $x = 3$. Aquí vemos la ventaja de la notación $f'(x)$ en lugar de la notación df/dx. Podemos sustituir x por 3 en $f'(x)$ para escribir

$$f'(3) = 12.$$

No podemos sustituir x por 3 en la notación df/dx, pues escribir

$$\frac{df}{d3}$$

provocaría confusión. Si queremos usar la notación df/dx en dicho contexto, podemos valernos de un recurso como escribir

$$\frac{df}{dx} \quad \text{en } x = 3 \text{ es igual a } 12$$

o, en ocasiones,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} = 12.$$

Pero obviamente es mejor usar la notación $f'(x)$ en un contexto semejante.

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto cuya abscisa es -2.

En el ejemplo anterior calculamos la fórmula general para la pendiente de la recta tangente. Es

$$f'(x) = 4x.$$

Por lo tanto, la pendiente en el punto $x = -2$ es

$$f'(-2) = -8.$$

Por otro lado, $f(-2) = 8$, de manera que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 8 = -8(x + 2).$$

Ejemplo 5. Hallar la derivada de $f(x) = x^3$. Usamos el cociente de Newton, y escribimos primero su numerador:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Cuando h tiende a 0, el lado derecho tiende a $3x^2$, de modo que

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Al definir el cociente de Newton podemos considerar h positivo o negativo. A veces es conveniente, al tomar el límite, ver sólo los valores de h que son positivos. Entonces estaremos viendo solamente los puntos sobre la curva que tienden al punto dado, desde la derecha. De esta manera obtenemos lo que se llama **derivada por la derecha**. Si al tomar el límite del cociente de Newton tomáramos solamente valores negativos para h, obtendríamos la **derivada por la izquierda.**

Ejemplo 6. Sea $f(x) = |x|$. Hallar su derivada por la derecha y su derivada por la izquierda cuando $x = 0$.

La derivada por la derecha es el límite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Cuando $h > 0$, tenemos

$$f(0+h) = f(h) = h,$$

y $f(0) = 0$. Así

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Por lo tanto, el límite cuando $h \to 0$ y $h > 0$ es 1.

La derivada por la izquierda es el límite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Cuando $h < 0$ tenemos

$$f(0+h) = f(h) = -h.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

Por consiguiente, el límite cuando $h \to 0$ y $h < 0$ es -1.

Vemos que la derivada por la derecha en 0 es 1 y la derivada por la izquierda es -1. No son iguales. Esto se ilustra mediante la gráfica de nuestra función

$$f(x) = |x|,$$

que se ve como la representada en la figura 7.

Existen tanto la derivada por la derecha como la derivada por la izquierda, pero no son iguales.

Podemos reformular nuestra definición de la derivada y decir que la derivada de una función $f(x)$ se define cuando existen la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda y son iguales, en cuyo caso a este valor común se le llama simplemente **derivada.**

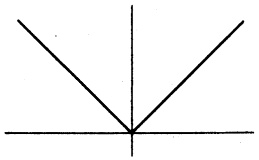


Figura 7

Así, la derivada de $f(x) = |x|$ no está definida en $x = 0$.

Ejemplo 7. Sea $f(x)$ igual a x si $0 < x \leq 1$ y a $x - 1$ si $1 < x \leq 2$. No definimos f para otros valores de x. Entonces la gráfica de f se ve como ésta:

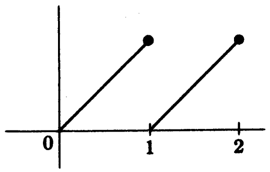


Figura 8

La derivada por la izquierda de f en 1 existe y es igual a 1, pero la derivada por la derecha de f en 1 no existe. Dejamos a los lectores la verificación de la primera afirmación. Para verificar la segunda, debemos ver si existe el límite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Como $1 + h > 1$, tenemos

$$f(1+h) = 1 + h - 1 = h.$$

Además, $f(1) = 1$, por lo que el cociente de Newton es

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Cuando h tiende a 0, el cociente $1/h$ no tiene límite, pues se vuelve arbitrariamente grande. Así, el cociente de Newton no tiene límite para $h > 0$ y la función no tiene derivada por la derecha cuando $x = 1$.

III, §2. EJERCICIOS

Hallar (a) las derivadas de las funciones siguientes, (b) la pendiente de la gráfica en el punto cuya abscisa es 2, y (c) la ecuación de la recta tangente en ese punto.

1. $x^2 + 1$
2. x^3
3. $2x^3$
4. $3x^2$
5. $x^2 - 5$
6. $2x^2 + x$
7. $2x^2 - 3x$
8. $\frac{1}{2}x^3 + 2x$
9. $\dfrac{1}{x+1}$
10. $\dfrac{2}{x+1}$

III, §3. LÍMITES

Al definir la pendiente de una curva en un punto, o la derivada, usamos el concepto de límite, que consideramos intuitivamente claro. En realidad lo es. Pueden ver en el Apéndice, al final de la parte cuatro, cómo podemos definir los límites usando solamente propiedades de números, pero no nos preocuparemos por ello aquí. Sin embargo haremos una lista de las propiedades de límites que serán usadas en lo que resta del libro, sólo para estar seguros de lo que suponemos acerca de ellos, y también daremos una técnica que permita calcular límites.

Consideremos funciones $F(h)$ definidas para todos los valores suficientemente pequeños de h, con excepción de $h = 0$. Escribimos

$$\boxed{\lim_{h \to 0} F(h) = L}$$

para expresar que $F(h)$ **tiende a** L **cuando** h **tiende a** 0.

Primero notamos que si F es una función constante, $F(x) = c$ para todo x, entonces

$$\lim_{h\to 0} F(h) = c$$

es la constante misma.

Si $F(h) = h$, entonces

$$\lim_{h\to 0} F(h) = 0.$$

Las siguientes propiedades relacionan los límites con la suma, resta, multiplicación, división y desigualdades.

Supongan que tenemos dos funciones, $F(x)$ y $G(x)$, que están definidas para los mismos números. Entonces podemos formar la suma de las dos funciones $F + G$, cuyo valor en un punto x es $F(x) + G(x)$. Así, cuando $F(x) = x^4$ y $G(x) = 5x^{3/2}$, tenemos

$$F(x) + G(x) = x^4 + 5x^{3/2}.$$

El valor $F(x) + G(x)$ también se escribe $(F + G)(x)$. La primera propiedad de límites se refiere a la suma de dos funciones.

Propiedad 1. *Suponer que tenemos dos funciones F y G definidas para pequeños valores de h, y suponer que existen los límites*

$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$

Entonces existe

$$\lim_{h\to 0}[F(h) + G(h)]$$

y

$$\lim_{h\to 0}(F + G)(h) = \lim_{h\to 0} F(h) + \lim_{h\to 0} G(h).$$

En otras palabras, el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

Se cumple una afirmación análoga para la resta $F - G$, a saber

$$\lim_{h\to 0}\big(F(h) - G(h)\big) = \lim_{h\to 0} F(h) - \lim_{h\to 0} G(h).$$

Después de la suma estudiemos el producto. Supongamos que tenemos dos funciones F y G definidas para los mismos números. Entonces podemos formar su producto FG cuyo valor en un número x es

$$(FG)(x) = F(x)G(x).$$

Por ejemplo, si $F(x) = 2x^2 - 2^x$ y $G(x) = x^2 + 5x$, entonces el producto es

$$(FG)(x) = (2x^2 - 2^x)(x^2 + 5x).$$

Propiedad 2. *Sean F y G dos funciones definidas para valores pequeños de h, y supongamos que existen*

$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$

Entonces el límite del producto existe y tenemos

$$\lim_{h\to 0}(FG)(h) = \lim_{h\to 0}[F(h)G(h)]$$
$$= \lim_{h\to 0} F(h) \cdot \lim_{h\to 0} G(h).$$

En palabras, podemos decir que el producto de los límites es igual al límite del producto.

Como caso particular, supongamos que $F(x)$ es la función constante $F(x) = c$. Entonces podemos formar la función cG, producto de la constante por G, y tenemos

$$\lim_{h\to 0} cG(h) = c \cdot \lim_{h\to 0} G(h).$$

Ejemplo. Sea $F(h) = 3h + 5$. Entonces $\lim_{h\to 0} F(h) = 5$.

Ejemplo. Sea $F(h) = 4h^3 - 5h + 1$. Entonces $\lim_{h\to 0} F(h) = 1$. Podemos ver esto al considerar los límites

$$\lim_{h\to 0} 4h^3 = 0, \qquad \lim_{h\to 0} 5h = 0, \qquad \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

y tomando la suma apropiada.

Ejemplo. Tenemos que $\lim_{h\to 0} 3xh = 0$, y

$$\lim_{h\to 0}(3xh - 7y) = -7y.$$

En tercer lugar, consideremos los cocientes. Sean F y G como antes, pero supongan que $G(x) \neq 0$ para cualquier x. Entonces podemos formar la función cociente F/G cuyo valor en x es

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Ejemplo. Sean $F(x) = 2x^3 - 4x$ y $G(x) = x^4 + x^{1/3}$. Entonces

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{2x^3 - 4x}{x^4 + x^{1/3}}.$$

Propiedad 3. *Suponer que existen los límites*

$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} G(h)$$

y que

$$\lim_{h\to 0} G(h) \neq 0.$$

Entonces el límite del cociente existe y tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \frac{\lim F(h)}{\lim G(h)}.$$

En palabras, el cociente de los límites es igual al límite del cociente.

Como acabamos de hacerlo, a veces omitiremos escribir $h \to 0$ para simplificar.

La siguiente propiedad se enuncia aquí para completar el tema. No se usará hasta que hallemos la derivada del seno y del coseno y, en consecuencia, puede verse hasta entonces.

Propiedad 4. *Sean F y G dos funciones definidas para valores pequeños de h; supongamos que $G(h) \leq F(h)$, y además que existen*

$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad y \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} G(h) \leq \lim_{h\to 0} F(h).$$

Propiedad 5. *Sean las mismas hipótesis que en la propiedad 4 y además, supongamos que*

$$\lim_{h\to 0} G(h) = \lim_{h\to 0} F(h).$$

Sea E otra función definida para los mismos números que F y G, tal que

$$G(h) \leq E(h) \leq F(h)$$

para todos los valores pequeños de h. Entonces,

$$\lim_{h\to 0} E(h)$$

existe y es igual a los límites de F y G.

La propiedad 5 se conoce como **proceso de compresión**. A todo lo largo del libro encontrarán muchas aplicaciones de esto.

Ejemplo. Hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{2xh+3}{x^2-4h}$$

cuando $x \neq 0$.

El numerador de nuestro cociente tiende a 3 cuando $h \to 0$ y el denominador tiende a x^2. Así el cociente tiende a $3/x^2$. Podemos justificar estos pasos de manera más formal al aplicar nuestras tres propiedades. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(2xh+3) &= \lim_{h\to 0}(2xh) + \lim_{h\to 0} 3 \\ &= \lim(2x)\lim(h) + \lim 3 \\ &= 2x\cdot 0 + 3 \\ &= 3.\end{aligned}$$

Para el denominador tenemos

$$\begin{aligned}\lim(x^2-4h) &= \lim x^2 + \lim(-4h) \\ &= x^2 + \lim(-4)\lim(h) \\ &= x^2 + (-4)\cdot 0 \\ &= x^2.\end{aligned}$$

Usando la regla para el cociente, vemos que el límite deseado es igual a $3/x^2$.

Ejemplo. En los ejemplos anteriores resultó que pudimos sustituir el valor 0 por h y hallar el límite apropiado. Esto no se puede hacer en general. Por ejemplo, suponer que queremos hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-h}{h^3+2h}.$$

Si sustituimos $h = 0$ obtenemos la expresión sin sentido 0/0 y, por lo tanto, no obtenemos información acerca del límite. Sin embargo, para $h \neq 0$ podemos cancelar h del cociente y ver que

$$\frac{h^2-h}{h^3+2h} = \frac{h(h-1)}{h(h^2+2)} = \frac{h-1}{h^2+2}.$$

Podemos determinar el límite a partir de la expresión de la derecha. En efecto, $h-1$ tiende a -1 conforme h tiende a 0. Además h^2+2 tiende a 2 conforme h tiende a 0. De ahí que, por la regla para cocientes de límites, concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-h}{h^3+2h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-1}{h^2+2} = \frac{-1}{2}.$$

Observar que, en este ejemplo, tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0. Sin embargo, el límite existe y vemos que es $-\frac{1}{2}$.

Ejemplo. Hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2h^3-h^2}{3xh-h}.$$

En este caso podemos factorizar h del numerador y del denominador de modo que el cociente sea igual a

$$\frac{x^2h^2-h}{3x-1}.$$

Ahora se ve que el numerador tiende a 0 y que el denominador tiende a $3x-1$ cuando h tiende a 0. Por lo tanto, el cociente tiende a 0. Éste es el límite deseado.

Las propiedades de los límites recién enunciadas permitirán calcular límites para determinar derivadas. Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Hallar la derivada df/dx. El cociente de Newton es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{x-(x+h)}{(x+h)xh} \\ &= \frac{-h}{(x+h)xh} = \frac{-1}{(x+h)x}.\end{aligned}$$

Entonces tomamos el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x}$$

$$= \frac{-1}{\lim(x+h)x}$$

(por la regla para el límite de un cociente)

$$= \frac{-1}{x^2}.$$

Así hemos probado que:

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.}$$

III, §3. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las siguientes funciones, justificando los pasos al tomar los límites mediante las tres primeras propiedades:

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
4. $f(x) = x(x+1)$
5. $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$
6. $f(x) = 3x^3$
7. $f(x) = x^4$
8. $f(x) = x^5$

(Es particularmente importante que resuelvan los ejercicios 7 y 8 para ver el patrón de desarrollo que se va a seguir en la sección siguiente.)

9. $f(x) = 2x^3$
10. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$
11. $2/x$
12. $3/x$
13. $\dfrac{1}{2x-3}$
14. $\dfrac{1}{3x+1}$
15. $\dfrac{1}{x+5}$
16. $\dfrac{1}{x-2}$
17. $1/x^2$
18. $1/(x+1)^2$

III, §4. POTENCIAS

Hemos visto que la derivada de la función x^2 es $2x$.

Consideremos la función $f(x) = x^3$ y hallemos su derivada. Tenemos

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Por lo tanto, el cociente de Newton es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \frac{3x^2h + h^2(3x+h)}{h} \quad \text{(después de las cancelaciones)}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 \quad \text{(después de cancelar } h\text{)}.$$

Usando las propiedades de límites de las sumas y productos vemos que $3x^2$ permanece igual a sí mismo cuando h tiende a 0, y que tanto $3xh$ como h^3 tienden a 0. Por ello,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2.$$

Esto sugiere que en general, cuando $f(x) = x^n$ para algún entero positivo n, la derivada $f'(x)$ debe ser nx^{n-1}. En efecto, así sucede, y se probará en el siguiente teorema. La demostración seguirá el mismo patrón del caso anterior en que $f(x) = x^3$. Convendría que, antes de ver el caso general, resolvieran en detalle el caso $f(x) = x^4$ y que también el caso $f(x) = x^5$ (que fueron ejercicios de la sección anterior) para confirmar que en estos casos particulares se sigue el mismo patrón. Noten que, cuando tratamos $f(x) = x^3$ obtuvimos una expresión para el cociente de Newton que tenía numerador

$$3x^2h + h^2(3x+h),$$

que incluía el término $3x^2h$, y otro término que incluía h^2 como factor. Cuando dividimos entre h, $3x^2$ da el valor de la derivada, y el término restante $h(3x+h)$ conserva a h como factor, por lo que tiende a 0 cuando h tiende a 0. Hallarán de manera explícita un fenómeno similar para x^4 y x^5.

Teorema 4.1. *Sea n un entero ≥ 1 y sea $f(x) = x^n$. Entonces*

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}.$$

Demostración. Tenemos

$$f(x+h) = (x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdots(x+h),$$

donde el producto se toma n veces. Al seleccionar x de cada factor resulta un término x^n. Si tomamos x de todos los factores excepto uno y h de los factores restantes, obtenemos hx^{n-1} considerado n veces. Esto nos da un término $nx^{n-1}h$. Todos los otros términos tendrán que seleccionar h al menos de dos factores, y los términos correspondientes serán divisibles entre h^2. Así obtenemos

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2 g(x,h),$$

donde $g(x,h)$ es simplemente alguna expresión que incluye potencias de x y h con coeficientes numéricos que, como veremos más adelante en la demostración, no se necesita determinar. Sin embargo, usando las reglas para los límites de sumas y productos podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0} g(x,h)$$

será algún número cuya determinación no es necesaria.

En esta forma el cociente de Newton es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2g(x,h) - x^n}{h}\\ &= \frac{nx^{n-1}h + h^2g(x,h)}{h} \qquad \text{(porque se cancela } x^n\text{)}\\ &= nx^{n-1} + hg(x,h) \qquad \text{(dividiendo entre } h \text{ el numerador y el denominador)}\end{aligned}$$

Cuando h tiende a 0, el término nx^{n-1} no cambia. El límite de h cuando h tiende a 0, es 0, de modo que por la regla del producto, el término $hg(x,h)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0. Así, finalmente

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1},$$

lo cual prueba nuestro teorema.

Para otra demostración, vean el final de la siguiente sección.

Teorema 4.2. *Sea a cualquier número y sea $f(x) = x^a$ (definida para $x > 0$). Entonces $f(x)$ tiene una derivada, que es*

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

No es difícil probar el teorema 4.2 cuando a es un entero negativo. Sin embargo, es mejor esperar hasta que tengamos una regla que nos dé la derivada de un cociente antes de hacerlo. También podríamos demostrarlo cuando a es un número racional. No obstante, probaremos el resultado general en un capítulo posterior, de modo que preferimos esperar hasta entonces, cuando dispongamos de más técnicas.

Ejemplos. Si $f(x) = x^{10}$, entonces $f'(x) = 10x^9$.
Si $f(x) = x^{3/2}$ (para $x > 0$), entonces $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$.
Si $f(x) = x^{-5/4}$, entonces $f'(x) = -\frac{5}{4}x^{-9/4}$.
Si $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, entonces $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Noten especialmente el caso particular en que $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$.

