CAPÍTULO IX

Integración

En este capítulo resolveremos de manera más o menos simultánea los problemas siguientes:

(1) Dada una función $f(x)$, hallar una función $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Esto es lo inverso de la diferenciación y se llama integración.

(2) Dada una función $f(x)$ que sea ≥ 0, dar una definición de área bajo la curva $y = f(x)$ que no recurra a la intuición geométrica.

En realidad, en este capítulo damos las ideas que dan origen a las soluciones de nuestros dos problemas. Las técnicas que nos permiten calcular realmente cuando se dan datos específicos se postergarán para el capítulo siguiente.

Al desarrollar el problema (2) seguiremos una idea de Arquímedes. Se trata de aproximar la función f mediante funciones horizontales, y el área bajo f mediante la suma de pequeños rectángulos.

IX, §1. LA INTEGRAL INDEFINIDA

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo.

Definición. Una **integral indefinida** para f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en el intervalo.}$$

Si $G(x)$ es otra integral indefinida de f, entonces también $G'(x) = f(x)$. Por lo tanto, la derivada de la diferencia $F - G$ es 0:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

En consecuencia, por el corolario 3.3 del capítulo V, existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Ejemplo 1. Una integral indefinida para $\cos x$ sería $\operatorname{sen} x$. Pero también $\operatorname{sen} x + 5$ es una integral indefinida para $\cos x$.

Ejemplo 2. $\log x$ es una integral indefinida para $1/x$, y también lo es $\log x + 10$ o $\log x - \pi$.

En el capítulo siguiente se desarrollarán técnicas para hallar integrales indefinidas. Aquí simplemente observamos que cada vez que se prueba una fórmula para una derivada, tiene una análoga para la integral.

Es costumbre denotar una integral indefinida de una función f por

$$\int f \quad \text{o} \quad \int f(x)\,dx.$$

En esta segunda notación, la dx carece de sentido por sí misma. Es la expresión completa $\int f(x)\,dx$ la que tiene sentido. Cuando estudiemos el método de la sustitución en el siguiente capítulo, confirmaremos lo práctico de nuestra notación.

Haremos ahora una tabla de algunas integrales indefinidas usando la información obtenida sobre las derivadas.

Sea n un entero, $n \neq -1$. Entonces tenemos

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

Si $n = -1$, entonces

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log x.}$$

(Esto es cierto sólo en el intervalo $x > 0$.)

En el intervalo $x > 0$ tenemos además

$$\boxed{\int x^c\,dx = \frac{x^{c+1}}{c+1}}$$

para cualquier número $c \neq -1$.

Las siguientes integrales indefinidas son válidas para todo x.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x, & \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x, \\ \int e^x\,dx = e^x, & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x. \end{array}}$$

Finalmente, para $-1 < x < 1$ tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x.$$

En la práctica se omite con frecuencia el intervalo en el cual están definidas las diferentes funciones con las que trabajamos. Sin embargo, debemos tenerlo presente en cualquier problema específico. Por ejemplo, si escribimos

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3},$$

esto es válido para $x > 0$ y también es válido para $x < 0$. Pero 0 no puede estar en ningún intervalo de definición de nuestra función. Así, podríamos tener

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3} + 5$$

cuando $x < 0$, y

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3} - 2$$

cuando $x > 0$. También se podrían usar otras constantes cualesquiera además de 5 y -2.

Acordemos que las integrales indefinidas están definidas sólo sobre intervalos. Así, al considerar la función $1/x$, tenemos que considerar **separadamente** los casos $x > 0$ y $x < 0$. Para $x > 0$ ya observamos que $\log x$ es una integral indefinida. Sucede que también para el intervalo $x < 0$ podemos encontrar una integral indefinida, y de hecho tenemos

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x), \quad \text{para} \quad x < 0.}$$

Observen que, cuando $x < 0$, $-x$ es positivo, y así $\log(-x)$ tiene sentido. Por la regla de la cadena, la derivada de $\log(-x)$ es igual a $1/x$; a saber, sea $u = -x$. Entonces $du/dx = -1$, y

$$\frac{d\log(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Para $x < 0$, cualquier otra integral indefinida está dada por

$$\log(-x) + C,$$

donde C es una constante.

A veces se dice que, para todos los casos,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C.$$

Con nuestras convenciones no atribuimos significado a esto, pues nuestras funciones no están definidas sobre todos los intervalos (lo impide la ausencia del punto 0). En todo caso, la fórmula sería **falsa**. En efecto, para $x < 0$ tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C_1,$$

y para $x > 0$ tenemos

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C_2.$$

Sin embargo, las dos constantes no son iguales necesariamente, y, por lo tanto, no podemos escribir

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$$

para todos los casos. Esta fórmula es cierta sólo sobre un intervalo que no contenga a 0.

IX, §1. EJERCICIOS

Hallar integrales indefinidas para las funciones siguientes:

1. $\operatorname{sen} 2x$
2. $\cos 3x$
3. $\dfrac{1}{x+1}$
4. $\dfrac{1}{x+2}$

(En estos últimos dos problemas, especificar los intervalos sobre los cuales se halla la integral indefinida.)