Ejemplo. Ahora ya podemos hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a ciertas curvas que antes no podíamos. Considerar la curva

$$y = x^5$$

Deseamos hallar la ecuación de su recta tangente en el punto $(2,32)$. Por el teorema 4.1, si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es

$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80.$$

Por otro lado, $f(2) = 2^5 = 32$. De aquí que la ecuación de la recta tangente sea

$$y - 32 = 80(x-2).$$

III, §4. EJERCICIOS

1. Escribir la expresión de $(x+h)^4$ en términos de potencias de x y h.
2. Hallar directamente la derivada de la función x^4 usando el cociente de Newton.
3. ¿Cuáles son las derivadas de las siguientes funciones?
   (a) $x^{2/3}$ (b) $x^{-3/2}$ (c) $x^{7/6}$
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^9$ en el punto $(1,1)$?
5. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = x^{2/3}$ en el punto $(8,4)$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?
6. Dar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^{-3/4}$ en el punto cuya abscisa es 16.
7. Dar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es 3.
8. Dar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   (a) $f(x) = x^{1/4}$ en $x = 5$ (b) $f(x) = x^{-1/4}$ en $x = 7$
   (c) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ en $x = 10$ (d) $f(x) = x^{\pi}$ en $x = 7$

III, §5. SUMAS, PRODUCTOS Y COCIENTES

En esta sección deduciremos varias reglas que permiten hallar las derivadas de sumas, productos y cocientes de funciones cuando se conoce la derivada de cada factor.

Comenzamos con la definición de funciones continuas y la razón de que una función diferenciable sea continua.

Definición. Se dice que una función es **continua en un punto** x si, y sólo si,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Se dice que una función es **continua** si es continua en todo punto de su dominio de definición.

Sea f una función con derivada $f'(x)$ en x. Entonces f es continua en x.

Demostración. El cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende al límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. Tenemos

$$h\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x+h)-f(x).$$

Por lo tanto, al usar la regla para el límite de un producto y notar que h tiende a 0, hallamos que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = 0f'(x) = 0.$$

Ésta es otra manera de enunciar que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

En otras palabras, f es continua.

Está claro que nunca podemos sustituir $h=0$ en nuestro cociente porque entonces se vuelve $0/0$, lo cual no tiene sentido. Geométricamente, hacer $h=0$ equivale a tomar los dos puntos sobre la curva iguales entre sí. Entonces es imposible tener una recta única que pase por un punto. Nuestro procedimiento de tomar el límite del cociente de Newton tiene sentido sólo si $h \neq 0$.

Observen que, en el cociente de Newton, tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Pese a ello, el cociente no necesariamente tiende a 0.

Ejemplo. Sea $f(x) = |x|$. Entonces la función valor absoluto f es continua en 0, aunque no sea diferenciable en 0. Es cierto aún que

$$f(0+h) = f(h) = |h|$$

tiende a 0 cuando h tiende a 0, aunque la función no sea diferenciable en 0. Como vimos en la sección §2, la función $f(x) = |x|$ es diferenciable por la derecha en 0 y es diferenciable por la izquierda en 0, pero no es diferenciable en 0.

Ejemplo. Sea $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. En la figura 9 se muestra la gráfica de f.

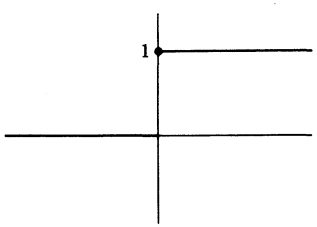


Figura 9

La función f no es continua en 0. En términos generales, la función no es continua en 0 porque su gráfica tiene un "salto" en 0. En la figura 10 se muestran otros ejemplos de gráficas con discontinuidades.

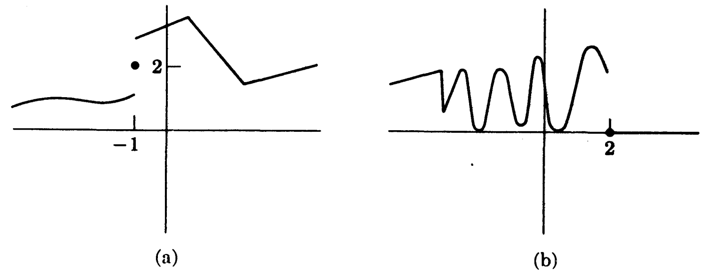


Figura 10

En la figura 10(a), la función es continua excepto en $x=-1$. En la figura 10(b), la función es continua excepto en $x=2$.

La observación que expresamos al principio de esta sección indica que si una función es diferenciable, entonces es continua. Como por ahora nos ocupamos principalmente de funciones diferenciables, no estudiaremos las funciones continuas con mayor profundidad, y esperaremos hasta después, cuando el concepto sea relevante para nuestro curso.

Sea c un número y $f(x)$ una función que tiene derivada $f'(x)$ para todos los valores de x donde está definida. Podemos multiplicar f por la constante c para obtener otra función cf cuyo valor en x es $cf(x)$.

Una constante por una función. *La derivada de cf está dada entonces por la fórmula*

$$(cf)'(x) = c\cdot f'(x).$$

En otras palabras, la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

En la otra notación, esto se lee

$$\boxed{\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}.}$$

Para probar esta regla usamos la definición de derivada. El cociente de Newton para la función cf es

$$\frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tomemos el límite cuando h tiende a 0. Entonces c permanece fijo y

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende a $f'(x)$. De acuerdo con la regla para el producto de los límites, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a $cf'(x)$, como se quería probar.

Ejemplo. Sea $f(x) = 3x^2$. Entonces $f'(x) = 6x$. Si $f(x) = 17x^{1/2}$, entonces $f'(x) = \frac{17}{2}x^{-1/2}$. Si $f(x) = 10x^a$, entonces $f'(x) = 10ax^{a-1}$.

A continuación veremos la suma de dos funciones.

Suma. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Entonces la suma $f(x) + g(x)$ tiene una derivada, y*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

En la otra notación se escribe:

$$\boxed{\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.}$$

Para probar esto tenemos que, por definición,

$$(f+g)(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$$

y

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Por lo tanto, el cociente de Newton para $f+g$ es

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}.$$

Agrupando términos y separando la fracción, vemos que esta expresión es igual a

$$\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Tomando el límite cuando h tiende a 0 y usando la regla para el límite de una suma, vemos que esta última suma tiende a $f'(x) + g'(x)$ cuando h tiende a 0. Esto prueba lo que queríamos.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = 3x^2 + 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(4x^{1/2} + 5x^{-10}) = 2x^{-1/2} - 50x^{-11}.$$

Llevados por el entusiasmo de poder determinar tan fácilmente la derivada de funciones construidas a partir de otras por medio de constantes y sumas, podríamos estar ahora tentados a enunciar la regla de que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Desafortunadamente esto es falso. Para ver que la regla es falsa, examinemos un ejemplo.

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Por lo tanto $f'(x)g'(x) = 2x$. Sin embargo, la derivada del producto $(fg)(x) = x^3$ es $3x^2$, que ciertamente no es igual a $2x$. Así, el producto de las derivadas no es igual a la derivada del producto.

La regla correcta se descubrió mediante ensayo y error, y se puede enunciar como sigue:

Producto. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces la función producto $f(x)g(x)$ tiene una derivada, que está dada por la fórmula*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

En palabras, la derivada del producto es igual a la primera por la derivada de la segunda, más la derivada de la primera por la segunda.

En la otra notación, esto se ve como sigue:

$$\boxed{\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g(x).}$$

La demostración no es mucho más difícil que las demostraciones que hemos encontrado hasta ahora. Por definición, tenemos

$$(fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h)$$

y

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

En consecuencia, el cociente de Newton para la función producto fg es

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.$$

A estas alturas quedan pocas esperanzas de transformar este cociente de modo que veamos fácilmente a qué límite tiende cuando h tiende a 0. Pero usamos un truco y reescribimos nuestro cociente insertando

$$-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)$$

en el numerador. Ciertamente esto no cambia el valor de nuestro cociente, que ahora se ve así:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos separar esta fracción en una suma de dos fracciones:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos factorizar $f(x+h)$ en el primer término y $g(x)$ en el segundo, para obtener

$$f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)f(x)}{h}g(x).$$

Ahora la situación está bajo control. Conforme h tiende a 0, $f(x+h)$ tiende a $f(x)$, y los dos cocientes en la expresión recién escrita tienden a $g'(x)$ y $f'(x)$ respectivamente. Así, el cociente de Newton de fg tiende a

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

lo cual prueba nuestra afirmación

Ejemplo. Aplicando la regla del producto hallamos:

$$\frac{d}{dx}(x+1)(3x^2) = (x+1)6x + 1\cdot 3x^2.$$

De manera análoga,

$$\frac{d}{dx}[(2x^5+5x^4)(2x^{1/2}+x^{-1})]$$
$$= (2x^5+5x^4)\left(x^{-1/2}-\frac{1}{x^2}\right) + (10x^4+20x^3)(2x^{1/2}+x^{-1})$$

lo cual pueden y deben dejar así, sin tratar de simplificar la expresión.

Un caso particular de la regla del producto que se usa muy a menudo, es el de la potencia de una función.

Ejemplo.

$$\boxed{\frac{d(f(x)^2)}{dx} = 2f(x)f'(x).}$$

En efecto, al diferenciar el producto $y = f(x)f(x)$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)f'(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x).$$

La última regla de esta sección trata de la derivada de un cociente. Comenzamos con un caso especial.

Sea $g(x)$ una función que tiene derivada $g'(x)$, y tal que $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $1/g(x)$ existe y es igual a

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-1}{g(x)^2}g'(x).}$$

Para probar esto vemos el cociente de Newton

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

lo cual es igual a

$$\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Al hacer que h tienda a 0 vemos inmediatamente que nuestra expresión tiende a

$$\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)$$

según se deseaba.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^5-3x)} = \frac{-1}{(x^5-3x)^2}(5x^4-3).$$

Se puede ahora enunciar y probar fácilmente el caso general de la regla para cocientes.

Cociente. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ respectivamente y tales que $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $f(x)/g(x)$ existe y es igual a*

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

En palabras esto es:

El de abajo por la derivada del de arriba, menos el de arriba por la derivada del de abajo, sobre el de abajo al cuadrado

(lo cual deberán memorizar como un poema).

En la otra notación esto se ve como:

$$\boxed{\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g(x)\,df/dx - f(x)\,dg/dx}{g(x)^2}.}$$

Para probar esta regla, escribimos nuestro cociente en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$$

y usamos la regla para la derivada de un producto, junto con el caso especial que acabamos de probar. Obtenemos su derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)$$
$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

colocando esta expresión sobre el denominador común $g(x)^2$. Ésta es la derivada deseada.

Resolvamos algunos ejercicios.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x^4-2x}\right) = \frac{(3x^4-2x)2x - (x^2+1)(12x^3-2)}{(3x^4-2x)^2}.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+4}\right) = \frac{(x+4)\cdot 2 - 2x\cdot 1}{(x+4)^2}.$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x/(x^2+4)$$

en el punto $x = -3$.

Hagamos $f(x) = x/(x^2+4)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}.$$

De aquí,

$$f'(-3) = \frac{13-18}{13^2} = \frac{-5}{169}.$$

Ésta es la pendiente en un punto dado. Más aún,

$$f(-3) = \frac{-3}{13}.$$

Por ello las coordenadas del punto dado son $(-3, -3/13)$. La ecuación de la recta tangente es entonces

$$y + \frac{3}{13} = \frac{-5}{169}(x+3).$$

Ejemplo. Mostrar que las dos curvas

$$y = x^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}$$

tienen una recta tangente común en el punto $(1, 2)$. Hacemos

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad y \qquad g(x) = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}.$$

Entonces

$$f'(x) = 2x \qquad y \qquad g'(x) = 2x^2.$$

Como $f'(1) = g'(1) = 2$, la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de f y a la gráfica de g es la misma en el punto $(1, 2)$. De ahí que las rectas tangentes sean la misma, pues pasan por el mismo punto, a saber

$$y - 2 = 2(x-1).$$

Apéndice. Otra demostración de que $dx^n/dx = nx^{n-1}$

Hay otra demostración de que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

para cualquier entero positivo n, como se verá enseguida. Primero notamos que cuando $n = 1$, hemos probado directamente que

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

usando el método de la h.

Ahora vamos a usar la regla para la derivada de un producto. Para obtener la derivada de x^2, tenemos:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x\cdot x)}{dx} = x\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx}x = 2x.$$

A continuación obtenemos la derivada de x^3:

$$\begin{aligned}\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{d(x^2\cdot x)}{dx} &= x^2\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx}x \\ &= x^2 + 2x^2 \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= 3x^2.\end{aligned}$$

Después obtenemos la derivada de x^4:

$$\begin{aligned}\frac{d(x^4)}{dx} = \frac{d(x^3\cdot x)}{dx} &= x^3\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^3)}{dx}x \\ &= x^3 + 3x^3 \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= 4x^3.\end{aligned}$$

Podemos proceder de este modo para cualquier entero n. Supongamos que hemos probado la fórmula hasta cierto entero n. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d(x^{n+1})}{dx} = \frac{d(x^n\cdot x)}{dx} &= x^n\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^n)}{dx}x \\ &= x^n + nx^n \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= (n+1)x^n.\end{aligned}$$

Esto muestra cómo se procede de un paso al siguiente.

Este procedimiento se llama **inducción**. A lo largo del curso hallarán varios ejemplos de dicho procedimiento. En cada caso se resuelven los pasos para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, y así sucesivamente, avanzando tanto como sea necesario para reconocer el patrón y familiarizarse con él. Después se debe tratar de formular y realizar el paso final, con n en lugar de un número específico. Después de encontrar suficientes ejemplos de este tipo, entenderán lo que significa la inducción y, en particular, comprenderán la siguiente definición formal.

Supongan que queremos probar una afirmación $A(n)$ para todo entero positivo n. Entonces una **demostración por inducción** consiste en probar:

(1) La afirmación es verdadera cuando $n = 1$.
(2) Si la afirmación es verdadera para un entero dado n, entonces es verdadera para $n+1$.

El primer paso permite iniciar el procedimiento y el segundo paso permite ir de un entero al siguiente, tal como lo hicimos en el ejemplo anterior.

III, §5. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes::

1. (a) $2x^{1/3}$ (b) $3x^{3/4}$ (c) $\frac{1}{2}x^2$ (d) $\frac{3}{4}x^2$
2. (a) $5x^{11}$ (b) $4x^{-2}$ (c) $\frac{1}{3}x^4 - 5x^3 + x^2 - 2$
3. (a) $\frac{1}{2}x^{-3/4}$ (b) $3x - 2x^3$ (c) $4x^5 - 7x^3 + 2x - 1$
4. (a) $7x^3 + 4x^2$ (b) $4x^{2/3} + 5x^4 - x^3 + 3x$
5. (a) $25x^{-1} + 12x^{1/2}$ (b) $2x^3 + 5x^7$ (c) $4x^4 - 7x^3 + x - 12$
6. (a) $\frac{3}{5}x^2 - 2x^8$ (b) $3x^4 - 2x^2 + x - 10$ (c) $\pi x^7 - 8x^5 + x + 1$
7. $(x^3 + x)(x - 1)$
8. $(2x^2 - 1)(x^4 + 1)$
9. $(x + 1)(x^2 + 5x^{3/2})$
10. $(2x - 5)(3x^4 + 5x + 2)$
11. $(x^{-2/3} + x^2)\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)$
12. $(2x + 3)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)$
13. $\dfrac{2x + 1}{x + 5}$
14. $\dfrac{2x}{x^2 + 3x + 1}$

Para romper la monotonía de la letra x, usemos otra.

15. $f(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)(t - 1)}$
16. $\dfrac{t^{-5/4}}{t^2 + t - 1}$
17. ¿Cuál es la pendiente de la curva

$$y = \frac{t}{t + 5}$$

en el punto $t = 2$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

18 ¿Cuál es la pendiente de la curva

$$y = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

en $t = 1$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

III, §5. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes ¡No simplifiquen sus respuestas!

1. $3x^3 - 4x + 5$
2. $x^2 + 2x + 27$
3. $x^2 + x - 1$
4. $x^{1/2} - 8x^4 + x^{-1}$
5. $x^{5/2} + x^{-5/2}$
6. $x^7 + 15x^{-1/5}$
7. $(x^2 - 1)(x + 5)$
8. $\left(x^5 + \dfrac{1}{x}\right)(x^5 + 1)$
9. $(x^{3/2} + x^2)(x^4 - 99)$
10. $(x^2 + x + 1)(x^5 - x - 25)$
11. $(2x^2 + 1)\left(\dfrac{1}{x^2} + 4x + 8\right)$
12. $(x^4 - x^2)(x^2 - 1)$
13. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
14. $5(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$
15. $x^3(x^2 + 1)(x + 1)$
16. $(x^4 + 1)(x + 5)(2x + 7)$
17. $\dfrac{1}{2x + 3}$
18. $\dfrac{1}{7x + 27}$
19. $\dfrac{-5}{x^3 + 2x^2}$

20. $\dfrac{3}{2x^4 + x^{3/2}}$
21. $\dfrac{-2x}{x + 1}$
22. $\dfrac{x + 1}{x - 5}$
23. $\dfrac{3x^{1/2}}{(x + 1)(x - 1)}$
24. $\dfrac{2x^{1/2} + x^{3/4}}{(x + 1)x^3}$
25. $\dfrac{x^5 + 1}{(x^2 + 1)(x + 7)}$
26. $\dfrac{(x + 1)(x + 5)}{x - 4}$
27. $\dfrac{x^3}{1 - x^2}$
28. $\dfrac{x^5}{x^{3/2} + x}$
29. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$
30. $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{8x}$
31. $\dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 4}$
32. $\dfrac{x^5}{x^2 + 3}$
33. $\dfrac{4x - x^3}{x^2 + 2}$
34. $\dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 7}$
35. $\dfrac{1 - 5x}{x}$
36. $\dfrac{1 + 6x + x^{3/4}}{7x - 2}$
37. $\dfrac{x^2}{(x + 1)(x - 2)}$
38. $\dfrac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{x^{3/4}}$
39. $\dfrac{3x^4 + x^{5/4}}{4x^3 - x^5 + 1}$
40. $\dfrac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)}$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas siguientes en el punto dado.

41. $y = x^{1/4} + 2x^{3/4}$ en $x = 16$
42. $y = 2x^3 + 3$ en $x = \frac{1}{2}$
43. $y = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ en $x = 0$
44. $y = 2x^2 + 5x - 1$ en $x = 2$
45. $y = (x^2 + 1)(2x + 3)$ en $x = 1$
46. $y = \dfrac{x - 1}{x + 5}$ en $x = 2$
47. $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ en $x = 2$
48. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ en $x = 2$
49. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ en $x = 2$
50. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$
51. Mostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x.$$

Hallar el punto de tangencia.

52. Mostrar que la recta $y = 9x - 15$ es tangente a la curva

$$y = x^3 - 3x + 1.$$

Hallar el punto de tangencia.

53. Mostrar que las gráficas de las ecuaciones

$$y = 3x^2 \quad \text{y} \quad y = 2x^3 + 1$$

tienen la recta tangente común en el punto $(1, 3)$. Trazar las gráficas.

54. Mostrar que hay exactamente dos rectas tangentes a la gráfica de $y = (x + 1)^2$ que pasa por el origen, y hallar sus ecuaciones.

55. Hallar todos los puntos (x_0, y_0) sobre la curva

$$y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$$

tales que la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) sea paralela a la recta

$$16x - y + 5 = 0.$$

Hallar la recta tangente a la curva en cada uno de estos puntos.

III, §6. LA REGLA DE LA CADENA

Ya sabemos cómo construir nuevas funciones a partir de las antiguas mediante sumas, productos y cocientes. Hay otra manera importante de construir nuevas funciones. Primero daremos ejemplos de esta nueva manera.

Consideren la función $(x+2)^{10}$. Podemos decir que esta función está hecha a partir de la función décima potencia y de la función $x+2$. A saber, dado un número x, primero le sumamos 2 y después tomamos la décima potencia. Sea

$$g(x) = x + 2$$

y sea f la función de décima potencia. Entonces podemos tomar el valor de f en $x+2$, a saber

$$f(x+2) = (x+2)^{10}$$

y también podemos escribirlo como

$$f(x+2) = f(g(x)).$$

Otro ejemplo: Consideren la función $(3x^4-1)^{1/2}$. Si hacemos

$$g(x) = 3x^4 - 1$$

y hacemos que f sea la función raíz cuadrada, entonces

$$f(g(x)) = \sqrt{3x^4 - 1} = (3x^4 - 1)^{1/2}.$$

A fin de no confundirnos con la letra x, que no podemos seguir usando en todos los contextos, usamos otra letra para denotar los valores de g. Así podemos escribir $f(u) = u^{1/2}$.

De manera análoga, sean $f(u)$ la función $u+5$ y $g(x) = 2x$. Entonces

$$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 5.$$

Un ejemplo más del mismo tipo: Sea

$$f(u) = \frac{1}{u+2}$$

y

$$g(x) = x^{10}.$$

Entonces,

$$f(g(x)) = \frac{1}{x^{10}+2}.$$

Para que tengan suficiente práctica con muchos tipos de funciones, mencionaremos varias cuyas definiciones se darán posteriormente. Éstas serán sen y cos (que se leen seno y coseno), log (que se lee logaritmo o simplemente log) y la función exponencial exp. Seleccionaremos un número especial e (cuyo valor es aproximadamente $2.718\ldots$), tal que la función exp está dada por

$$\exp(x) = e^x.$$

Ahora veremos cómo se puede hacer nuevas funciones con éstas:

Sean $f(u) = \operatorname{sen} u$ y $g(x) = x^2$. Entonces

$$f(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2).$$

Sean $f(u) = e^u$ y $g(x) = \cos x$. Entonces

$$f(g(x)) = e^{\cos x}.$$

Sean $f(v) = \log v$ y $g(t) = t^3 - 1$. Entonces

$$f(g(t)) = \log(t^3 - 1).$$

Sean $f(w) = w^{10}$ y $g(z) = \log z + \operatorname{sen} z$. Entonces

$$f(g(z)) = (\log z + \operatorname{sen} z)^{10}.$$

Cada vez que tengamos dos funciones f y g tales que f esté definida para todos los números que sean valores de g, podremos construir una nueva función denotada por $f \circ g$ cuyo valor en un número x es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

La regla que define a esta nueva función es: Se toma el número x, se halla el número $g(x)$, y depués se toma el valor de f en $g(x)$. Éste es el valor de $f \circ g$ en x. La función $f \circ g$ se llama **función compuesta** de f y g. Decimos que g es la función **interior** y que f es la función **exterior**. Por ejemplo, en la función log sen x, tenemos

$$f \circ g = \log \circ \operatorname{sen}.$$

La función exterior es log, y la función interior es el seno.

Es importante tener en mente que sólo podemos componer dos funciones cuando la función exterior está definida en todos los valores de la función interior. Por ejemplo, sean $f(u) = u^{1/2}$ y $g(x) = -x^2$. Entonces no podemos formar la función compuesta $f \circ g$ porque f está definida solamente para números positivos (o 0) y los valores de g son todos negativos, o 0. Así, $(-x^2)^{1/2}$ no tiene sentido.

Sin embargo, por el momento se les pide aprender el mecanismo de las funciones compuestas exactamente como aprendieron la tabla de multiplicar, a fin de adquirir reflejos condicionados eficientes para cuando se encuentren con funciones compuestas. Por lo tanto, para el entrenamiento dado por los ejercicios que se encuentran al final de la sección, deberán olvidar por el momento el significado de los símbolos y operar con ellos formalmente, sólo para aprender de manera adecuada las reglas formales.

Aunque no hemos definido la función exponencial e^x ni hemos visto formalmente sen x u otra de las funciones recién mencionadas, no necesitamos conocer sus definiciones para poder manipularlas. Si nos limitáramos a las funciones con las que hemos tratado explícitamente hasta ahora, tendríamos una visión restringida de cómo trabaja la composición de funciones y cómo trabaja la regla de la cadena a continuación.

Pasemos al problema de sacar la derivada de una función compuesta.

Comencemos con un ejemplo. Supongan que queremos hallar la derivada de la función $(x+1)^{10}$. El cociente de Newton sería una expresión muy larga, y resultaría del todo infructuoso tratar de desenredarlo mediante fuerza bruta, único método que tenemos hasta ahora. Por lo tanto, es una agradable sorpresa saber que hay una manera fácil de hallar la derivada. Damos la respuesta al momento: la derivada de esta función es $10(x+1)^9$. Se parece mucho a la derivada de las potencias.

Antes de enunciar y probar el teorema general daremos otros ejemplos.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x)^{3/2} = \frac{3}{2}(x^2+2x)^{1/2}(2x+2).$$

Observen cuidadosamente el término adicional $2x+2$, que es la derivada de la expresión x^2+2x. Podemos describir la respuesta en los términos siguientes. Hacemos $u = x^2+x$ de modo que $du/dx = 2x+2$. Sea $f(u) = u^{3/2}$. Tenemos entonces

$$\frac{d(f(u(x)))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(x^2+x)^{10} = 10(x^2+x)^9(2x+1).$$

Observen de nuevo la presencia del término $2x+1$, que es la derivada de x^2+x. Una vez más, si hacemos $u = x^2+x$ y $f(u) = u^{10}$, entonces

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}, \qquad \text{donde} \qquad \frac{df}{du} = 10u^9 \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 2x+1.$$

¿Pueden adivinar la regla general a partir de las afirmaciones precedentes? La regla general también fue descubierta mediante ensayo y error, pero nosotros aprovechamos tres siglos de experiencia y podemos enunciarla y probarla de manera muy simple, como sigue.

Regla de la cadena. *Sean f y g dos funciones que tienen derivadas, y tales que f está definida en todos los números que son valores de g. Entonces la función compuesta $f \circ g$ tiene una derivada, dada por la fórmula*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Esto se puede expresar en palabras diciendo que tomamos la *derivada de la función exterior por la derivada de la función interior (o la derivada de lo que está adentro).*

La afirmación anterior se conoce como **regla de la cadena.**

Si ponemos $u = g(x)$, entonces podemos expresar la regla de la cadena en la forma

$$\boxed{\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx},}$$

o también

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Así, la derivada se comporta *como si* se cancelara du. En tanto hayamos probado este resultado, no hay nada de malo en trabajar como una máquina para calcular derivadas de funciones compuestas; daremos algunos ejemplos antes de los ejercicios.

Ejemplo. Sea $F(x) = (x^2+1)^{10}$. Entonces

$$F(x) = f(g(x)),$$

donde

$$u = g(x) = x^2+1 \qquad \text{y} \qquad f(u) = u^{10}.$$

Entonces

$$f'(u) = 10u^9 = \frac{df}{du} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x = \frac{dg}{dx}.$$

Así,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 2x = 10(x^2+1)^9 2x.$$

Ejemplo. Sean $f(u) = 2u^{1/2}$ y $g(x) = 5x+1$. Entonces

$$f'(u) = u^{-1/2} = \frac{df}{du} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 5 = \frac{dg}{dx}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx}2(5x+1)^{1/2} = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(5x+1)^{-1/2} \cdot 5 = (5x+1)^{-1/2} \cdot 5.$$

(Presten atención a la constante 5, que es la derivada de $5x+1$. Es muy posible que la olviden.)

Para darles un entrenamiento más extensivo del que se puede alcanzar con las funciones consideradas, como las potencias, resumimos las derivadas de las funciones elementales que se considerarán posteriormente.

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \qquad \text{(sí: } e^x\text{, ¡igual que la función!).}$$

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)^7 = 7(\operatorname{sen} x)^6 \cos x.$$

En este ejemplo, $f(u) = u^7$ y $df/du = 7u^6$. Además

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = \cos x.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x)^7 = 7(\operatorname{sen} 3x)^6 \cos 3x \cdot 3.$$

El último factor de 3 que se presenta en el lado derecho es la derivada $d(3x)/dx$.

Ejemplo. Sea n cualquier entero. Para cualquier función diferenciable $f(x)$,

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x)^n = nf(x)^{n-1}\frac{df}{dx}.}$$

Ejemplo.

$$\frac{de^{\operatorname{sen} x}}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x).$$

En este ejemplo, $f(u) = e^u$, $df/du = e^u$, y $u = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo.

$$\frac{d\cos(2x^2)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(2x^2)\cdot 4x.$$

En este ejemplo, $f(u) = \cos u$ y $df/du = -\operatorname{sen} u$. Además $u = 2x^2$, de modo que $du/dx = 4x$.

Ejemplo.

$$\frac{d\cos 4x}{dx} = -\operatorname{sen}(4x)\cdot 4.$$

En este ejemplo, $f(u) = \cos u$ y $u = 4x$ por lo que $du/dx = 4$.

Insistimos en lo que ya afirmamos. *Si nos limitáramos a polinomios o a cocientes de polinomios, no tendríamos ejemplos suficientes para practicar el mecanismo de la regla de la cadena. No hay nada de malo en usar las propiedades de las funciones que no se han definido formalmente en el curso.* De hecho podríamos crear funciones totalmente imaginarias para alcanzar el mismo propósito.

Ejemplo. Supongan que hay una función llamada tonto(x), cuya derivada está dada por

$$\frac{d\,\text{tonto}(x)}{dx} = \frac{1}{x + \operatorname{sen} x}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{tonto}(x^3+4x) &= \frac{d\,\text{tonto}(u)}{du}\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{(x^3+4x)+\operatorname{sen}(x^3+4x)}(3x^2+4).\end{aligned}$$

Ejemplo. Supongan que hay una función vaca(x) tal que vaca$'(x) =$ tonto(x). Entonces

$$\frac{d\,\text{vaca}(x^2)}{dx} = \text{tonto}(x^2)\cdot 2x.$$

Demostración de la regla de la cadena. Debemos considerar el cociente de Newton de la función compuesta $f \circ g$, el cual es, por definición,

$$\frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h}.$$

Hagamos $u = g(x)$ y sea

$$k = g(x+h) - g(x).$$

Entonces k depende de h y tiende a 0 cuando h tiende a 0. Nuestro cociente de Newton es igual a

$$\frac{f(u+k) - f(u)}{h}.$$

Para el presente argumento *supongamos que k es distinto de* 0 para todos los valores pequeños de h. Entonces podemos multiplicar y dividir este cociente por k y obtener

$$\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\frac{k}{h} = \frac{f(u+k)-f(u)}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Si hacemos que h tienda a 0 y usamos la regla para el límite de un producto, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a

$$f'(u)g'(x),$$

y esto probaría nuestra regla de la cadena, bajo la hipótesis de que k no es 0.

No sucede con mucha frecuencia que $k = 0$ para valores arbitrariamente pequeños de h, pero cuando suceda, deberá afinarse el argumento anterior. Para los interesados, mostraremos ahora cómo se puede modificar ligeramente el argumento de modo que sea válido en todos los casos. **El lector no interesado puede hacer caso omiso de ello.**

Distinguimos dos tipos de números h. Los del primer tipo, aquellos para los cuales $g(x+h) - g(x) \neq 0$, y los del segundo tipo, aquellos para los cuales

$$g(x+h) - g(x) = 0.$$

Sea H_1 el conjunto de h del primer tipo, y H_2 el conjunto de h del segundo tipo. Supongamos que tenemos

$$g(x+h) - g(x) = 0$$

para valores arbitrariamente pequeños de h. Entonces el cociente de Newton

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

es 0 para dichos valores, esto es, para h en H_2 y, en consecuencia,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0.$$

Más aún

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_2}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = 0,$$

porque h es del segundo tipo, de modo que $g(x+h)-g(x) = 0$, $g(x+h) = g(x)$ y, por lo tanto, $f(g(x+h)) - f(g(x)) = 0$. Aquí se toma el límite cuando h tiende a 0, pero h del segundo tipo.

Por otro lado, si tomamos el límite con h del primer tipo, entonces se aplica el argumento original, i.e. podemos dividir y multiplicar por

$$k = g(x+h) - g(x),$$

y hallamos

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

como antes. Pero $g'(x) = 0$. Por ello el límite es $0 = f'(g(x))g'(x)$ cuando h tiende a 0, ya sea h del primer tipo o del segundo. Esto concluye la demostración.

III, §6. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

1. $(x+1)^8$
2. $(2x-5)^{1/2}$
3. $(\operatorname{sen} x)^3$
4. $(\log x)^5$
5. $\operatorname{sen} 2x$
6. $\log(x^2+1)$
7. $e^{\cos x}$
8. $\log(e^x + \operatorname{sen} x)$
9. $\operatorname{sen}\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$
10. $\dfrac{x+1}{\operatorname{sen} 2x}$
11. $(2x^2+3)^3$
12. $\cos(\operatorname{sen} 5x)$
13. $\log(\cos 2x)$
14. $\operatorname{sen}[(2x+5)^2]$
15. $\operatorname{sen}[\cos(x+1)]$
16. $\operatorname{sen}(e^x)$
17. $\dfrac{1}{(3x-1)^4}$
18. $\dfrac{1}{(4x)^3}$
19. $\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 2x)^2}$
20. $\dfrac{1}{(\cos 2x)^2}$
21. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}$
22. $(\operatorname{sen} x)(\cos x)$

23. $(x^2+1)e^x$
24. $(x^3+2x)(\operatorname{sen} 3x)$
25. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}$
27. $\dfrac{\log x}{x^2+3}$
28. $\dfrac{x+1}{\cos 2x}$
29. $(2x-3)(e^x+x)$
30. $(x^3-1)(e^{3x}+5x)$
31. $\dfrac{x^3+1}{x-1}$
32. $\dfrac{x^2-1}{2x+3}$
33. $(x^{4/3}-e^x)(2x+1)$
34. $(\operatorname{sen} 3x)(x^{1/4}-1)$
35. $\operatorname{sen}(x^2+5x)$
36. e^{3x^2+8}
37. $\dfrac{1}{\log(x^4+1)}$
38. $\dfrac{1}{\log(x^{1/2}+2x)}$
39. $\dfrac{2x}{e^x}$
40. Sea f una función tal que $f'(u) = \dfrac{1}{1+u^3}$. Sea $g(x) = f(x^2)$. Hallar $g'(x)$ y $g'(2)$. No intenten evaluar $f(u)$.
41. Descansar.