IX, §2. FUNCIONES CONTINUAS

Definición. Sea $f(x)$ una función. Diremos que f es **continua** si

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

para todo x para el cual está definida la función.

Se sobreentiende que, al tomar el límite, sólo se consideran valores de h para los cuales $f(x+h)$ está definida. Por ejemplo, si f está definida en un intervalo

$$a \le x \le b$$

(suponiendo que $a < b$), entonces diríamos que f es continua en a si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = f(a).$$

No podemos tomar $h < 0$, ya que la función no estaría definida para $a + h$ si $h < 0$.

En términos geométricos, una función es continua si no hay cortes en su gráfica. Todas las funciones diferenciables son continuas. Ya habíamos observado este hecho, pues si un cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tiene un límite, entonces el numerador $f(x+h) - f(x)$ debe tender a 0, puesto que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h\to 0} h\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Las siguientes son gráficas de funciones que no son continuas.

En la figura 1 tenemos la gráfica de una función como

$$f(x) = -1 \quad \text{si} \quad x \le 0,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

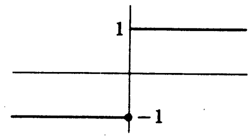


Figura 1

Vemos que

$$f(a+h) = f(h) = 1$$

para todo $h > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = 1,$$

lo que no es igual a $f(0)$.

Un fenómeno similar ocurre en la figura 2, en donde hay cortes. (Ver el ejemplo 6 del capítulo III, §2.)

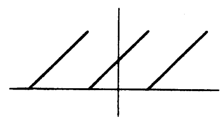


Figura 2

IX, §3. ÁREA

Sean $a < b$ dos números y sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $a \le x \le b$. Este intervalo cerrado se denota por $[a, b]$.

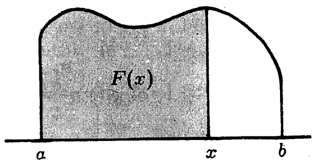
Deseamos hallar una función $F(x)$ que sea diferenciable en este intervalo y tal que

$$F'(x) = f(x).$$

En esta sección apelamos a nuestra intuición geométrica respecto al área. *Suponemos que* $f(x) \ge 0$ *para todo* x *en el intervalo.* Sea:

$F(x) =$ medida numérica del área bajo la gráfica de f entre a y x.

La figura siguiente ilustra esto.



Tenemos entonces que $F(a) = 0$. El área entre a y a es 0.

Teorema 3.1. *La función $F(x)$ es diferenciable, y su derivada es $f(x)$.*

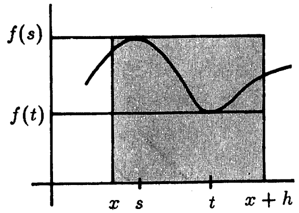
Demostración. Dado que definimos geométricamente a F, tendremos que argumentar geométricamente.

Tenemos que considerar el cociente de Newton

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Supongamos primero que x no es igual al punto extremo b, y supongamos además que consideramos solamente valores de $h > 0$.

Entonces, $F(x+h) - F(x)$ es el área entre x y $x+h$, lo cual, representado en una figura, se vería así.



El área sombreada representa $F(x+h) - F(x)$.

Sea s un punto, en el intervalo cerrado $[x, x+h]$, que es un máximo para nuestra función f *en ese pequeño intervalo.* Y sea t un punto, en el mismo intervalo cerrado, que es un mínimo para f en ese intervalo. Así,

$$f(t) \leq f(u) \leq f(s)$$

para todo u que satisfaga

$$x \leq u \leq x+h.$$

(Estamos forzados a usar otra letra, u, pues ya se usó x.)

El área bajo la curva entre x y $x+h$ es mayor que el área del pequeño rectángulo de la figura anterior, i.e. el rectángulo que tiene base h y altura $f(t)$.

El área bajo la curva entre x y $x+h$ es menor que el área del rectángulo grande, i.e. el rectángulo que tiene base h y altura $f(s)$.

Esto nos da

$$h \cdot f(t) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \cdot f(s).$$

Dividiendo entre el número positivo h se tiene

$$f(t) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(s).$$

Como s y t están entre x y $x+h$, cuando h tiende a 0 tanto $f(s)$ como $f(t)$ tienden a $f(x)$. Por lo tanto, el cociente de Newton para F está comprimido entre dos números que tienden a $f(x)$, de modo que también debe tender a $f(x)$, y hemos probado el teorema 3.1 cuando $h > 0$.

La demostración es esencialmente la misma que aquella que usamos para obtener la derivada de $\log x$. La única diferencia en este caso es que escogimos un máximo y un mínimo sin poder dar un valor explícito para ellos, como lo hicimos para la función $1/x$. Aparte de esto, no hay diferencia en los argumentos.

Si $x = b$, vemos valores negativos para h. El argumento en ese caso es completamente análogo al que escribimos en detalle, y de nuevo hallamos que el cociente de Newton de F está comprimido entre $f(s)$ y $f(t)$. Lo dejamos como ejercicio.

Sabemos ahora que si $F(x)$ denota el área bajo la gráfica de f entre a y x, entonces

$$F'(x) = f(x).$$

Podemos calcular el área en la práctica mediante la propiedad que aparece en el cuadro de la página siguiente.

> *Sea G cualquier función en el intervalo $a \leq x \leq b$ tal que*
>
> $$G'(x) = f(x).$$
>
> *Entonces el área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ es igual a*
>
> $$G(b) - G(a).$$

Demostración. Como $F'(x) = G'(x)$ para todo x, las dos funciones, F y G, tienen la misma derivada en el intervalo. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{para todo } x.$$

Sea $x = a$. Obtenemos

$$0 = F(a) = G(a) + C.$$

Esto muestra que $C = -G(a)$. Por lo tanto, al hacer $x = b$ se tiene

$$F(b) = G(b) - G(a).$$

Así, el área bajo la curva entre a y b es $G(b) - G(a)$. En la práctica es muy útil saber esto pues usualmente podemos adivinar la función G.

Ejemplo 1. Hallar el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Sea $f(x) = x^2$. Si $G(x) = x^3/3$, entonces $G'(x) = f(x)$. Por lo tanto, el área bajo la curva entre 1 y 2 es

$$G(2) - G(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ejemplo 2. Hallar el área bajo un arco de la función $\operatorname{sen} x$.

Tenemos que hallar el área bajo la curva entre 0 y π. Sea

$$G(x) = -\cos x.$$

Entonces $G'(x) = \operatorname{sen} x$, por lo que el área es

$$\begin{aligned} G(\pi) - G(0) &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Nótese lo asombroso que es esto. El arco de la curva seno que va de 0 a π parece una curva muy irracional y, sin embargo, ¡el área resulta ser el entero 2!.

IX, §3. EJERCICIOS

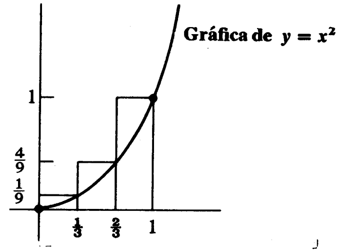
Hallar el área bajo las curvas dadas entre las cotas dadas.

1. $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 5$.
2. $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
3. $y = \cos x$, un arco.
4. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
5. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
6. $y = x^4$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
7. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

IX, §4. SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

Para mostrar la existencia de la integral, usamos la idea de aproximar las curvas por medio de funciones constantes.

Ejemplo. Consideren la función $f(x) = x^2$. Suponiendo que queremos hallar el área entre su gráfica y el eje x, de $x = 0$ a $x = 1$, se corta el intervalo $[0, 1]$ en intervalos pequeños y se aproxima la función por medio de funciones constantes, como se muestra en la figura siguiente.



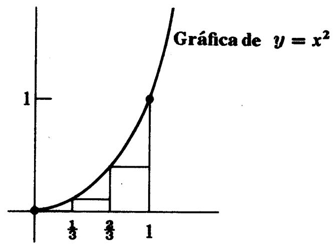
Hemos usado tres intervalos, de longitud $1/3$, y en cada uno de éstos tomamos la función constante cuyo valor es el cuadrado del extremo derecho del intervalo. Estos valores son, respectivamente,

$$f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9, \qquad f(1) = 1.$$

Así obtenemos tres rectángulos, situados sobre la curva $y = x^2$. Cada rectángulo tiene base de longitud $1/3$. La suma de las áreas de estos rectángulos es igual a

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + 1) = \tfrac{14}{27}.$$

También pudimos haber tomado estos rectángulos debajo de la curva si hubiéramos usado los valores de f en los extremos izquierdos de los intervalos. La ilustración es como sigue:



Las alturas de los tres rectángulos obtenidos así son, respectivamente,

$$f(0) = 0, \qquad f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9.$$

La suma de sus áreas es igual a

$$\tfrac{1}{3}(0 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}) = \tfrac{5}{27}.$$

De este modo, sabemos que el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ está entre $5/27$ y $14/27$. Ésta no es una muy buena aproximación a esta área, pero podemos obtener una mejor si usamos intervalos más pequeños, digamos de longitudes $1/4$, $1/5$ o $1/6$, o, en general, $1/n$. Escribamos la aproximación con intervalos de longitud $1/n$; los extremos de los intervalos serán entonces

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1.$$

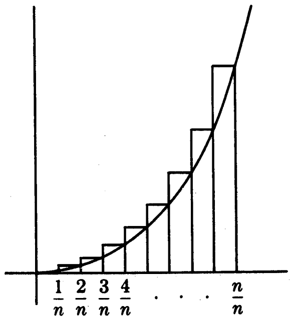
Si aproximamos la curva anterior, obtendremos rectángulos de alturas iguales a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2},\ f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^2}{n^2},\ \ldots,\ f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2},$$

respectivamente. El término general para la altura de dicho rectángulo es

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

En la figura siguiente dibujamos estos rectángulos.