III, §6. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

1. $(2x+1)^2$
2. $(2x+5)^3$
3. $(5x+3)^7$
4. $(7x-2)^{81}$
5. $(2x^2+x-5)^3$
6. $(2x^3-3x)^4$
7. $(3x+1)^{1/2}$
8. $(2x-5)^{5/4}$
9. $(x^2+x-1)^{-2}$
10. $(x^4+5x+6)^{-1}$
11. $(x+5)^{-5/3}$
12. $(x^3+2x+1)^3$
13. $(x-1)(x-5)^3$
14. $(2x^2+1)^2(x^2+3x)$
15. $(x^3+x^2-2x-1)^4$
16. $(x^2+1)^3(2x+5)^2$
17. $\dfrac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{1/2}}$
18. $\dfrac{(2x+1)^{1/2}}{(x+5)^5}$
19. $\dfrac{(2x^2+x-1)^{5/2}}{(3x+2)^9}$
20. $\dfrac{(x^2+1)(3x-7)^8}{(x^2+5x-4)^3}$
21. $\sqrt{2x+1}$
22. $\sqrt{x+3}$
23. $\sqrt{x^2+x+5}$
24. $\sqrt{2x^3-x+1}$

En los ejercicios siguientes se supone que existen las funciones $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\log u$ y e^u cuyas derivadas están dadas por las fórmulas siguientes:

$$\frac{d \operatorname{sen} u}{du} = \cos u, \qquad \frac{d \cos u}{du} = -\operatorname{sen} u,$$

$$\frac{d(e^u)}{du} = e^u, \qquad \frac{d \log u}{du} = \frac{1}{u}.$$

Hallar la derivada de cada función (con respecto a x):

25. $\operatorname{sen}(x^3+1)$
26. $\cos(x^3+1)$
27. e^{x^3+1}
28. $\log(x^3+1)$
29. $\operatorname{sen}(\cos x)$
30. $\cos(\operatorname{sen} x)$
31. $e^{\operatorname{sen}(x^3+1)}$
32. $\log[\operatorname{sen}(x^3+1)]$
33. $\operatorname{sen}[(x+1)(x^2+2)]$
34. $\log(2x^2+3x+5)$
35. $e^{(x+1)(x-3)}$
36. e^{2x+1}
37. $\operatorname{sen}(2x+5)$
38. $\cos(7x+1)$
39. $\log(2x+1)$
40. $\log\dfrac{2x+1}{x+3}$
41. $\operatorname{sen}\dfrac{x-5}{2x+4}$
42. $\cos\dfrac{2x-1}{x+3}$
43. e^{2x^2+3x+1}
44. $\log(4x^3-2x)$
45. $\operatorname{sen}[\log(2x+1)]$
46. $\cos(e^{2x})$
47. $\cos(3x^2-2x+1)$
48. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^3+1}\right)$
49. $(2x+1)^{80}$
50. $(\operatorname{sen} x)^{50}$
51. $(\log x)^{49}$
52. $(\operatorname{sen} 2x)^4$
53. $(e^{2x+1}-x)^5$
54. $(\log x)^{20}$
55. $(3\log(x^2+1)-x^3)^{1/2}$
56. $\left(\log(2x+3)\right)^{4/3}$
57. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$
58. $\dfrac{\operatorname{sen}(2x+5)}{\cos(x^2-1}$
59. $\dfrac{\log 2x^2}{\operatorname{sen} x^3}$
60. $\dfrac{e^{x^3}}{x^2-1}$
61. $\dfrac{x^4+4}{\cos 2x}$
62. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-2)}{\operatorname{sen} 2x}$
63. $\dfrac{(2x^2+1)^4}{(\cos x^3)}$
64. $\dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$
65. e^{-3x}
66. e^{-x^2}
67. e^{-4x^2+x}
68. $\sqrt{e^x+1}$
69. $\dfrac{\log(x^2+2)}{e^{-x}}$
70. $\dfrac{\log(2x+1)}{\operatorname{sen}(4x+5)}$

III, §7. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada una función diferenciable f definida en un intervalo, su derivada f' es también una función en ese intervalo. Si sucede que también es diferenciable (lo cual es frecuente), entonces su derivada se llama **segunda derivada** de f y se denota por $f''(x)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = (x^3+1)^2$. Entonces

$$f'(x) = 3(x^3+1)3x^2 = 9x^5 + 9x^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 40x^4 + 18x.$$

No hay razón alguna para detenerse en la segunda derivada, y sin duda podemos seguir con la tercera, la cuarta, etc., siempre que existan. Como resulta engorrosa una notación que acumula primas después de la f para denotar derivadas sucesivas, escribimos

$$f^{(n)}$$

para la n-ésima derivada de f. Así, f'' se escribe también $f^{(2)}$. Si queremos referirnos a la variable x, escribimos

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3$. Entonces

$$\frac{df}{dx} = 3x^2, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x) = 6x,$$
$$\frac{d^3f}{dx^3} = f^{(3)}(x) = 6, \qquad \frac{d^4f}{dx^4} = f^{(4)}(x) = 0.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = 5x^3$. Entonces

$$f'(x) = 15x^2 = \frac{df}{dx},$$
$$f^{(2)}(x) = 30x = \frac{d^2f}{dx^2},$$
$$f^{(3)}(x) = 30 = \frac{d^3f}{dx^3},$$
$$f^{(4)}(x) = 0 = \frac{d^4f}{dx^4}.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x.$$

III, §7. EJERCICIOS

Hallar las segundas derivadas de las funciones siguientes:

1. $3x^3 + 5x + 1$
2. $(x^2+1)^5$
3. Hallar la 80-ésima derivada de $x^7 + 5x - 1$.
4. Hallar la séptima derivada de $x^7 + 5x - 1$.
5. Hallar la tercera derivada de $x^2 + 1$.
6. Hallar la tercera derivada de $x^3 + 2x - 5$.

7. Hallar la tercera derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$.
8. Hallar la cuarta derivada de la función $g(x) = \cos x$.
9. Hallar la décima derivada de $\operatorname{sen} x$.
10. Hallar la décima derivada de $\cos x$.
11. Hallar la 100-ésima derivada de $\operatorname{sen} x$.
12. Hallar la 100-ésima derivada de $\cos x$.
13. (a) Hallar la quinta derivada de x^5.
    (b) Hallar la séptima derivada de x^7.
    (c) Hallar la decimotercera derivada de x^{13}.

En el proceso de hallar estas derivadas se debe observar un patrón. Sea n un entero positivo. Definir $n!$ como el producto de los primeros n enteros. Así

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

A este número se le llama n **factorial**. Por ejemplo:

$$2! = 2, \qquad 3! = 3\cdot 2 = 6, \qquad 4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24.$$

Calcular $5!$, $6!$, $7!$. Hallarán que $n!$ se usa particularmente en el capítulo sobre la fórmula de Taylor, más adelante en el curso.

14. En general, sea k un entero positivo. Sea

$$f(x) = x^k.$$

(a) ¿Cuál es $f^{(k)}(x)$?
(b) ¿Cuál es $f^{(k)}(0)$?
(c) Sea n un entero positivo $> k$. ¿Cuál es $f^{(n)}(0)$?
(d) Sea n un entero positivo $< k$. ¿Cuál es $f^{(n)}(0)$?

III, §8. DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Supongan que una curva está definida por una ecuación

$$F(x, y) = 0$$

como un círculo, $x^2 + y^2 = 7$, o una elipse, o bien, de manera más general, una ecuación como

$$3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0.$$

Usualmente sucede que para la mayoría de los valores de x es posible despejar y como función de x, con lo cual se halla una función diferenciable

$$y = f(x)$$

que satisfaga la ecuación. Por ejemplo, en el caso del círculo,

$$x^2 + y^2 = 7,$$

tenemos

$$y^2 = 7 - x^2$$

y, por lo tanto, obtenemos dos posibilidades para y,

$$y = \sqrt{7 - x^2} \qquad \text{o} \qquad y = -\sqrt{7 - x^2}.$$

La gráfica de la primera función es el semicírculo superior y la gráfica de la segunda función es el semicírculo inferior.

En el ejemplo $3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0$, es realmente un problema despejar y, y no lo haremos. Sin embargo, al suponer que $y = f(x)$ es una función diferenciable que satisface esta ecuación, podemos hallar más fácilmente una expresión para la derivada, y lo haremos en un ejemplo posterior.

Ejemplo. Hallar la derivada dy/dx si $x^2 + y^2 = 7$, en términos de x y y.

Diferenciamos ambos lados de la ecuación usando la regla de la cadena y el hecho de que $dx/dx = 1$. Obtenemos entonces:

$$2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \text{esto es} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}.$$

Ejemplo. Hallar la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 7$ en el punto $x = 2$ y $y = \sqrt{3}$.

La pendiente de la recta en este punto está dada por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\sqrt{3})} = \frac{-2\cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2).$$

Ejemplo. Hallar la derivada dy/dx en términos de x y y si

$$3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5.$$

Suponemos de nuevo que y es una función de x. Diferenciamos ambos lados usando la regla para la derivada de un producto y la regla de la cadena. Obtenemos entonces:

$$3x^3\frac{dy}{dx} + 9x^2y - 4y^3\frac{dy}{dx} + 10x = 0,$$

o, factorizando,

$$\frac{dy}{dx}(3x^3 - 4y^3) = -10x - 9x^2y.$$

Esto da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10x + 9x^2y}{3x^3 - 4y^3}.$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente en el ejemplo anterior en el punto $x = 1$, $y = 2$.

Primero hallamos la pendiente en el punto dado. Esto se obtiene al sustituir $x = 1$ y $y = 2$ en la expresión para dy/dx obtenida en el ejemplo anterior. Así:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -\frac{10+18}{3-32} = \frac{28}{29}.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en (1,2) es

$$y - 2 = \tfrac{28}{29}(x-1).$$

III, §8. EJERCICIOS

Hallar dy/dx en términos de x y y en los problemas siguientes.

1. $x^2 + xy = 2$
2. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 37$
3. $x^3 - xy + y^3 = 1$
4. $y^3 - 2x^3 + y = 1$
5. $2xy + y^2 = x + y$
6. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = 1$
7. $y^2 + 2x^2y + x = 0$
8. $x^2y^2 = x^2 + y^2$

Hallar la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos indicados.

9. $x^2y^2 = 9$ en $(-1,3)$
10. $x^2 + y^3 + 2x - 5y - 19 = 0$ en $(3,-1)$
11. $(y-x)^2 = 2x + 4$ en $(6,2)$
12. $2x^2 - y^3 + 4xy - 2x = 0$ en $(1,-2)$
13. $x^2 + y^2 = 25$ en $(3,-4)$
14. $x^2 - y^2 + 3xy + 12 = 0$ en $(-4,2)$
15. $x^2 + xy - y^2 = 1$ en $(2,3)$

III, §9. RAZÓN DE CAMBIO

La derivada tiene una interesante interpretación física, que está íntimamente relacionada con ella a lo largo de su desarrollo histórico, y vale la pena mencionarla.

Supongan que una partícula se mueve a lo largo de cierta recta una distancia que depende del tiempo t. Entonces la distancia s es una función de t, que escribimos $s = f(t)$.

Para dos valores del tiempo, t_1 y t_2, el cociente

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

se puede considerar como una rapidez promedio de la partícula, pues da la distancia total cubierta dividida entre el tiempo total transcurrido. En un tiempo dado t_0 es razonable considerar el límite

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

como la razón de cambio de s respecto a t. Esto no es más que la derivada $f'(t)$, que se llama **rapidez**.

Denotemos la **rapidez** por $v(t)$. Entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La razón de cambio de la rapidez se llama **aceleración**. Así

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = \text{aceleración} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ejemplo. Si la partícula es un objeto que se deja caer bajo la influencia de la gravedad, los datos experimentales muestran que

$$s = \tfrac{1}{2}Gt^2,$$

donde G es la constante gravitacional. En ese caso,

$$\frac{ds}{dt} = Gt$$

es su rapidez. La aceleración es entonces

$$\frac{d^2s}{dt^2} = G = \text{constante gravitacional}.$$

Ejemplo. Una partícula se mueve de manera que en el instante t la distancia recorrida está dada por la función

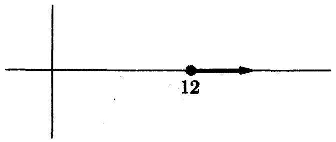
$$s(t) = t^2 + 1.$$

La derivada $s'(t)$ es igual a $2t$. Así la rapidez de la partícula es igual a 0 en el instante $t = 0$. Su rapidez es igual a 4 en el instante $t = 2$.

En general, dada una función $y = f(x)$, la derivada $f'(x)$ se interpreta como la **razón de cambio de y respecto a x**. Por ello f' también es una función. Si y crece cuando x crece, significa que la derivada es positiva, en otras palabras $f'(x) > 0$. Si y es decreciente, significa que la razón de cambio de y respecto a x es negativa, esto es $f'(x) < 0$.

Ejemplo. Suponer que una partícula se mueve con rapidez uniforme a lo largo de una recta, digamos a lo largo del eje x hacia la derecha, alejándose del origen. Consideren que la rapidez es de 5 cm/seg. Podemos escribir entonces

$$\frac{dx}{dt} = 5.$$



Vamos a suponer que en algún instante la partícula está a 12 cm a la derecha del origen. Después de cada segundo subsecuente de movimiento, la distancia se incrementa en otros 5 cm, de modo que después de 3 segundos, la distancia de la partícula al origen será

$$12 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27\,\text{cm}.$$

Es posible expresar la abscisa como función del tiempo. Con rapidez uniforme, la distancia recorrida es igual al producto de la rapidez por el tiempo. Así, si la partícula parte del origen en el instante $t = 0$, entonces

$$x(t) = 5t.$$

Si, por otro lado, la partícula parte de otro punto x_0, entonces

$$x(t) = 5t + x_0.$$

En efecto, si sustituimos t por 0 en esta ecuación, hallamos

$$x(0) = 5 \cdot 0 + x_0 = x_0.$$

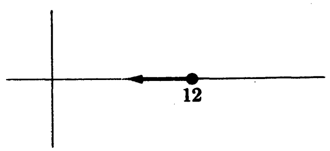
Por lo tanto, x_0 es el valor de x cuando $t = 0$.

Ejemplo. Consideremos que una partícula se mueve hacia la izquierda a razón de 5 cm/seg. Entonces escribimos

$$\frac{dx}{dt} = -5.$$

Supongamos de nuevo que en algún instante la partícula está a 12 cm a la derecha del origen. Entonces, después de 2 segundos, la distancia de la partícula al origen será

$$12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2\,\text{cm}.$$



Finalmente, supongamos que la partícula no parte cuando $t = 0$, sino digamos después de 25 segundos, pero que se mueve con la misma rapidez constante.

Podemos medir el tiempo en términos de una nueva coordenada t'. En términos de t', la abscisa está dada por

$$x = -5t'.$$

Podemos dar t' como función de t, mediante

$$t' = t - 25.$$

Entonces,

$$x = -5(t - 25)$$

da x como función de t.

En muchas aplicaciones hemos de considerar razones de cambio relacionadas, lo cual hace que intervenga la regla de la cadena. Supongamos que y es función de x y que además x está dado como función del tiempo, digamos $x = g(t)$; entonces, mediante la regla de la cadena, podemos determinar tanto la razón de cambio de y con respecto a x, a saber dy/dx, como la razón de cambio de y respecto a t, a saber,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

por la regla de la cadena

Ejemplo. Un cuadrado se expande de manera que su lado cambia a razón de 2 cm/seg. Hallar la razón de cambio de su área cuando el lado mide 6 cm de largo.

El área de un cuadrado como función de su lado está dada por la función

$$A(x) = x^2.$$

Si el lado x está dado como función del tiempo t, digamos $x = x(t)$, entonces la razón de cambio del área respecto al tiempo es, por definición,

$$\frac{d\big(A(x(t))\big)}{dt}.$$

Ahora usamos la regla de la cadena, y si denotamos el área por A, hallamos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Nos dicen que x crece a razón de 2 cm/seg. Esto significa que

$$\frac{dx}{dt} = 2.$$

Así, cuando $x(t) = 6$, hallamos que

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 6 \cdot 2 = 24\,\text{cm/seg}.$$

Ejemplo. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ de modo que su abscisa decrece a razón de 2 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 3$?

Tenemos que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Nos dicen que x es *decreciente*. Esto significa que

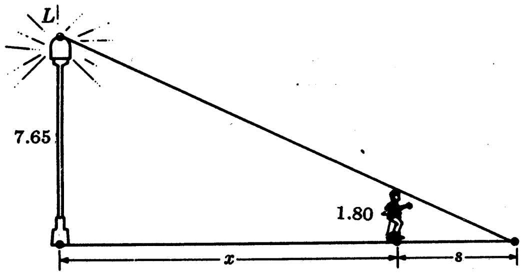
$$\frac{dx}{dt} = -2.$$

Por lo tanto, la razón de cambio de y cuando $x = 3$ es igual a

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = 3(3^2)(-2) = -54 \text{ unidades por segundo.}$$

El hecho de que dy/dt sea negativo significa que y decrece cuando $x = 3$.

Ejemplo. Hay un farol en lo alto de un poste a 7.65 m del suelo. Un hombre de 1.80 m de alto camina alejándose del poste. ¿Cuál es la longitud de su sombra cuando está a 12.25 m de la base del poste? Si camina a razón de 1.53 m/seg, ¿con qué rapidez crece su sombra en este punto?



Necesitamos establecer una relación entre la longitud de la sombra y la distancia del hombre al poste. Sea s la longitud de la sombra y sea x la distancia entre el hombre y la base del poste. Entonces, por triángulos semejantes, vemos que

$$\frac{7.65}{x+s} = \frac{1.8}{s}.$$

Después de la multiplicación cruzada, vemos que $7.65s = 1.8x + 1.8s$, de donde

$$s = \frac{1.8}{5.85}x.$$

Por lo tanto, $ds/dx = 1.8/5.85$, y

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1.8}{5.85}\frac{dx}{dt}.$$

Como $dx/dt = 1.53$, obtenemos lo que queremos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1.8}{5.85}1.53 = \frac{2.754}{5.85}\text{ m/seg.}$$

Además, cuando $x = 12.25$, hallamos que la longitud de su sombra está dada por

$$s = \frac{1.8 \cdot 12.25}{5.85} = \frac{22.05}{5.85}\text{ m/seg.}$$

Observación. Si el hombre camina hacia el poste, la distancia x será decreciente y en este caso:

$$\frac{dx}{dt} = -1.53.$$

En consecuencia, un argumento similar muestra que

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{2.754}{5.85}\text{ m/seg.}$$

Ejemplo. El área de un disco de radio r está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2,$$

donde r es el radio. Sea s el diámetro. Entonces $s = 2r$, de modo que $r = s/2$ y podemos dar A como función de s mediante

$$A = \pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\pi s^2}{4}.$$

Por lo tanto, la razón de cambio de A con respecto a s es

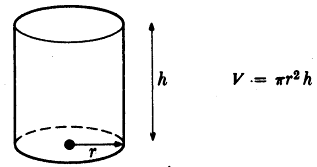
$$\frac{dA}{ds} = \frac{2\pi s}{4} = \frac{\pi s}{2}.$$

Ejemplo. Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a razón de 2 cm/seg y la altura crece a razón de 5 cm/seg. Hallar la razón a la que está cambiando el volumen cuando el radio es de 6 cm y la altura es de 8 cm.

El volumen está dado por la fórmula

$$V = \pi r^2 h,$$

donde r es el radio de la base y h es la altura.



Nos dicen que $dr/dt = -2$ (el signo es negativo porque el radio está decreciendo), y $dh/dt = 5$, de modo que usando la fórmula para la derivada de un producto, hallamos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left[r^2\frac{dh}{dt} + h2r\frac{dr}{dt}\right] = \pi[5r^2 - 4hr].$$

Cuando $r = 6$ y $h = 8$ obtenemos

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r=6\\h=8}} = \pi(5\cdot 6^2 - 4\cdot 8\cdot 6) = -12\pi.$$

El signo negativo en la respuesta significa que el volumen está decreciendo cuando $r = 6$ y $h = 8$.

Ejemplo. Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/hr. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/hr. El segundo parte 3 horas después del primero. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 horas después de que partió el segundo tren?

Sea y la distancia del primer tren a la estación y x la distancia del segundo tren a la estación. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = 100 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = 60.$$

Tenemos que $y = 100t$, y como el segundo tren parte tres horas después, tenemos

$$x = 60(t-3).$$

Sea $f(t)$ la distancia entre ellos. Entonces

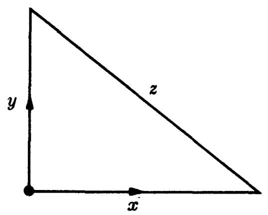
$$f(t) = \sqrt{60^2(t-3)^2 + 100^2t^2}.$$

Por lo tanto,

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}[3600(t-3)^2 + 10000t^2]^{-1/2}[2\cdot 60^2(t-3) + 2\cdot 100^2 t].$$

El tiempo 2 horas después de que partió el segundo tren es $t = 2+3 = 5$. La razón deseada es entonces $f'(5)$, de modo que

$$f'(5) = \tfrac{1}{2}[14400 + 250000]^{-1/2}[14400 + 100000].$$



Ejemplo. Resolveremos el ejemplo anterior usando otro método. Sea z la distancia entre los trenes. Tenemos

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Más aún, x, y y z son funciones de t. Al diferenciar respecto a t obtenemos:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Cancelamos 2 para obtener

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Escribamos $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en lugar de x, y, z, como funciones de t. Entonces

$$x(5) = 120, \quad y(5) = 500, \quad \text{y, por Pitágoras,} \quad z(5) = \sqrt{120^2 + 500^2}.$$

Sustituyendo $t = 5$, hallamos

$$z(5)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=5} = x(5)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=5} + y(5)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=5}.$$

Al dividir entre $z(5)$ se obtiene:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=5} = \frac{120\cdot 60 + 500\cdot 100}{\sqrt{120^2+500^2}}.$$

III, §9. EJERCICIOS

Se pueden usar las fórmulas siguientes para algunos de estos ejercicios.

El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.
El área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.
El volumen de un cono de altura h y radio de base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
El área del círculo de radio r es πr^2.
La circunferencia del círculo de radio r es $2\pi r$.

1. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia está dada por $s(t) = t^3 - 2t$. ¿En qué instante la aceleración es igual a
   (a) 1 (b) 0 (c) -5?
2. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia está dada por la función $s(t) = 2t^4 + t^2$. ¿En qué instante la rapidez es igual a cero?
3. Un objeto viaja sobre una recta con una rapidez dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
4. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia recorrida está dada por $s(t) = t^3 - 2t + 1$. ¿En qué instante la aceleración es igual a 0?
5. Un cubo se expande de manera que su lado está cambiando a razón de 5 m/seg. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4 m de longitud.

6. Una esfera está creciendo de modo que su radio crece a razón de 1 cm/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando su volumen cuando su radio es de 3 cm?

7. ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio, a su diámetro, a su circunferencia?

8. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = 1/(x^2+4)$ de manera que $dx/dt = -3$ unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?

9. Hay un farol en lo alto de un poste a 6.10 m del suelo. Una mujer de 1.53 m de estatura camina alejándose del poste. Hallar la razón a la que cambia su sombra si ella camina a razón de
(a) 1.22 m/seg (b) 1 m/seg.

10. Si en el ejercicio 9 la mujer camina hacia la luz, hallar la razón a la cual su sombra decrece si camina a razón de
(a) 1.53 m/seg (b) 1.8 m/seg.

11. Una partícula se mueve de manera diferenciable sobre la parábola $y = x^2$. ¿En qué punto sobre la curva se mueven a la misma razón su abscisa y su ordenada? (Se puede suponer que dx/dt y $dy/dt \neq 0$ para todo t.)

12. Un lado de un triángulo rectángulo decrece 1 cm/min y el otro lado crece 2 cm/min. En algún instante el primer lado mide 8 cm y el segundo lado mide 6 cm. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área 2 min después de ese instante?

13. La longitud del lado de un cuadrado está creciendo a razón de 3 cm por segundo. Hallar la razón de cambio a la cual está creciendo el área cuando el lado mide 15 cm.

14. Una escalera de 5.20 m de largo está apoyada sobre una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera se está alejando del pie de la pared a razón de 0.92 m/seg, ¿con qué rapidez está descendiendo la parte superior cuando el extremo inferior está a 2.45 m de la pared?

15. Una piscina tiene 7.65 m de ancho, 12.25 m de largo, 1 m de profundidad en un extremo y 2.75 m de profundidad en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se bombea agua dentro de la piscina a razón de 0.3 m^3/min, ¿con qué rapidez se está elevando el nivel del agua cuando tiene 1.22 m de profundidad en el extremo más hondo?

16. Un depósito tiene forma de cono con el vértice hacia abajo, de 3.3 m de alto. El radio en la parte superior es de 1.22 m. Se vierte agua en el depósito a razón de 0.15 m^3/min. ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 1.5 m?

17. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia recorrida está dada por $s(t) = 2t^2 - t$. ¿En qué instante la rapidez es igual a 0? ¿Cuál es la aceleración de la partícula?

18. Una partícula se mueve sobre la parábola con ecuación $y = x^2 - 6x$. Hallar el punto sobre la curva en el cual la razón de cambio de la ordenada es cuatro veces la razón de cambio de la abscisa. (Suponer que $dx/dt \neq 0$ para todo x.)

19. Fluye agua hacia dentro de un tanque con forma de hemisferio de radio 3.3 m con el lado plano hacia arriba, a razón de 0.1 m^3/min. Sean h la profundidad del agua, r el radio de la superficie del agua y V el volumen del agua en el tanque. Suponer que $dV/dt = \pi r^2 dh/dt$. Hallar con qué rapidez se está elevando el agua cuando $h = 1.65$ m.

20. Un tren parte de una estación en cierto instante y viaja hacia el norte a razón de 50 km/hr. Un segundo tren parte de la misma estación 2 hr después de la partida del primero y se dirige hacia el este a razón de 60 km/hr. Hallar la razón a la que se están separando los dos trenes 1.5 hr después de la partida del segundo.

21. Cae arena sobre una pila cuya forma siempre es de cono, a razón de 0.1 m^3/min. Suponer que el diámetro de la base de la pila es siempre tres veces la altura. ¿A qué razón está creciendo la altura cuando ésta es de 1.22 m?

22. El volumen de una esfera está decreciendo a razón de 12π cm^3/min. Hallar la razón a la cual están cambiando el radio y el área de la superficie de la esfera cuando el radio es de 20 cm.

23. Cae agua dentro de un depósito cónico a razón constante de 2 m^3/min. El vértice está a 18 m hacia abajo y el radio en la parte superior es de 24 m. ¿Con qué rapidez está elevándose el agua cuando tiene 6 m de profundidad?

24. Cae arena sobre una pila, formando así un cono. Sea V el volumen de la arena, de modo que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen de arena cuando $r = 3.3$ m, si el radio de la base se está expandiendo a razón de 0.6 m/seg y la altura está creciendo a razón de 0.3 m/seg? Se puede suponer que $r = h = 0$ cuando $t = 0$.

CAPÍTULO IV

Seno y coseno

A partir del seno y del coseno de un ángulo definiremos funciones de números y determinaremos sus derivadas.

Es conveniente recordar todas las cuestiones de trigonometría que usaremos, en particular la fórmula que nos da el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. Así, en este libro el tratamiento de las funciones trigonométricas es explícito: no necesitan saber nada acerca del seno y el coseno antes de comenzar este capítulo. Sin embargo, la mayoría de las demostraciones de los enunciados que se encuentran en la sección §1 vienen de la geometría plana y se dejarán a los lectores.

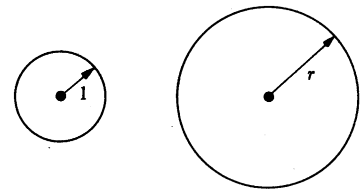
IV, §0. REPASO DE LA MEDICIÓN EN RADIANES

Para eliminar confusiones de terminología a menudo es conveniente usar dos palabras diferentes para un círculo, y para un círculo junto con su región interior. Así reservamos la palabra **círculo** para el primero y al círculo con su interior le llamamos **disco**, de ahí que hablemos de la longitud de un círculo, pero del área de un disco.

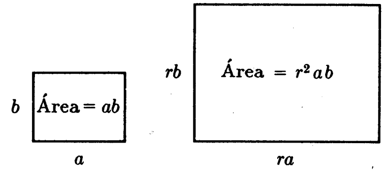
Supongamos que tenemos una unidad fija de longitud. Esto determina una medida para el área. Por ejemplo, si la longitud está medida en metros, entonces el área está medida en metros cuadrados.

Para nuestros propósitos inmediatos definimos π como el **área del disco de radio** 1. Es claro que constituye un problema hallar la expansión decimal para π, la cual, como quizá ya saben, es aproximadamente igual a $3.14159\ldots$. Más adelante en el curso aprenderán a calcular π con cualquier grado de precisión.

El disco d- radio r se obtiene mediante una dilatación (o ampliación) del disco de radio 1, según se muestra en la figura siguiente.



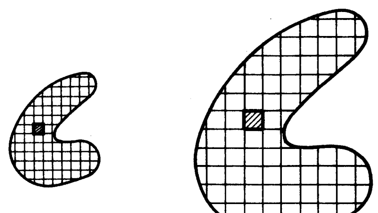
¿Cómo cambia el área bajo la dilatación? Veamos primero lo que sucede con los rectángulos. Sea R un rectángulo cuyos lados tienen longitud a y b. Sea r un número positivo. Sea rR el rectángulo cuyos lados tienen longitud ra, rb, según se muestra en la figura. Entonces el área de rR es $rarb = r^2ab$. Si A es el área de R, entonces el área de rR es r^2A.



Bajo el efecto de la dilatación en un factor r, el área de un rectángulo cambia en un factor r^2. Esto se aplica como un principio general a cualquier región:

> **Sea S cualquier región en el plano. Sea A el área de S. Con una dilatación en un factor r, la región dilatada tiene como área r^2A.**

Probaremos esto aproximando S mediante los cuadrados de una malla, como se muestra en la figura de la página siguiente. Si ampliamos S en un factor de r, obtenemos una región rS. Sea A el área de S. Entonces el área de rS será

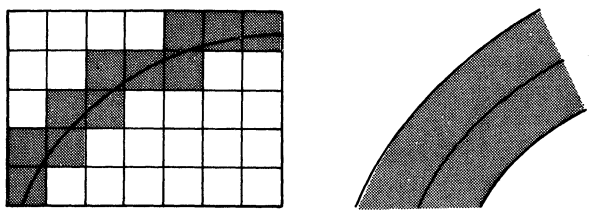


Área A

Área r^2A

de nuevo r^2A, porque cada cuadrado pequeño se amplía en un factor de r, de modo que el área de un cuadrado pequeño cambia en un factor de r^2. La suma de las áreas de los cuadrados da una aproximación al área de la figura. Queremos estimar cuán buena es la aproximación. La diferencia entre la suma de las áreas de todos los cuadrados pequeños contenidos en la figura y el área de la figura misma es a lo más el área de todos los cuadrados pequeños que tocan la frontera de la figura. Podemos estimar esto como sigue.

Supongan que hacemos una malla de modo que los cuadrados tengan lados de longitud c. Entonces la diagonal de uno de dichos cuadrados tiene longitud $c\sqrt{2}$. Si un cuadrado interseca la frontera, entonces cualquier punto sobre el cuadrado está a lo más a una distancia $c\sqrt{2}$ de la frontera. Observen la figura.



(a) (b)

Esto sucede porque la distancia entre cualesquiera dos puntos del cuadrado es a lo más $c\sqrt{2}$. Tracemos una banda de ancho $c\sqrt{2}$ a cada lado de la frontera, según se muestra en (b) de la figura anterior. Entonces todos los cuadrados que intersecan la frontera deberán estar dentro de la banda. Es plausible que el área de la banda sea, a lo más, igual a

$$2c\sqrt{2} \quad \text{veces la longitud de la frontera.}$$

Así, si tomamos c muy pequeño, i.e. si tomamos la malla muy fina, entonces el área de la banda es pequeña y el área de la figura está aproximada por el área cubierta por los cuadrados que están completamente dentro de la figura. Bajo dilatación se aplica un argumento similar a la banda dilatada para la figura dilatada, de modo que el área de la banda dilatada es a lo más

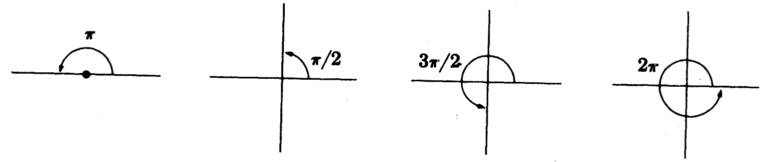
$$r^2 \cdot c\sqrt{2} \quad \text{veces la longitud de la frontera.}$$

Conforme c tiende a 0, las áreas de estas bandas tienden a 0. Esto justifica nuestra afirmación de que el área cambia en un factor de r^2 si se dilata en un factor r.

Como definimos a π como el área del disco de radio 1, obtenemos ahora que

El área de un disco de radio r es πr^2.

Seleccionemos una unidad de medición de ángulos tal que el ángulo llano sea igual a π veces el ángulo unitario. (Vean la figura siguiente.) El ángulo recto mide $\pi/2$. El ángulo completo que da una vuelta mide entonces 2π. Esta unidad de medición para la cual el ángulo llano mide π se llama **radián**. Así, el ángulo recto tiene $\pi/2$ radianes.



Hay en uso otra unidad de medición para la cual el ángulo llano mide 180. Esta unidad de llama **grado**. El ángulo llano tiene 180 grados y el ángulo recto tiene 90 grados. Tenemos además

$$\begin{aligned} 360 \text{ grados} &= 2\pi \text{ radianes,} \\ 60 \text{ grados} &= \pi/3 \text{ radianes,} \\ 45 \text{ grados} &= \pi/4 \text{ radianes,} \\ 30 \text{ grados} &= \pi/6 \text{ radianes.} \end{aligned}$$

Usaremos principalmente las mediciones en radianes, lo cual facilitará más adelante algunas fórmulas. Es sencillo convertir de una medición a la otra.

Ejemplo. Una rueda gira a razón de $50°$ por minuto. Hallar su razón de giro en rad/min y rpm (revoluciones por minuto).

Tenemos

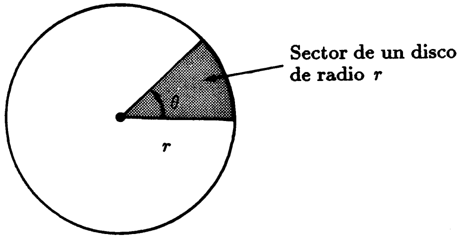
$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ radianes} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Por lo tanto $50°$ por minuto es igual a $50\pi/180 = 5\pi/18$ radianes por minuto.

Por otro lado, una revolución completa es de 2π radianes, de modo que un radián equivale a $1/2\pi$ revoluciones y, en consecuencia, la rueda gira a razón de

$$\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{5}{36} \text{ rpm.}$$

Un **sector** es la región del plano contenida en un ángulo. A menudo hablamos también del **sector de un disco**, refiriéndonos a la porción del sector contenida en el disco, según se ilustra en la figura de la página siguiente.



Un sector se mide por su ángulo. En la figura hemos denominado θ (teta) a este ángulo, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se mide en radianes. El área del sector es una determinada fracción del área total del disco. Sabemos que el área total es πr^2. La fracción es $\theta/2\pi$. Por lo tanto, si llamamos S al sector de ángulo θ en un disco de radio r, entonces el área de S es

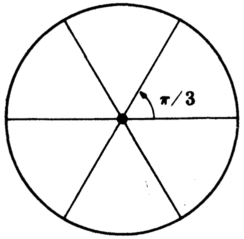
$$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}.$$

Señalamos esto para futura referencia:

El área de un sector cuyo ángulo es θ radianes, en un disco de radio r, es igual a $\dfrac{\theta r^2}{2}$.

Si el radio es 1, entonces el área del sector es $\theta/2$. Usaremos esto en la sección §4.

Ejemplo. El área de un sector de ángulo $\pi/3$ en un disco de radio 1 es $\pi/6$, ya que el área total del disco es π y el sector representa un sexto del área total. Esto se ilustra en la figura.



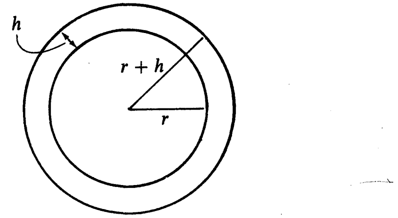
El disco de la figura está cortado en seis sectores y cada ángulo mide $\pi/3$ radianes, lo que hace un total de 2π radianes.

A continuación trataremos con la longitud de arco del círculo.

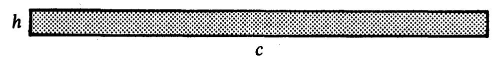
Sea c la circunferencia de un círculo de radio r. Entonces

$$\boxed{c = 2\pi r.}$$

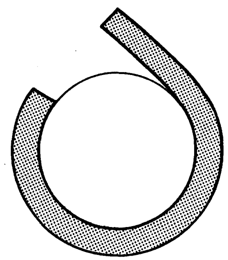
Demostración. La demostración será un bello ejemplo de la idea de diferenciación. Consideremos un círculo de radio r y un círculo de radio ligeramente mayor, el cual escribiremos como $r + h$. Suponemos que estos círculos tienen el mismo centro, de modo que se obtiene una banda circular entre ellos.



Sea c la longitud del círculo pequeño. Si tuviéramos una banda rectangular de longitud c y altura h, entonces su área sería ch.



Supongan que enrollamos esta banda alrededor del círculo.



Como el círculo se curva hacia afuera, la banda rectangular necesitaría estirarse para cubrir la banda situada entre el círculo de radio r y el círculo de radio $r + h$. Así, tenemos una desigualdad para áreas:

$$ch < \text{área de la banda circular}.$$

De manera análoga, si C es la circunferencia del círculo más grande, entonces

$$\text{área de la banda circular} < Ch.$$

Pero el área de la banda circular es la diferencia entre las áreas de los discos, la cual es

$$\text{área de la banda circular} = \pi(r+h)^2 - \pi r^2$$
$$= \pi(2rh + h^2).$$

Por lo tanto, obtenemos las desigualdades

$$ch < \pi(2rh + h^2) < Ch.$$

Dividimos estas desigualdades entre el número positivo h para obtener

$$c < \pi(2r + h) < C.$$

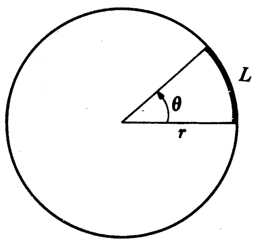
Ahora hagamos que h tienda a 0. Entonces la circunferencia C del círculo grande tenderá a la circunferencia c del círculo pequeño, y $\pi(2r+h)$ tiende a $2\pi r$. Se sigue que

$$c = 2\pi r,$$

probando así nuestra fórmula.