Vemos en la figura que la aproximación a la curva ya está mucho mejor. El área de cada rectángulo es igual a

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

puesto que es igual a la base por la altura. La suma de estas áreas es igual a

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Dicha suma se llama **suma superior** porque se toma el máximo de la función x^2 sobre cada intervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Cuando tomamos n cada vez más grande, es plausible que dichas sumas aproximen al área bajo la gráfica de x^2 entre 0 y 1. En todo caso, esta suma superior es mayor que el área.

Escribiremos ahora en general las sumas que aproximan el área bajo una curva. Nótese que podemos tomar rectángulos que estén sobre la curva o bajo la curva, dando lugar así a sumas superiores y a sumas inferiores.

Sean a y b dos números, con $a \leq b$. Sea f una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Definición. Una **partición del intervalo** $[a, b]$ es una sucesión de números

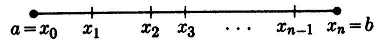
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b, \quad (\text{también se escribe } \{a = x_0, \ldots, x_n = b\})$$

entre a y b, tal que $x_i \leq x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Por ejemplo, podríamos tomar sólo dos números,

$$x_0 = a \quad \text{y} \quad x_1 = b.$$

A ésta se le llamará **partición trivial.**

Una partición divide nuestro intervalo en una multitud de pequeños intervalos $[x_i, x_{i+1}]$.



Dado cualquier número entre a y b, además de $x_0, \ldots, x_n$, podemos agregarlo a la partición para obtener una nueva partición que tenga un intervalo más pequeño. Si agregamos suficientes números intermedios, la partición se podrá hacer arbitrariamente pequeña.

Sea f una función definida en el intervalo

$$a \leq x \leq b$$

y continua. Si c_i es un punto entre x_i y x_{i+1}, entonces formamos la suma

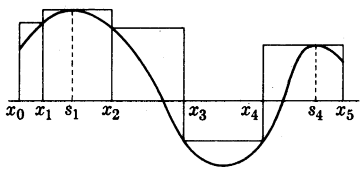
$$f(c_0)(x_1 - x_0) + f(c_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Dicha suma se llamará **suma de Riemann**. Cada valor $f(c_i)$ se puede ver como la altura de un rectángulo, y cada $(x_{i+1} - x_i)$ se puede ver como la longitud de la base.

Sea s_i un punto entre x_i y x_{i+1} tal que f tenga un **máximo** en este pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ en s_i. En otras palabras,

$$f(x) \leq f(s_i) \qquad \text{para} \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Entonces los rectángulos se ven como los de la siguiente figura, en donde sucede que s_0 es igual a x_1, $s_1 = s_1$ según se muestra, $s_2 = x_2$, $s_3 = x_4$, $s_4 = s_4$ según se muestra.



La idea principal que vamos a desarrollar es que, conforme vamos haciendo cada vez más pequeños los intervalos de nuestras particiones, la suma de las áreas de los rectángulos tenderá a un límite, y este límite se puede usar para definir el área bajo la curva.

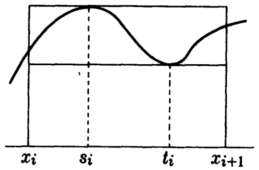
Si P es la partición dada por los números
$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n,$$
entonces la suma
$$f(s_0)(x_1 - x_0) + f(s_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(s_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$
se llamará **suma superior**, asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a, b]$. La denotaremos por los símbolos
$$U_a^b(P, f) \quad \text{o, simplemente,} \quad U(P, f).$$
Observen, sin embargo, que cuando $f(x)$ se vuelve negativo, el valor $f(s_i)$ puede ser negativo. Así, el rectángulo correspondiente da una contribución negativa
$$f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$
a la suma. Además, es aburrido escribir la suma repitiendo cada término, de modo que usaremos la abreviación
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$
para referirnos a la suma de los términos $f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$ cuando i varía de 0 a $n - 1$. Así tenemos:

Definición. La suma superior de f respecto a la partición es
$$U_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i),$$
donde $f(s_i)$ es el máximo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Nótese que los **índices** i van de 0 a $n - 1$. Así, la suma se toma para $i = 0, \ldots, n - 1$.

Por definición tenemos que
$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(s_i) = \text{máximo de } f \text{ en el intervalo } \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$
Entonces la suma podría escribirse también con la notación
$$\boxed{U_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\max_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) (x_{i+1} - x_i).}$$
En lugar de tomar un máximo s_i en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pudimos haber tomado un mínimo. Sea t_i un punto en este intervalo, tal que
$$f(t_i) \leq f(x) \quad \text{para} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$
Llamamos a la suma
$$f(t_0)(x_1 - x_0) + f(t_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$
suma inferior asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a, b]$. La suma inferior se denotará por
$$L_a^b(P, f) \quad \text{o, simplemente,} \quad L(P, f).$$
Así tenemos la

Definición. La suma inferior de f respecto a la partición es la suma
$$L_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i),$$
donde $f(t_i)$ es el mínimo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

En la figura siguiente hemos dibujado un término típico de la suma.