Observen que la longitud de la circunferencia es precisamente la derivada del área.

Un arco sobre un círculo se puede medir por su ángulo en radianes. ¿Cuál es la longitud L de este arco, como en la figura siguiente?



La respuesta es así.

Sea L la longitud de un arco de θ radianes sobre un círculo de radio r. Entonces

$$\boxed{L = r\theta.}$$

Demostración. La longitud total del círculo es de $2\pi r$, y L es la fracción $\theta/2\pi$ de $2\pi r$, lo cual da precisamente $r\theta$.

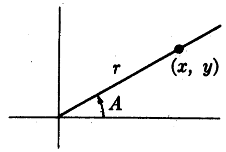
Ejemplo. La longitud de arco de $\pi/3$ radianes en un círculo de radio r es $r\pi/3$.

IV, §0. EJERCICIO

Suponer que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$. ¿Pueden imaginar un razonamiento para obtener el área de la esfera?

IV, §1. LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Supongamos que tenemos unos ejes coordenados y cierto ángulo A, según se muestra en la figura.



Seleccionamos un punto (x, y) (no el origen) sobre el rayo que determina nuestro ángulo A. Sea $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Entonces r es la distancia de $(0,0)$ al punto (x, y). Definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{seno } A &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \text{coseno } A &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}}$$

Si seleccionamos otro punto (x_1, y_1) sobre el rayo que determina nuestro ángulo A y usamos sus coordenadas para obtener el seno y el coseno, obtendremos los mismos valores que con (x, y). En efecto, existe un número positivo c tal que

$$x_1 = cx \quad \text{y} \quad y_1 = cy,$$

y podemos sustituir estos valores en

$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

para obtener

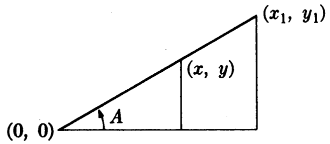
$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{cy}{\sqrt{c^2x^2+c^2y^2}}.$$

Podemos factorizar c del denominador y después cancelar c tanto en el numerador como en el denominador para obtener

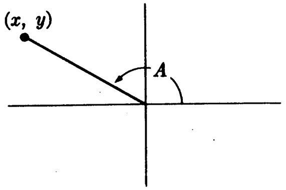
$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

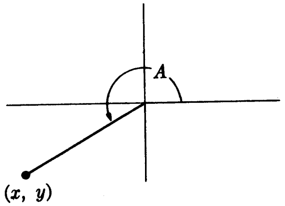
De esta manera vemos que el seno de A no depende de la selección del punto (x, y).

La interpretación geométrica del argumento anterior dice, simplemente, que los triángulos en el diagrama siguiente son similares.



El ángulo A puede dar toda la vuelta. Por ejemplo, podemos tener un ángulo determinado por un punto (x, y) en el segundo o tercer cuadrante.





Cuando el ángulo A está en el primer cuadrante, su seno y coseno son positivos, pues las coordenadas x y y son positivas. Cuando el ángulo A está en el segundo cuadrante, su seno es positivo porque y es positivo, pero su coseno es negativo porque x es negativo.

Cuando A está en el tercer cuadrante, el seno de A es negativo y el coseno de A también es negativo.

Como se mencionó en la sección introductoria, podemos usar la medición en radianes para los ángulos. Supongamos que A es un ángulo de θ radianes y sea (x, y) un punto sobre el círculo de radio 1 que además está sobre la recta que determina al ángulo A, como se muestra en la figura. Entonces en este caso,

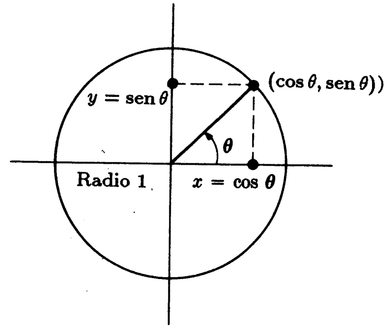
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).}$$

En general, para todo radio arbitrario r, tenemos las relaciones:

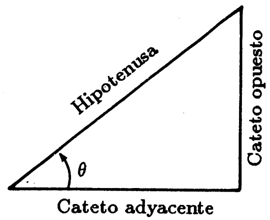
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}}$$



También podemos definir el seno y coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura, por medio de las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Lado adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

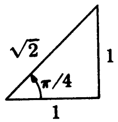


Hagamos una tabla de los senos y cosenos de algunos ángulos.

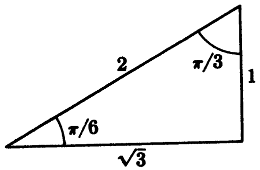
Ángulo	Seno	Coseno
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
2π	0	1

A menos que se indique otra cosa, *siempre usaremos la medición en radianes*, y nuestra tabla está dada para esa medida.

Los valores de esta tabla se determinan fácilmente usando las propiedades de los triángulos semejantes y geometría plana. Por ejemplo, deducimos que el seno del ángulo $\pi/4$ radianes $= 45°$ por medio de un triángulo rectángulo con dos lados iguales, como el de la página siguiente. Podemos determinar el seno de $\pi/4$ por medio del punto $(1, 1)$. Entonces $r = \sqrt{2}$ y el seno de $\pi/4$ radianes es $1/\sqrt{2}$. Lo mismo para el coseno.



Podemos obtener el seno de un ángulo de $\pi/6$ si consideramos un triángulo que tenga un ángulo de $\pi/6$ y otro de $\pi/3$ radianes (esto es, de $30°$ y $60°$, respectivamente).



Si hacemos que el lado opuesto al ángulo de $30°$ tenga longitud 1, entonces la hipotenusa tiene longitud 2 y el lado adyacente al ángulo de $30°$ tiene longitud $\sqrt{3}$.

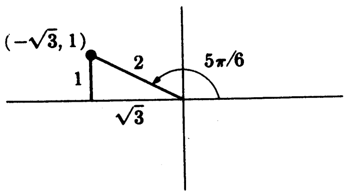
De este modo hallamos que

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Por otro lado, tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen} 5\pi/6 = \frac{1}{2}, \quad \cos 5\pi/6 = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$$

como la figura muestra claramente.



La selección de la medida en radianes nos permite definir el **seno de un número** en lugar del seno de un ángulo, de la siguiente manera.

Sea x un número con $0 \leq x < 2\pi$. Definimos **sen x** como el seno de x radianes.

Para un número arbitrario x escribimos

$$x = x_0 + 2\pi n$$

donde n es un entero, $0 \leq x_0 < 2\pi$, y definimos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0.$$

De esta definición vemos que

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi n)}$$

para cualquier entero n.

Evidentemente, a esta función la llamamos **función seno**. Así $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$.

De manera análoga tenemos la **función coseno**, definida para todos los números x mediante la regla:

$\cos x$ es el número que es el coseno del ángulo de x radianes.

Así pues, $\cos 0 = 1$ y $\cos \pi = -1$.

Si hubiéramos usado los grados para medir los ángulos, obtendríamos *otra* función seno que no es igual a la función seno que hemos definido en términos de radianes. Supongamos que llamamos a esta otra función seno sen^*. Entonces

$$\operatorname{sen}^*(180) = \operatorname{sen} \pi,$$

y en general

$$\operatorname{sen}^*(180x) = \operatorname{sen} \pi x$$

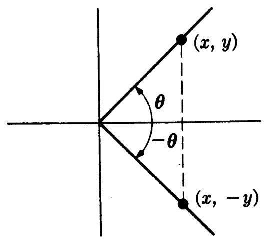
para cualquier número x. Así

$$\operatorname{sen}^* x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

es la fórmula que relaciona a las dos funciones seno. Más adelante se verá con claridad por qué siempre escogemos la medida en radianes en lugar de la otra.

Por ahora no tenemos modo de calcular otros valores para el seno y el coseno además de los casos muy particulares listados en la tabla anterior (y casos similares basados en simetrías sencillas de triángulos rectángulos). En el capítulo XIII desarrollaremos un método que nos permitirá hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ para cualquier valor de x, con cualquier grado de precisión deseado.

En la figura siguiente ilustramos un ángulo de θ radianes. Por convención, el ángulo de $-\theta$ radianes es la reflexión respecto al eje x.



Si (x, y) son las coordenadas de un punto sobre el rayo que define al ángulo de θ radianes, entonces $(x, -y)$ son las coordenadas de un punto sobre el rayo reflejado. Así

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta,\\ \cos(-\theta) &= \cos\theta.\end{aligned}}$$

Recordemos finalmente las definiciones de las otras funciones trigonométricas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Las más importantes son el seno, el coseno y la tangente. Haremos unas observaciones adicionales acerca de la tangente.

Es claro que la tangente está definida para todos los números θ tales que

$$\cos\theta \neq 0.$$

Éstos son los números distintos a

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

en general $\theta \neq (2n+1)/2$ para algún entero n. Hacemos una tabla de algunos valores de la tangente.

θ	$\tan\theta$
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$

Deberían completar esta tabla para todos los valores similares de θ en los cuatro cuadrantes.

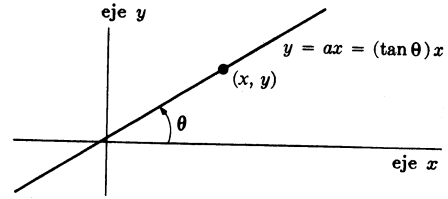
Consideren un ángulo de θ radianes y sea (x, y) un punto sobre el rayo que determina a este ángulo, con $x \neq 0$. Entonces

$$\tan\theta = y/x$$

de modo que

$$y = (\tan\theta)x.$$

Recíprocamente, cualquier punto (x, y) que satisfaga esta ecuación es un punto sobre la recta que forma un ángulo θ con el eje x, según se muestra en la figura siguiente.



> *En una ecuación $y = ax$ donde a es la pendiente, podemos decir que*
>
> $$a = \tan\theta,$$
>
> donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje x.

Ejemplo. Tomar $\theta = \pi/6$. Entonces $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$. Por lo tanto, la recta que forma un ángulo de θ con el eje x tiene la ecuación

$$y = \left(\tan\frac{\pi}{6}\right)x, \quad \text{o también} \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Ejemplo. Tomar $\theta = 1$. No hay una manera más fácil de expresar $\tan 1$ que escribir $\tan 1$. En el capítulo XIII aprenderán a calcular aproximaciones decimales arbitrariamente cercanas; aquí no nos ocuparemos de ello. Simplemente señalamos que la ecuación de la recta que forma un ángulo de 1 radián con el eje x está dada por

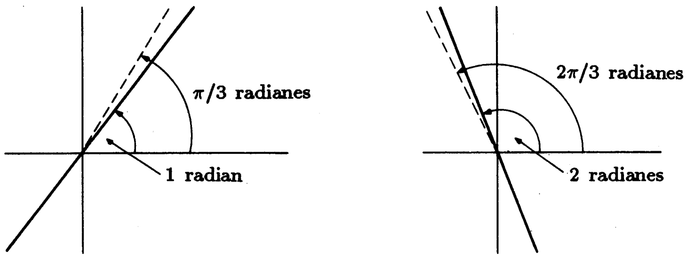
$$y = (\tan 1)x.$$

Del mismo modo, la ecuación de la recta que forma un ángulo de 2 radianes con el eje x está dada por

$$y = (\tan 2)x.$$

Supongamos que π es aproximadamente igual a 3.14. Entonces 1 es aproximadamente igual a $\pi/3$. Así, la recta que forma un ángulo de 1 radián con el eje

x, según se muestra en la figura 1(a), está cerca de la recta que forma un ángulo de $\pi/3$ radianes. Asimismo, la recta que forma un ángulo de 2 radianes con el eje x, como se muestra en la figura 1(b), está cerca de la recta que forma un ángulo de $2\pi/3$ radianes.



(a) (b)

Figura 1

IV, §1. EJERCICIOS

Hallar los valores siguientes de la función sen y de la función cos:

1. $\operatorname{sen} 3\pi/4$ 2. $\operatorname{sen} 2\pi/6$ 3. $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ 4. $\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

5. $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 6. $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{6}\right)$ 7. $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ 8. $\cos \frac{5\pi}{4}$

Hallar los valores siguientes:

9. $\tan \frac{\pi}{4}$ 10. $\tan \frac{2\pi}{6}$ 11. $\tan \frac{5\pi}{4}$ 12. $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

13. $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$ 14. $\cos \frac{7\pi}{6}$ 15. $\cos 2\pi/3$ 16. $\cos(-\pi/6)$

17. $\cos(-5\pi/6)$ 18. $\cos(-\pi/3)$

19. Completar la tabla siguiente.

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$2\pi/3$			
$3\pi/4$			
$5\pi/6$			
π			
$7\pi/6$			
$5\pi/4$			
$7\pi/4$			

IV, §2. LAS GRÁFICAS

sen x

Deseamos esbozar la gráfica de la función seno.

Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Conforme x va de 0 a $\pi/2$, el seno de x crece hasta que x llega a $\pi/2$, punto en el cual el seno es igual a 1.

Conforme x va de $\pi/2$ a π, el seno decrece hasta volverse

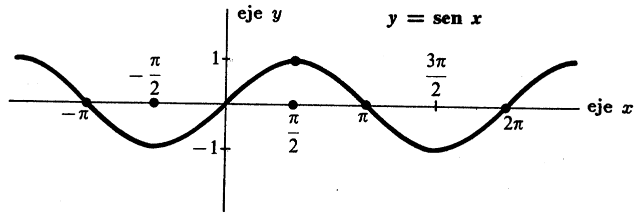
$$\operatorname{sen} \pi = 0.$$

Cuando x va de π a $3\pi/2$ el seno se vuelve negativo, pero en cualquier otro caso se comporta de manera similar a como lo hace en el primer cuadrante, hasta llegar a

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Finalmente, conforme x va de $3\pi/2$ a 2π, el seno de x va de -1 a 0, y estamos en condiciones de comenzar de nuevo.

La gráfica se ve así:



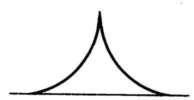
Si damos otra vuelta de 2π, el seno y el coseno tomarán cada uno los mismos valores que tenían originalmente, en otras palabras

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

para todo x. Esto se cumple sin importar si x es positivo o negativo, y lo mismo es cierto si tomamos $x - 2\pi$ en lugar de $x + 2\pi$.

Sería legítimo preguntar por qué un arco de la curva seno (o coseno) se ve como la hemos trazado, y no de la siguiente manera:

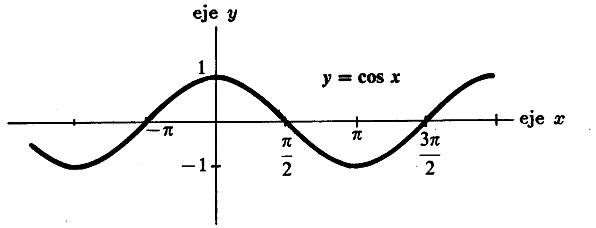


En la siguiente sección hallaremos la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$. Es igual a $\cos x$. Así, cuando $x = 0$, la pendiente es $\cos 0 = 1$. Más aún, cuando $x = \pi/2$, tenemos $\cos \pi/2 = 0$ y, por lo tanto, la pendiente es 0. Esto significa que la curva se vuelve horizontal, y no puede tener un pico como el de la figura anterior.

Hasta ahora no tenemos manera de calcular más valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Sin embargo, usando lo poco que sabemos y la derivada, nos podemos convencer de que la gráfica se ve como la hemos trazado.

$\cos x$

La gráfica del coseno se verá como la del seno, pero comienza con $\cos 0 = 1$.

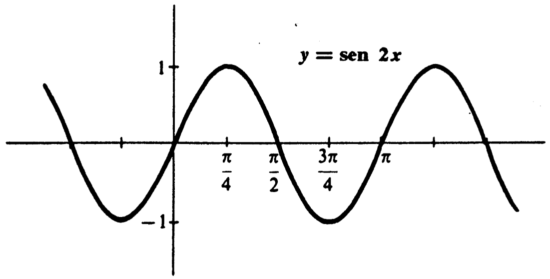


$\operatorname{sen} 2x$

A continuación graficamos $y = f(x) = \operatorname{sen} 2x$. Como el seno cambia su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/2$, el $\operatorname{sen} 2x$ cambiará su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/4$. Así, hagamos una tabla donde x varíe en intervalos de longitud $\pi/4$.

x	$2x$	$\operatorname{sen} 2x$
crec. de 0 a $\pi/4$	crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/4$ a $\pi/2$	crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0
crec. de $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. de π a $3\pi/2$	dec. de 0 a -1
crec. de $3\pi/4$ a π	crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0

Después la gráfica se repite. Por lo tanto, la gráfica de $\operatorname{sen} 2x$ se ve así.



Vemos que la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ tiene el doble de ondulaciones que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

También se vería que $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ tiene la mitad de ondulaciones que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

$\tan x$

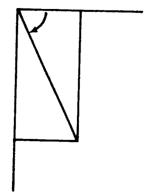
Finalmente, grafiquemos $y = \tan x$. Noten que $\tan 0 = 0$. Tomamos el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Si x está cerca de $-\pi/2$, entonces la tangente es negativa y muy grande. A saber

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Cuando x está cerca de $-\pi/2$, $\cos x$ está cerca de 0 y $\operatorname{sen} x$ está cerca de -1. También se puede ver esto a partir de un triángulo rectángulo.



Conforme x crece de $-\pi/2$ a 0, $\operatorname{sen} x$ crece de -1 a 0. Por otro lado, cuando x crece de $-\pi/2$ a 0, $\cos x$ crece de 0 a 1. Por lo tanto $1/\cos x$ decrece desde positivo muy grande hasta 1. Así, cuando x crece de $-\pi/2$ a 0,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ crece desde negativo grande hasta } 0.$$

De manera análoga, cuando x crece de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1 y $\cos x$ decrece de 1 a 0. Por ello $1/\cos x$ crece de 1 a positivo muy grande y entonces

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ crece desde } 0 \text{ hasta positivo grande.}$$

Con esto la gráfica de $y = \tan x$ se ve como en la página siguiente.