Podemos reescribir esta suma inferior usando una notación semejante a la usada en la suma superior. A saber, hacemos
$$\begin{aligned} \min_{[x_i, x_{i+1}]} f &= \text{mínimo de } f \text{ en el intervalo } \quad [x_i, x_{i+1}] \\ &= f(t_i). \end{aligned}$$
Entonces
$$\boxed{L_a^b(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\min_{[x_i, x_{i+1}]} f \right) (x_{i+1} - x_i).}$$
Para todos los números x en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos
$$f(t_i) \leq f(x) \leq f(s_i).$$
Como $x_{i+1} - x_i$ es ≥ 0, se sigue que cada término de la suma inferior es menor o igual que cada término de la suma superior. Entonces
$$L_a^b(P, f) \leq U_a^b(P, f).$$

Más aún, cualquier suma de Riemann tomada con puntos c_i (que no necesariamente sean máximos o mínimos) está entre la suma inferior y la suma superior.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$ y sea el intervalo $[0, 1]$. Escribir las sumas superior e inferior para la partición formada por $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

El mínimo de la función en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ está en 0, y $f(0) = 0$. El mínimo de la función en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ está en $\frac{1}{2}$, y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, la suma inferior es
$$L_0^1(P, f) = f(0)(\tfrac{1}{2} - 0) + f(\tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}.$$

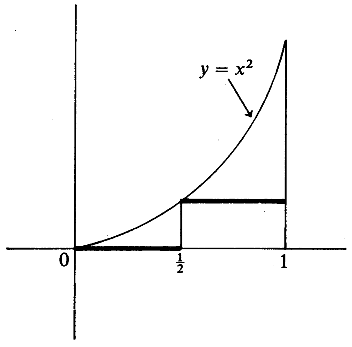


figura para la suma inferior

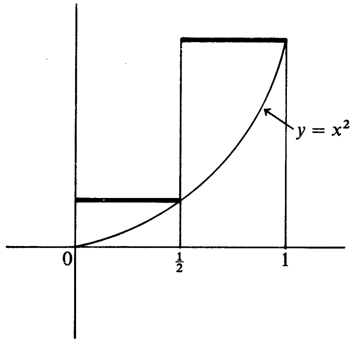


figura para la suma superior

El máximo de la función en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ está en $\frac{1}{2}$ y el máximo de la función en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ está en 1. Así, la suma superior es

$$U_0^1(P, f) = f(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} - 0) + f(1)(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}.$$

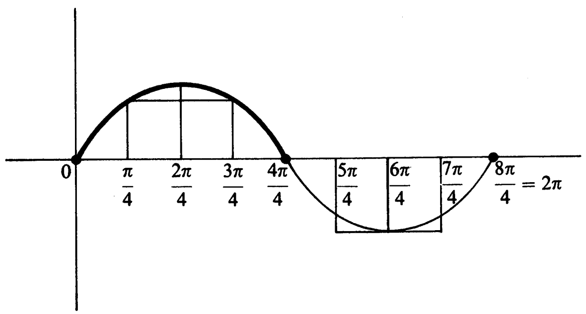
Hemos dado un valor numérico para las sumas superior e inferior. A menos que queramos compararlas explícitamente, podemos dejar la respuesta en la forma que está en el lado izquierdo de estas igualdades.

Ejemplo. Escribiremos ahora las sumas inferiores en otro caso particular, cuando la función es positiva y negativa en el intervalo.

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, sea el intervalo $[0, 2\pi]$, y sea la partición

$$P = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{8\pi}{4} \right\}.$$

Ilustramos esto en la figura siguiente.



Cada pequeño intervalo de la partición tiene longitud $\pi/4$. Escribamos la suma

inferior:

$$\begin{aligned} L(P, f) &= 0\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + 0\frac{\pi}{4} \\ &\quad + \left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Observen que el primer término de la suma inferior es 0 porque el mínimo de la función $\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi/4]$ es igual a 0. De manera análoga, el cuarto término también es 0, de modo que lo podemos omitir, pues $0 + A = A$ para todos los números A.

Observen además que:

$$\begin{aligned} \text{mínimo de } \operatorname{sen} x \text{ en el intervalo } [5\pi/4, 6\pi/4] &= \operatorname{sen} 6\pi/4 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Con números negativos tenemos, por ejemplo,

$$-1 = \operatorname{sen} 6\pi/4 < -\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} 5\pi/4.$$

Así, la suma inferior $L(P, f)$ contiene términos positivos y términos negativos. Los términos negativos representan menos $(-)$ el área de ciertos rectángulos, como se muestra en la figura.

¿Qué sucede con nuestras sumas cuando agregamos un nuevo punto a la partición? Veremos que la suma inferior crece y la suma superior decrece.