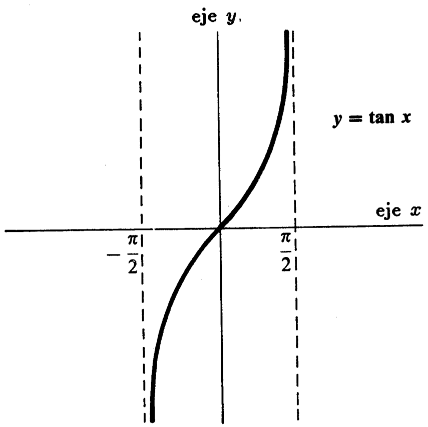
Observación sobre la notación. No confundan $\operatorname{sen} 2x$ con $(\operatorname{sen} 2)x$. Usualmente escribimos

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} 2x$$

sin paréntesis para referirnos al seno de $2x$. En cambio, $(\operatorname{sen} 2)x$ es el número $\operatorname{sen} 2$ por x. La gráfica de

$$y = (\operatorname{sen} 2)x$$

es una recta, precisamente como $y = cx$ para algún número fijo c.



IV, §2. EJERCICIOS

1. Trazar la gráfica de $\tan x$ para todos los valores de x.

2. Sea $\sec x = 1/\cos x$ definida cuando $\cos x \neq 0$. Trazar la gráfica de $\sec x$.

3. Sea $\cot x = 1/\tan x$. Trazar la gráfica de $\cot x$.
(Sec y cot son abreviaciones de secante y cotangente.)

4. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \operatorname{sen} 3x$
(c) $y = \cos 2x$ (d) $y = \cos 3x$

5. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ (b) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$ (c) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$
(d) $y = \cos \frac{1}{2}x$ (e) $y = \cos \frac{1}{3}x$ (f) $y = \cos \frac{1}{4}x$

6. Trazar las gráficas de:
(a) $y = \operatorname{sen} \pi x$ (b) $y = \cos \pi x$
(c) $y = \operatorname{sen} 2\pi x$ (d) $y = \cos 2\pi x$

7. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = |\operatorname{sen} x|$ (b) $y = |\cos x|$.

8. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$. Localizar valores aproximados de $f(n\pi/4)$, para
$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

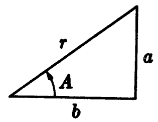
IV, §3. FÓRMULA DE LA SUMA

En esta sección enunciaremos y probaremos las fórmulas más importantes para el seno y el coseno.

Para comenzar, demostraremos, mediante el teorema de Pitágoras, que

$$\boxed{(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1}$$

para todo x. Para mostrar esto tomamos un ángulo A y determinamos su seno y su coseno a partir del triángulo rectángulo, como en la figura siguiente.



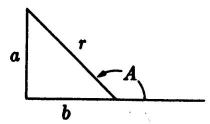
Entonces, por Pitágoras, tenemos

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Dividiendo entre r^2 tenemos

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.$$

El mismo razonamiento funciona cuando A es mayor que $\pi/2$, mediante un triángulo como éste:



En ambos casos tenemos que el seno de $A = a/r$ y el coseno de $A = b/r$, de modo que tenemos la relación

$$(\text{seno } A)^2 + (\text{coseno } A)^2 = 1.$$

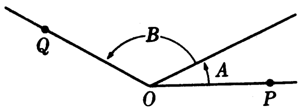
Se acostumbra escribir el cuadrado del seno y del coseno como $\operatorname{sen}^2 A$ y $\cos^2 A$. Nótese que en el segundo caso b es negativo.

Nuestro resultado principal es la **fórmula de la suma**, que deberá memorizarse.

Teorema 3.1. *Para dos ángulos A y B cualesquiera tenemos*

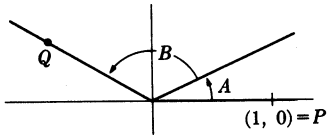
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B, \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B. \end{aligned}}$$

Demostración. Probaremos primero la segunda fórmula.
Consideramos los dos ángulos, A y B, y su suma:



Tomamos dos puntos P y Q según se indica, a una distancia 1 del origen O. Calcularemos ahora la distancia de P a Q usando dos sistemas coordenados diferentes.

Primero tomamos un sistema coordenado como es usual:



Entonces $P = (1,0)$ y

$$Q = \big(\cos(A+B), \operatorname{sen}(A+B)\big).$$

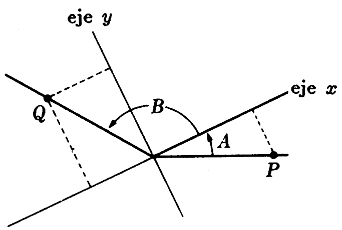
El cuadrado de la distancia entre $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es

$$(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P,Q)^2 &= \operatorname{sen}^2(A+B) + \big(\cos(A+B) - 1\big)^2, \\ &= -2\cos(A+B) + 2. \end{aligned}$$

A continuación colocamos el sistema coordenado como se muestra en la figura siguiente.



Entonces las coordenadas de P se vuelven

$$\big(\cos(-A), \operatorname{sen}(-A)\big) = (\cos A, -\operatorname{sen} A).$$

Las de Q son simplemente $(\cos B, \operatorname{sen} B)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P,Q)^2 &= (\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A)^2 + (\cos B - \cos A)^2, \\ &= \operatorname{sen}^2 B + 2\operatorname{sen} B \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A \\ &\qquad + \cos^2 B - 2\cos B\cos A + \cos^2 A \\ &= 2 + 2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - 2\cos A\cos B. \end{aligned}$$

Si igualamos los cuadrados de las dos distancias obtenemos nuestra fórmula.

De la fórmula de la suma para el coseno obtenemos algunas fórmulas que relacionan al seno y al coseno.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos x &= \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}}$$

Para probar la primera comenzamos con el lado derecho:

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

porque $\cos(-\pi/2) = 0$ y $-\operatorname{sen}(-\theta) = \operatorname{sen}\theta$ (con $\theta = \pi/2$).

La segunda relación se sigue de la primera haciendo $x = z + \pi/2$ en la primera relación. Entonces

$$\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(z + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

Esto prueba la segunda relación.

De igual manera, se puede probar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Esto se usará en el siguiente argumento.

La fórmula de la suma para el seno se puede obtener de la fórmula de la suma para el coseno mediante el recurso siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos A \cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(B - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \cos B, \end{aligned}$$

probándose así la fórmula de la suma para el seno.

Ejemplo. Hallar $\operatorname{sen}(\pi/12)$.
Escribimos
$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$
Entonces $\operatorname{sen}(\pi/12) = \operatorname{sen}(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\operatorname{sen}(\pi/4)$ y, sustituyendo los valores conocidos, hallamos
$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Ejemplo. Tenemos
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x,$$
pues
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen} x,$$
ya que $\cos\pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$.

En los ejercicios deducirán algunas otras fórmulas útiles para el seno y el coseno, especialmente:

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x,\\ \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,\\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.\end{gathered}}$$

Las recordarán mejor después de haberlas obtenido, así que no las deduciremos en el texto.

IV, §3. EJERCICIOS

1. Hallar $\operatorname{sen} 7\pi/12$. [*Idea:* Escribir $7\pi/12 = 4\pi/12 + 3\pi/12$.]
2. Hallar $\cos 7\pi/12$.
3. Hallar los valores siguientes:
   (a) $\operatorname{sen}\pi/12$ (b) $\cos\pi/12$
   (c) $\operatorname{sen} 5\pi/12$ (d) $\cos 5\pi/12$
   (e) $\operatorname{sen} 11\pi/12$ (f) $\cos 11\pi/12$
   (g) $\operatorname{sen} 10\pi/12$ (h) $\cos 10\pi/12$
4. Probar las fórmulas siguientes.
   (a) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
   (c) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
   [*Idea:* Para (c) y (d), comenzar con el caso particular de la fórmula de la suma para $\cos 2x$. Después usar la identidad
   $$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.]$$
5. Hallar una fórmula para $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Encontrar también una para $\cos 3x$.

6. Probar que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$, usando sólo la fórmula de la suma para el coseno.
7. Probar las fórmulas
   $$\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$
   $$\operatorname{sen} mx\cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$
   $$\cos mx\cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$
   [*Idea:* Expander el lado derecho mediante la fórmula de la suma y después cancelar todo lo que se pueda. El lado izquierdo se irá formando. Notar que, por ejemplo,
   $$\begin{aligned}\cos(m-n)x &= \cos(mx - nx)\\ &= \cos mx\cos nx + \operatorname{sen} mx\operatorname{sen} nx.]\end{aligned}$$

IV, §4. LAS DERIVADAS

Probaremos:

Teorema 4.1. *Las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *tienen derivadas y*

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x,\\ \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.\end{gathered}}$$

Demostración. Determinaremos primero la derivada de $\operatorname{sen} x$. Tenemos que ver el cociente de Newton de $\operatorname{sen} x$. Es
$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}.$$
Usando la fórmula de la suma para expander $\operatorname{sen}(x+h)$, vemos que el cociente de Newton es igual a
$$\frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}.$$
Juntamos los dos términos que incluyen a $\operatorname{sen} x$:
$$\frac{\cos x\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h}$$
y separamos nuestro cociente en una suma de dos términos:
$$\cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h} + \operatorname{sen} x\frac{\cos h - 1}{h}.$$
Ahora enfrentamos el problema de hallar el límite de
$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\cos h - 1}{h} \quad \text{cuando } h \text{ tiende a } 0.$$

Éste es un problema un poco más difícil que los otros encontrados hasta ahora. No podemos precisar de momento cuáles serán estos límites. En la sección siguiente probaremos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0.$$

Una vez conocidos estos límites, vemos de inmediato que el primer término tiende a $\cos x$ y el segundo término tiende a

$$(\operatorname{sen} x)\cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\cos x.$$

Esto prueba que

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}=\cos x.$$

Para hallar la derivada de $\cos x$ podríamos proceder de la misma manera y encontraríamos los mismos límites. Sin embargo hay un truco que evita esto.

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Hacemos $u = x+\frac{\pi}{2}$ y usamos la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=\frac{d(\operatorname{sen} u)}{du}\frac{du}{dx}.$$

Sin embargo, $du/dx = 1$, por lo que

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=\cos u=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen} x,$$

lo cual prueba nuestro teorema.

Observación. No es cierto que la derivada de la función $\operatorname{sen}^* x$ sea $\cos^* x$. Usen la regla de la cadena para hallar cuál es su derivada. La razón para usar la medición de ángulos en radianes es obtener una función $\operatorname{sen} x$ cuya derivada sea $\cos x$.

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen} 4x$ en el punto $x = \pi/16$. Esto se hace fácilmente. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 4x$. Entonces

$$f'(x) = 4\cos 4x.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = \pi/16$ es igual a

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right)=4\cos\left(\frac{4\pi}{16}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, tenemos

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{16}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{16}\right).$$

Teorema 4.2. *Tenemos*

$$\boxed{\frac{d(\tan x)}{dx}=1+\tan^2 x=\sec^2 x.}$$

Demostración. Usamos la regla para la derivada de un cociente, de modo que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)&=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}\\&=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.\end{aligned}$$

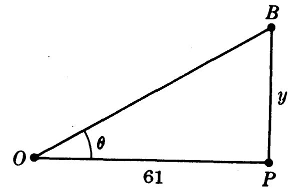
Pero también

$$\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x.$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplo. Un globo se eleva comenzando en un punto P. Un observador situado a 61 m dirige su mirada hacia el globo y el ángulo θ que forma el globo crece a razón de $\frac{1}{20}$ rad/seg. Hallar la razón con la cual está creciendo la distancia del globo al suelo cuando $\theta = \pi/4$.

La ilustración es como sigue, donde y es la distancia del globo al suelo.



Tenemos que $\tan\theta = y/61$, de donde

$$y = 61\cdot\tan\theta.$$

Queremos hallar la razón con la cual está creciendo y, i.e. queremos hallar dy/dt. Al tomar la derivada con respecto al tiempo t se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=61\frac{d\tan\theta}{dt}\\&=61(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

por el teorema 4.2 y la regla de la cadena. Por consiguiente,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\pi/4} = 61\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{20}$$

$$= 61(1+1)\frac{1}{20}$$

$$= 6.1\,\text{m/seg}.$$

Ésta es nuestra respuesta.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, hallar la razón con la cual está creciendo la distancia del globo al suelo cuando $\operatorname{sen}\theta = 0.2$.

Tenemos

$$\frac{dy}{dt} = 61\frac{d\tan\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 61(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $\operatorname{sen}\theta = 0.2$, tenemos que $\operatorname{sen}^2\theta = 0.04$, y

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0.96.$$

Por lo tanto,

$$\tan^2\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

Como nos dan $d\theta/dt = 1/20$, hallamos

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\operatorname{sen}\theta=0.2} = 61\left(1+\frac{1}{24}\right)\frac{1}{20}$$

$$= \frac{61}{20}\frac{25}{24}$$

$$= \frac{305}{96}\,\text{m/seg}.$$

IV, §4. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la derivada de $\cot x$?

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

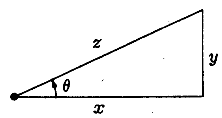
2. $\operatorname{sen}(3x)$
3. $\cos(5x)$
4. $\operatorname{sen}(4x^2+x)$
5. $\tan(x^3-5)$
6. $\tan(x^4-x^3)$
7. $\tan(\operatorname{sen} x)$
8. $\operatorname{sen}(\tan x)$
9. $\cos(\tan x)$

10. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto cuya abscisa es π?

Hallar la pendiente de las curvas siguientes en el punto indicado (damos sólo la abscisa del punto):

11. $y = \cos(3x)$ en $x = \pi/3$

12. $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/6$
13. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $x = 3\pi/4$
14. $y = \tan x$ en $x = -\pi/4$
15. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ en $x = -\pi/6$
16. Dar la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en el punto indicado.
    (a) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$
    (b) $y = \cos x$ en $x = \pi/6$
    (c) $y = \operatorname{sen} 2x$ en $x = \pi/4$
    (d) $y = \tan 3x$ en $x = \pi/4$
    (e) $y = 1/\operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$
    (f) $y = 1/\cos x$ en $x = \pi/4$
    (g) $y = 1/\tan x$ en $x = \pi/4$
    (h) $y = \tan\dfrac{x}{2}$ en $x = \pi/2$
    (i) $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ en $x = \pi/3$
    (j) $y = \cos\dfrac{\pi x}{3}$ en $x = 1$
    (k) $y = \operatorname{sen}\pi x$ en $x = \frac{1}{2}$
    (l) $y = \tan \pi x$ en $x = \frac{1}{6}$
17. En el siguiente triángulo rectángulo, suponer que θ está decreciendo a razón de $\frac{1}{30}$ rad/sec. Hallar cada una de las derivadas indicadas:



    (a) dy/dt, cuando $\theta = \pi/3$ y x es constante, $x = 12$.
    (b) dz/dt, cuando $\theta = \pi/4$ y y es constante, $y = 10\sqrt{2}$.
    (c) dx/dt, cuando $x = 1$ si x y y están cambiando, pero z es constante, $z = 2$.

    Recordar que θ está decreciendo, de modo que $d\theta/dt = -\frac{1}{30}$.
18. Una rueda de feria de 15 m de diámetro efectúa una revolución cada 2 min. Si el centro de la rueda está a 9 m del suelo, ¿con qué rapidez se mueve verticalmente un pasajero cuando la rueda está a 13 m sobre el suelo?
19. Un globo se está elevando desde el punto P. Un observador O, situado a 91 m, dirige su mirada hacia el globo, y el ángulo θ que forma con el globo crece a razón de 0.3 rad/seg. Hallar la razón con la que está creciendo la distancia del globo al suelo cuando
    (a) $\theta = \pi/4$,
    (b) $\theta = \pi/3$,
    (c) $\cos\theta = 0.2$,
    (d) $\operatorname{sen}\theta = 0.3$,
    (e) $\tan\theta = 4$.
20. Un aeroplano vuela horizontalmente sobre una recta a una rapidez de 1 000 km/hr, a una altura de 10 km. Una cámara automática está fotografiando un punto del suelo, justo adelante. ¿Con qué rapidez debe girar la cámara cuando el ángulo entre la trayectoria del avión y la recta de la cámara al punto es de 30°?
21. Una luz de un faro está localizada a 306 m de un rompeolas y gira a razón constante de 2 revoluciones por minuto.
    (a) ¿Con qué rapidez se va moviendo el punto de luz a lo largo del rompeolas en el punto más cercano al faro?
    (b) ¿Con qué rapidez se va moviendo el punto de luz en un punto situado a 153 m de este punto más cercano?

22. Un aeroplano va volando a una altura de 6 116 m siguiendo un curso horizontal que pasa directamente sobre un observador en el suelo. El observador nota que cuando el ángulo entre el suelo y su línea de visión es de $60°$, el ángulo está decreciendo a razón de $2°$ por segundo. ¿Cuál es la rapidez del avión?

23. Un asta tiene 9 m de altura y está ubicada a 9 m al este de un edificio alto. Si el sol sale a razón de $18°$ por hora, ¿con qué rapidez se va acortando la sombra del asta sobre el edificio cuando la elevación del sol es de $30°$? [*Idea:* La razón de salida del sol es la razón de cambio del ángulo de elevación θ del sol. Primero convertir los grados a radianes por hora, a saber

$$18\,\text{grad/hr} = 18\pi/180 = \pi/10\,\text{rad/hr}.$$

Si s es la longitud de la sombra, se tiene entonces que $\tan\theta = (9 - s)/9$.]

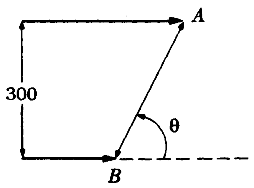
24. Un globo meteorológico se suelta desde el suelo a 460 m de un observador y se eleva verticalmente a razón constante de 76 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo entre la línea de visión del observador y el suelo, cuando el globo está a una altura de 612 m? Dar la respuesta en grados por minuto.

25. Una escalera de 9 m de largo está apoyada sobre una pared. Suponiendo que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 0.9 m/seg, ¿con qué rapidez está cambiando el ángulo entre la escalera y el suelo cuando la parte inferior de la escalera está a 4.5 m de la pared?

26. Un cohete parte del suelo a 612 m de un observador y se eleva verticalmente a razón constante de 30.6 m/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo entre la línea de visión del observador y el suelo, después de 20 seg? Dar la respuesta en grados por segundo.