Teorema 4.1. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Sea*

$$P = (x_0, \ldots, x_n)$$

una partición de $[a, b]$. Sea $\overline{x}$ cualquier número en el intervalo y sea Q la partición obtenida de P al agregar $\overline{x}$ a $(x_0, \ldots, x_n)$. Entonces,

$$L_a^b(P, f) \leq L_a^b(Q, f) \leq U_a^b(Q, f) \leq U_a^b(P, f).$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, las sumas inferiores. Supongamos que el número $\overline{x}$ está entre x_j y x_{j+1}:

$$x_j \leq \overline{x} \leq x_{j+1}.$$

La suma inferior que formemos para P será igual que la suma inferior para Q, excepto que el término

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j)$$

se reemplazará ahora por dos términos. Si u es un mínimo para f en el intervalo entre x_j y $\overline{x}$, y v es un mínimo para f en el intervalo entre $\overline{x}$ y x_{j+1}, entonces estos dos términos son

$$f(u)(\overline{x} - x_j) + f(v)(x_{j+1} - \overline{x}).$$

Podemos escribir $f(t_j)(x_{j+1} - x_j)$ en la forma

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j) = f(t_j)(\bar{x} - x_j) + f(t_j)(x_{j+1} - \bar{x}).$$

Como $f(t_j) \leq f(u)$ y $f(t_j) \leq f(v)$ (pues t_j era un mínimo en todo el intervalo entre x_j y x_{j+1}), se sigue que

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j) \leq f(u)(\bar{x} - x_j) + f(v)(x_{j+1} - \bar{x}).$$

Así pues, cuando reemplazamos el término en la suma para P por los dos términos en la suma para Q, el valor de la contribución de estos dos términos crece. Como todos los otros términos son iguales, queda probada nuestra afirmación.

La afirmación respecto al hecho de que la suma superior decrece se deja como ejercicio. La demostración es muy parecida.

Como consecuencia de nuestro teorema, obtenemos:

Corolario 4.2. *Toda suma inferior es menor o igual que toda suma superior.*

Demostración. Sean P y Q dos particiones. Si agregamos a P todos los puntos de Q y agregamos a Q todos los puntos de P, obtenemos una partición R tal que todo punto de P es un punto de R y todo punto de Q es un punto de R. Así, R se obtuvo agregando puntos a P y a Q. En consecuencia, tenemos las desigualdades

$$L_a^b(P,f) \leq L_a^b(R,f) \leq U_a^b(R,f) \leq U_a^b(Q,f).$$

Esto prueba nuestra afirmación.

Ahora resulta natural preguntarnos si **existe un número único entre las sumas inferiores y las sumas superiores**. La respuesta es sí.

Teorema 4.3. *Sea f una función continua en $[a,b]$. Existe un número único que es mayor o igual que toda suma inferior y es menor o igual que toda suma superior.*

Definición. La integral definida de f entre a y b

$$\boxed{\int_a^b f}$$

es el único número que es mayor o igual que toda suma inferior y menor o igual que toda suma superior.

Usaremos una notación como

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_a^b f(t)\,dt.}$$

No importa cuál sea la letra que usemos, pero deberá ser la misma en ambos casos, i.e. en $f(x)\,dx$, $f(t)\,dt$ o $f(u)\,du$, etc.

No daremos los detalles de la demostración del teorema 4.3, la cual es tediosa. La técnica involucrada no se usará en ningún otro lugar en el curso.

Hay otra afirmación cuyo conocimiento resulta revelador. Sea P una partición,

$$x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n.$$

La máxima longitud de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ se llama **tamaño** de la partición. Por ejemplo, si cortamos el intervalo $[0,1]$ en n intervalos pequeños de la misma longitud $1/n$, entonces el tamaño de esta partición es $1/n$.

Teorema 4.4. *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces las sumas inferiores $L_a^b(P,f)$ y las sumas superiores $U_a^b(P,f)$ se acercan arbitrariamente a la integral*

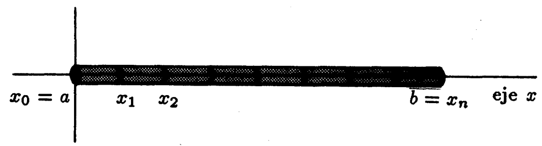
$$\int_a^b f$$

si el tamaño de la partición P es suficientemente pequeño.

De nuevo, no probaremos este teorema, pero dice, intuitivamente, que las sumas superior e inferior son buenas aproximaciones a la integral cuando el tamaño de la partición es suficientemente pequeño.

Ejemplo. Damos un ejemplo físico que ilustra la aplicación de las sumas superior e inferior, relacionando la densidad con la masa.

Considerar un intervalo $[a,b]$ con $0 \leq a < b$. Imaginemos este intervalo como una varilla, y sea f una función continua positiva definida en este intervalo. Interpretamos f como una densidad en la varilla, de modo que $f(x)$ es la densidad en x.



Dado

$$a \leq c \leq d \leq b,$$

denotamos por $M_c^d(f)$ la masa de la varilla entre c y d, correspondiente a la densidad dada f. Deseamos determinar un concepto matemático para representar $M_c^d(f)$. Si f es una densidad constante, con valor constante $K \geq 0$ en $[c,d]$, entonces la masa $M_c^d(f)$ deberá ser $K(d-c)$. Por otro lado, si g es otra densidad tal que

$$f(x) \leq g(x),$$

entonces ciertamente deberemos tener $M_c^d(f) \leq M_c^d(g)$. En particular, si k y K son constantes ≥ 0 tales que

$$k \leq f(x) \leq K$$

para x en el intervalo $[c, d]$, entonces la masa deberá satisfacer

$$k(d-c) \leq M_c^d(f) \leq K(d-c).$$

Finalmente, la masa deberá ser aditiva, esto es, la masa de dos piezas ajenas deberá ser la suma de la masa de las piezas. En particular,

$$M_a^c(f) + M_c^d(f) = M_a^d(f).$$

Veremos ahora que la masa de la varilla está dada por la integral de la densidad, esto es

$$\boxed{M_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Sea $f(t_i)$ el mínimo para f en el pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, y sea $f(s_i)$ el máximo para f en ese mismo intervalo pequeño. Entonces la masa de cada pieza de la varilla entre x_i y x_{i+1} satisface la desigualdad

$$f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \leq M_{x_i}^{x_{i+1}}(f) \leq f(s_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Sumando esto, hallamos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \leq M_a^b(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Las expresiones a la izquierda y a la derecha son las sumas inferior y superior para la integral, respectivamente. Como la integral es el único número entre la suma inferior y la suma superior, se sigue que

$$M_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

como queríamos mostrar.

IX, §4. EJERCICIOS

Escribir las sumas inferior y superior para las funciones e intervalos siguientes. Usar una partición tal que la longitud de cada intervalo pequeño sea (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{4}$, (d) $\frac{1}{n}$.

1. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$.
2. $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$.
3. $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$.
4. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

5. Sea $f(x) = 1/x$ y sea el intervalo $[1, 2]$. Sea n un entero positivo. Escribir la suma superior y la inferior usando la partición tal que la longitud de cada intervalo pequeño sea $1/n$.
6. Usando la definición de integral definida, probar que
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \log 2 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$
7. Sea $f(x) = \log x$. Sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior usando la partición del intervalo entre 1 y n formada por los enteros del 1 al n, i.e. la partición $(1, 2, \ldots, n)$.

IX, §5. EL TEOREMA FUNDAMENTAL

La integral satisface dos propiedades básicas que son muy parecidas a las que satisface el área. Enunciémoslas explícitamente.

Propiedad 1. *Si M y m son dos números tales que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo x en el intervalo $[b, c]$, entonces

$$m(c-b) \leq \int_b^c f \leq M(c-b).$$

Propiedad 2. *Tenemos*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

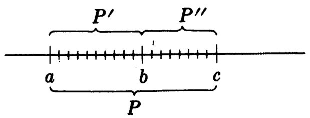
No daremos los detalles de las demostraciones de estas propiedades, pero haremos algunos comentarios que seguramente las aclararán.

Para la propiedad 1, supongamos que queremos verificar la desigualdad del lado izquierdo. Podemos tomar la partición trivial del intervalo $[b, c]$ formada precisamente por este intervalo. Entonces una suma inferior es ciertamente $\geq m(c-b)$. Como las sumas inferiores crecen cuando se toma una partición más fina, y como las sumas inferiores son a lo más iguales a la integral, vemos que la desigualdad de la izquierda

$$m(c-b) \leq \int_b^c f$$

es verdadera. La desigualdad del lado derecho de la propiedad 1 sé prueba de la misma manera.

Para la propiedad 2, supongan que $a \leq b \leq c$. Sea P una partición de tamaño suficientemente pequeño, tal que la suma inferior $L_a^c(P, f)$ aproxime muy de cerca la integral $\int_a^c f$. Es posible que el punto b no esté en esta partición. Podemos tomar una partición más fina insertando este punto b, según se muestra en la figura.



Entonces P, junto con b, forma particiones P' y P'' de los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$. Si P tiene tamaño suficientemente pequeño, entonces P' y P'' tienen tamaño pequeño, y las sumas inferiores

$$L_a^b(P',f) \quad \text{y} \quad L_b^c(P'',f)$$

dan buenas aproximaciones a las integrales

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_b^c f,$$

respectivamente. Pero tenemos

$$L_a^c(P',P'',f) = L_a^b(P',f) + L_b^c(P'',f).$$

Como $L_a^c(P',P'',f)$ es una aproximación de la integral

$$\int_a^c f,$$

se puede ver, pasando al límite, que

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

La propiedad 2 se formuló para $a < b < c$. Queremos ahora formularla cuando a, b y c se toman en cualquier orden. Para ello, suponemos que a y b son números en un intervalo donde f es continua, y $b < a$. **Definimos**

$$\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f.}$$

Entonces tenemos la **Propiedad 2 en general**:

Sean a, b y c tres números en un intervalo donde f sea continua. Entonces

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Demostración. Tenemos que distinguir cada caso. Supongamos por ejemplo que $b < a < c$. Entonces, por la propiedad original, para esta ordenación obtenemos

$$\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c = -\int_a^b + \int_a^c \quad \text{por definición.}$$

Sumando $\int_a^b$ en ambos lados se prueba la relación deseada. Todos los otros casos se pueden probar de manera análoga.

Teorema 5.1. *Sea f continua en un intervalo $[a,b]$. Sea*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F es diferenciable y su derivada es

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración. Tenemos que formar el cociente de Newton

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right),$$

y ver si tiende a un límite cuando $h \to 0$. (Si $x = a$, entonces se sobreentiende que $h > 0$, y si $x = b$, entonces $h < 0$. Si $a < x < b$, entonces h puede ser positivo o negativo. La demostración muestra entonces que f es diferenciable por la derecha en a y diferenciable por la izquierda en b).