27. Una cometa a una altura de 60 m se mueve horizontalmente a razón de 6 m/seg. ¿A qué razón está cambiando el ángulo entre el cordel y el suelo cuando se han soltado 120 m de cordel?

28. Dos aeroplanos van volando en la misma dirección, a una altitud constante. En $t = 0$ el aeroplano A está 300 m verticalmente arriba del aeroplano B. El aeroplano A viaja a una rapidez constante de 180 m/seg, y B a una rapidez constante de 120 m/seg. Hallar la razón de cambio del ángulo de elevación θ de A respecto a B en el tiempo $t = 10$ seg.



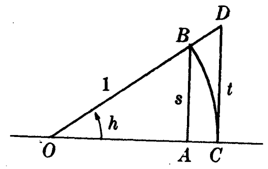
IV, §5. DOS LÍMITES BÁSICOS

Probaremos primero que

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.}$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0, y no obtenemos información al intentar algún procedimiento de cancelación de la manera como la obtuvimos con las potencias.

Supongamos primero que h es positivo y veamos el diagrama siguiente.



Tomando un círculo de radio 1 y un ángulo de h radianes, sea s la altura del triángulo pequeño OAB, y t la del triángulo grande OCD. Entonces, usando el triángulo pequeño OAB,

$$\operatorname{sen} h = \frac{s}{1} = s$$

y usando el triángulo grande, OCD,

$$\tan h = \frac{t}{1} = t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Puede verse que:

área del triángulo $OAB <$ área del sector $OCB <$ área del triángulo OCD.

La base OA del triángulo pequeño es igual a $\cos h$ y su altura AB es $\operatorname{sen} h$. La base OC del triángulo grande es igual a 1. Su altura CD es

$$t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}$ de la base por la altura.

El área del sector es la fracción $h/2\pi$ del área del círculo, que es π. Por lo tanto, el área del sector es $h/2$. Así se obtiene:

$$\frac{1}{2}\cos h \operatorname{sen} h < \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Se multiplica todo por 2 para obtener

$$\cos h \operatorname{sen} h < h < \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Como supusimos que $h > 0$, se sigue que $\operatorname{sen} h > 0$, y se dividen ambas desigualdades entre $\operatorname{sen} h$, con lo cual se obtiene

$$\cos h < \frac{h}{\operatorname{sen} h} < \frac{1}{\cos h}.$$

Conforme h tiende a 0, tanto $\cos h$ como $1/\cos h$ tienden a 1. Así $h/\operatorname{sen} h$ está atrapado entre dos cantidades que tienden a 1, por lo que $h/\operatorname{sen} h$ también debe tender a 1. Así podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\operatorname{sen} h} = 1.$$

Como

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} = \frac{1}{h/\operatorname{sen} h}$$

y el límite de un cociente es el cociente de los límites, se sigue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

como queríamos demostrar.

Ya calculamos nuestro límite cuando $h > 0$. Suponiendo ahora que $h < 0$, podemos escribir

$$h = -k$$

con $k > 0$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(-k)}{-k} = \frac{-\operatorname{sen} k}{-k} = \frac{\operatorname{sen} k}{k}.$$

Cuando h tiende a 0 también lo hace k, por lo cual estamos reducidos al caso anterior, pues $k > 0$.

Falta probar el límite

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)}\\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}\\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)}\\ &= -\frac{\operatorname{sen} h}{h}(\operatorname{sen} h)\frac{1}{\cos h + 1}.\end{aligned}$$

Usaremos la propiedad acerca del producto de los límites. Tenemos un producto de tres factores. El primero es

$$-\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

y tiende a -1 cuando h tiende a 0.

El segundo es $\operatorname{sen} h$ y tiende a 0 cuando h tiende a 0.

El tercero es

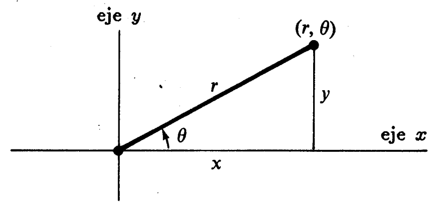
$$\frac{1}{\cos h + 1}$$

y su límite es $\frac{1}{2}$ cuando h tiende a 0.

Por lo tanto, el límite del producto es 0 y ¡todo está probado!

IV, §6. COORDENADAS POLARES

Además de describir un punto en el plano mediante sus coordenadas respecto a dos ejes perpendiculares, también las podemos describir como sigue. Trazamos un rayo entre el punto y un origen dado. El **ángulo** θ que forma este rayo con el eje horizontal y la **distancia** r entre el punto y el origen determinan nuestro punto. Así, el punto está descrito por un par de números (r, θ), que se llaman sus **coordenadas polares**.



Si tenemos los ejes usuales y x y y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, puede verse que

$$\boxed{\frac{x}{r} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta,}$$

de donde

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta.}$$

Esto permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Se sobreentiende que r siempre es ≥ 0. En términos de las coordenadas ordinarias tenemos

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Por Pitágoras, r es la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Nótese que la distancia es siempre ≥ 0.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas ordinarias son $(1, \sqrt{3})$.

Tenemos que $x = 1$ y $y = \sqrt{3}$, de modo que $r = \sqrt{1+3} = 2$. Además

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto $\theta = \pi/3$, y las coordenadas polares son $(2, \pi/3)$.

Observamos que se puede tener varias coordenadas polares que correspondan al mismo punto. El punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta + 2\pi)$ es el mismo punto que (r, θ). Así, en el ejemplo anterior, $(2, \pi/3+2\pi)$ también serían coordenadas polares para nuestro punto. En la práctica es común usar el valor para el ángulo que está entre 0 y 2π.

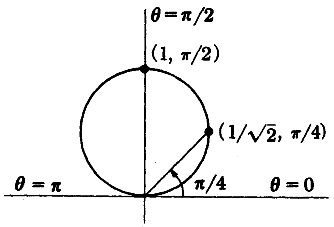
Supongan que un insecto viaja en un plano. Su posición está completamente determinada si conocemos el ángulo θ y la distancia del insecto al origen, esto es, si conocemos las coordenadas polares. Si la distancia r al origen está dada como función de θ, entonces el insecto está viajando a lo largo de una curva y es posible trazar esta curva.

Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la función $r = \operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$.

Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $\operatorname{sen}\theta < 0$ y, por lo tanto, para dicha θ no se obtendrá un punto sobre la curva. A continuación haremos una tabla de valores. Consideramos intervalos de θ tales que $\operatorname{sen}\theta$ siempre crezca o siempre decrezca en esos intervalos. Esto indicará si el punto se mueve alejándose del origen o acercándose al origen, pues r es la distancia del punto al origen. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $\operatorname{sen}\theta$ se pueden considerar de longitud $\pi/2$. Así hallamos la tabla siguiente:

θ	$\operatorname{sen}\theta = r$
crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$1\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$

Expresado en palabras: conforme θ crece de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen}\theta$ y, por lo tanto, r crecen hasta que r llega a 1. Conforme θ crece de $\pi/2$ a π, $\operatorname{sen}\theta$ y por lo tanto r decrecen de 1 a 0. Por consiguiente, la gráfica se ve así.



Hemos trazado la gráfica como un círculo. En realidad no se sabe si es o no un círculo.

Ejemplo 3. Cambiar la ecuación

$$\boxed{r = \operatorname{sen}\theta}$$

a coordenadas rectangulares.

Sustituimos las expresiones

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

en la ecuación polar, para obtener

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Es obvio que esta sustitución es válida sólo cuando $r \ne 0$, i.e. $r > 0$. Después podemos simplificar la ecuación recién obtenida multiplicando ambos lados por $\sqrt{x^2+y^2}$. Entonces obtenemos

$$x^2 + y^2 = y.$$

Por el capítulo II se sabe que si se completa el cuadrado, ésta es la ecuación de un círculo. Recordemos aquí como se hace eso. Escribimos la ecuación en la forma

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Nos gustaría que esta ecuación tuviera la forma

$$x^2 + (y-b)^2 = c^2,$$

pues así se sabría de manera inmediata que se trata de un círculo con centro en $(0, b)$ y radio c. Sabemos que

$$(y-b)^2 = y^2 - 2by + b^2.$$

Por lo tanto, hacemos $2b = 1$ y $b = \frac{1}{2}$. Entonces

$$x^2 + y^2 - y = x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}$$

ya que se cancela $\frac{1}{4}$. Así, la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 - y = 0}$$

es equivalente a

$$\boxed{x^2 + (y-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.}$$

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$. El punto correspondiente a la coordenada polar $r = 0$ es el punto con coordenadas rectangulares $x = 0$ y $y = 0$.

Ejemplo 4. La ecuación del círculo de radio 3 y centro en el origen en coordenadas polares es simplemente

$$r = 3 \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 3 \quad \text{o} \quad x^2+y^2 = 9.$$

Esto expresa la condición de que esa distancia del punto (x, y) al origen es la constante 3. El ángulo θ puede ser arbitrario.

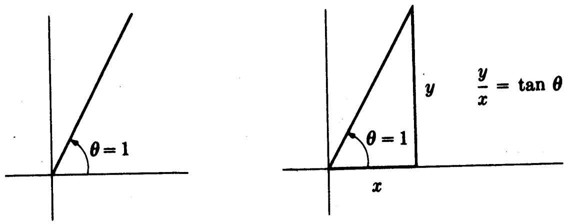
Ejemplo 5. Considerar la ecuación $\theta = 1$ en coordenadas polares. Un punto con coordenadas polares (r, θ) satisface esta ecuación si y sólo si su ángulo θ es 1 y no hay restricción en su coordenada r, i.e. $r \geq 0$. Así, geométricamente este conjunto de puntos se puede describir como una semirrecta, o un rayo, como en la figura (a) de la página siguiente.

Por la definición de tangente, si (x, y) son las coordenadas ordinarias de un punto sobre este rayo y $y \neq 0$, entonces

$$y/x = \tan 1 \quad \text{y} \quad x > 0,$$

de donde

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x > 0.$$



(a) (b)

Por supuesto, el punto con $x = y = 0$ también está sobre el rayo. Recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas polares (x, y) satisfacen

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

están sobre el rayo. Por lo tanto, el rayo definido en coordenadas polares por medio de la ecuación $\theta = 1$ está definido en coordenadas ordinarias mediante el par de condiciones

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

En lugar de 1 se podría tomar cualquier número. Por ejemplo, el rayo definido por la ecuación $\theta = \pi/6$ en coordenadas polares también está definido por el par de condiciones

$$y = (\tan \pi/6)x \quad \text{y} \quad x \geq 0.$$

Dado que $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, podemos escribir el par equivalente de condiciones

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{y} \quad x \geq 0.$$

Nótese que no hay una manera más sencilla de expresar $\tan 1$ que escribir precisamente $\tan 1$. Sólo al tratar con múltiplos fraccionarios de π tenemos la posibilidad de escribir las funciones trigonométricas en términos de raíces, como $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$.

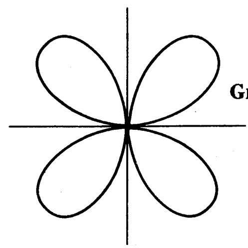
Ejemplo 6. Esbocemos la curva dada en coordenadas polares por medio de la ecuación

$$r = |\operatorname{sen} 2\theta|.$$

El signo de valor absoluto hace que el lado derecho sea siempre ≥ 0, y así existe un valor de r para todo valor de θ. Las regiones de crecimiento y decrecimiento para $\operatorname{sen} 2\theta$ ocurrirán cuando 2θ varíe en intervalos de longitud $\pi/2$. Por lo tanto, es natural ver intervalos para θ de longitud $\pi/4$. Hagamos ahora una tabla del comportamiento de crecimiento y de decrecimiento de $|\operatorname{sen} 2\theta|$ y r sobre dichos intervalos.

θ	$r = \lvert\operatorname{sen} 2\theta\rvert$
crec. de 0 a $\pi/4$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/4$ a $\pi/2$	dec. de 1 a 0
crec. de $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. de 0 a 1
crec. de $3\pi/4$ a π	dec. de 1 a 0
y así sucesivamente	

Entonces la gráfica se ve así:


Gráfica de $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$

Debido al signo de valor absoluto, para cualquier valor de θ se obtiene un valor para r que es ≥ 0. De acuerdo con nuestra convención, si queremos graficar

$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

sin el signo de valor absoluto, entonces hemos de omitir aquellas porciones de la gráfica anterior para las cuales $\operatorname{sen} 2\theta$ es negativo, i.e. aquellas porciones de la gráfica para las que

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

y

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

Así, la gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ se vería como en la figura siguiente.

Ejemplo 7. Queremos trazar la curva dada en coordenadas polares por medio de la ecuación

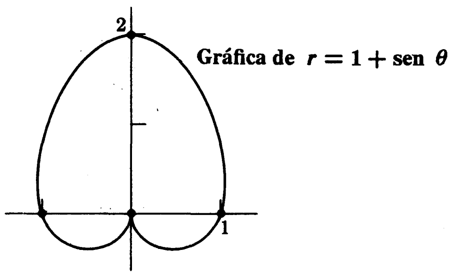
$$r = 1 + \operatorname{sen} \theta.$$

Vemos el comportamiento de r cuando θ varía en los intervalos

$$[0, \pi/2], \quad [\pi/2, \pi], \quad [\pi, 3\pi/2], \quad [3\pi/2, 2\pi].$$

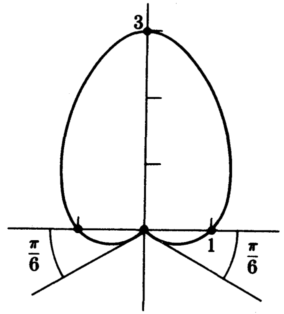
θ	$\operatorname{sen} \theta$	r
crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1	crec. de 1 a 2
crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0	dec. de 2 a 1
crec. de π a $3\pi/2$	dec. de 0 a -1	dec. de 1 a 0
crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0	crec. de 0 a 1

De este modo, la gráfica se ve aproximadamente como sigue:



Ejemplo 8. Veamos la ecuación ligeramente diferente

$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta.$$



Funcionará un análisis similar, pero debemos tener cuidado con la posibilidad de que la expresión del lado derecho sea negativa. De acuerdo con nuestra convención, esto no produciría un punto, pues suponemos que $r \geq 0$ en coordenadas polares. Así, cuando $2 \operatorname{sen} \theta < -1$, no se obtienen puntos. Esto ocurre precisamente en el intervalo

$$\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6}.$$

La gráfica se verá entonces como en la figura de la página anterior, donde hemos trazado también los rayos que determinan los ángulos de $\dfrac{7\pi}{6}$ y $\dfrac{11\pi}{6}$.

IV, §6. EJERCICIOS

1. Localizar los puntos siguientes en coordenadas polares:
   (a) $(2, \pi/4)$ (b) $(3, \pi/6)$ (c) $(1, -\pi/4)$ (d) $(2, -3\pi/6)$
2. Seguir las mismas instrucciones que en el ejercicio 1.
   (a) $(1, 1)$ (b) $(4, -3)$
   (Éstas son coordenadas polares. Exhibir de manera aproximada el ángulo representado por las coordenadas polares dadas.)
3. Hallar las coordenadas polares para los puntos siguientes dados en las coordenadas usuales de abscisa y ordenada:
   (a) $(1, 1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(3, 3\sqrt{3})$ (d) $(-1, 0)$
4. Trazar las curvas siguientes y poner la ecuación en coordenadas rectangulares.
   (a) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ (b) $r = 3 \cos \theta$
5. Cambiar lo siguiente a coordenadas rectangulares y trazar la curva. Se supone que $a > 0$.
   (a) $r = a \operatorname{sen} \theta$ (b) $r = a \cos \theta$
   (c) $r = 2a \operatorname{sen} \theta$ (d) $r = 2a \cos \theta$

Trazar las gráficas de las curvas siguientes dadas en coordenadas polares

6. $r^2 = \cos\theta$
7. $r^2 = \operatorname{sen}\theta$
8. (a) $r = \operatorname{sen}^2\theta$ (b) $r = \cos^2\theta$
9. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta$
10. $r = 5$
11. $r = 4$
12. (a) $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
13. $r = 3/\cos\theta$
14. $r = 1 + \cos\theta$
15. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
16. $r = 1 - \cos\theta$
17. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$
18. $r = \operatorname{sen} 3\theta$
19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$
20. $r = \cos 2\theta$
21. $r = \cos 3\theta$
22. $r = |\cos 2\theta|$
23. $r = |\operatorname{sen} 3\theta|$
24. $r = |\cos 3\theta|$
25. $r = \theta$
26. $r = 1/\theta$

En los tres problemas siguientes poner la ecuación en coordenadas rectangulares y trazar la curva.

27. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$
28. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$
29. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$

Trazar las curvas siguientes dadas en coordenadas polares.

30. $r = \tan\theta$
31. $r = 5 + 2\operatorname{sen}\theta$
32. $r = |1 + 2\cos\theta|$
33. (a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
(b) $r = 2 - \operatorname{sen} 2\theta$
34. $\theta = \pi$
35. $\theta = \pi/2$
36. $\theta = -\pi/2$
37. $\theta = 5\pi/4$
38. $\theta = 3\pi/2$
39. $\theta = 3\pi/4$

CAPÍTULO V

El teorema del valor medio

Dada una curva $y = f(x)$, usaremos la derivada para obtener información acerca de la curva. Por ejemplo, hallaremos el máximo y el mínimo de la gráfica y las regiones donde la curva crece o decrece. Usaremos el teorema del valor medio, que es fundamental en la teoría de las derivadas.

V, §1. TEOREMA DEL MÁXIMO Y EL MÍNIMO

Definición. Sea f una función diferenciable. Un **punto crítico** de f es un número c tal que

$$f'(c) = 0.$$

El hecho de que la derivada sea cero significa que la pendiente de la recta tangente es 0 y, por ello, que la recta tangente misma es horizontal. He aquí tres ejemplos de este fenómeno.

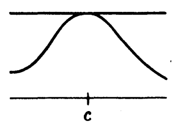


Figura 1

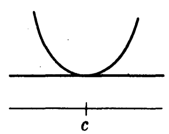


Figura 2

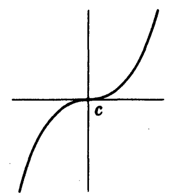


Figura 3

El tercer ejemplo es una función como $f(x) = x^3$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2$ y, por lo tanto, cuando $x = 0$, $f'(0) = 0$.