Supongan por el momento que $h > 0$. Por la propiedad 2, aplicada a los números a, x y $x+h$, concluimos que el cociente de Newton es igual a

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^x f + \int_x^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f.$$

Esto reduce nuestra investigación del cociente de Newton al intervalo entre x y $x+h$.

Sea s un punto entre x y $x+h$ tal que f alcance un máximo en este pequeño intervalo $[x,x+h]$ y sea t un punto en este intervalo tal que f alcance un mínimo. Sea

$$m = f(t) \quad \text{y} \quad M = f(s)$$

y, aplicando la propiedad 1 al intervalo $[x,x+h]$, se obtiene

$$f(t)(x+h-x) \le \int_x^{x+h} f \le f(s)(x+h-x),$$

que podemos reescribir como

$$f(t)\cdot h \le \int_x^{x+h} f \le f(s)\cdot h.$$

Al dividir entre el número positivo h se preservan las desigualdades y se obtiene

$$f(t) \le \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \le f(s).$$

Como s y t están entre x y $x+h$, debemos tener (por continuidad)

$$\lim_{h\to 0} f(s) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} f(t) = f(x).$$

Así, nuestro cociente de Newton está comprimido entre dos números que tienden a $f(x)$ y, por lo tanto, debe tender a $f(x)$, y el teorema queda probado para $h > 0$.

El argumento para cuando $h < 0$ es completamente análogo, y lo omitimos.

IX, §5. EJERCICIOS

1. Usando el teorema 5.1, probar que si f es continua en un intervalo abierto que contenga a 0, entonces
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f = f(0).$$
[*Idea:* ¿Se puede interpretar el lado izquierdo como el límite de un cociente de Newton?]

2. Sea f continua en el intervalo $[a,b]$. Probar que existe algún número c en el intervalo tal que
$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$
[*Idea:* Aplicar el teorema del valor medio a $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$.]

CAPÍTULO X

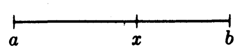
Propiedades de la integral

Éste es un capítulo corto. Muestra cómo se combina la integral con la suma y las desigualdades. No hay una buena fórmula para la integral de un producto. Lo más cercano es la integración por partes, pero la postergamos para el capítulo siguiente.

Conectar la integral con la derivada es lo que nos permite calcular integrales. El hecho de que dos funciones que tienen la misma derivada difieran en una constante, se explota a fondo una vez más.

X, §1. OTRAS CONEXIONES CON LA DERIVADA

Sea f una función continua en algún intervalo. Sean a y b dos puntos del intervalo tales que $a < b$, y sea F una función diferenciable en el intervalo y cuya derivada es f.



Por el teorema fundamental, las funciones
$$F(x) \quad \text{y} \quad \int_a^x f$$
tienen la misma derivada. Por lo tanto, existe una constante C tal que
$$\int_a^x f = F(x) + C \quad \text{para } \textit{todo } x \text{ en el intervalo.}$$

¿Cuál es esta constante? Si hacemos $x = a$, obtenemos

$$0 = \int_a^a f = F(a) + C,$$

de donde $C = -F(a)$. Tenemos también que

$$\int_a^b f = F(b) + C.$$

De esto obtenemos: *Si $dF/dx = f(x)$, entonces*

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a).}$$

Esto es sumamente útil en la práctica, pues por lo general podemos adivinar la función F y, una vez adivinada, podemos calcular la integral mediante esta relación.

Más aún, también es práctico usar la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Observación. El argumento que dimos para calcular C muestra que el valor $F(b) - F(a)$ no depende de la selección de la función F tal que $F'(x) = f(x)$. Pero quizá se quiera ver esto de otra manera. Supongan que también $G'(x) = f(x)$ para todo x en el intervalo. Entonces existe una constante C tal que

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para todo } x \text{ en el intervalo.}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + C - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a) \qquad \text{porque } C \text{ se cancela.} \end{aligned}$$

Finalmente, a la **integral indefinida** como

$$\int \operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{o} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

la llamaremos simplemente **integral**, pues el contexto aclarará su significado. Cuando tratamos con una **integral definida**

$$\int_a^b$$

a veces llamamos a los números a y b **límite inferior** y **límite superior**, respectivamente.

Ejemplo. Queremos hallar la integral

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx.$$

Aquí tenemos $f(x) = \operatorname{sen} x$, y la integral indefinida es

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = F(x) = -\cos x.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

Ejemplo. Supongan que se quiere hallar

$$\int_1^3 x^2\, dx.$$

Sea $F(x) = x^3/3$. Entonces $F'(x) = x^2$. Por lo tanto,

$$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Ejemplo. Hallemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Como $d\arctan x/dx = 1/1 + x^2$, tenemos la integral indefinida

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \arctan x\Big|_0^1 \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \pi/4. \end{aligned}$$

Ejemplo. Probar la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log n.$$

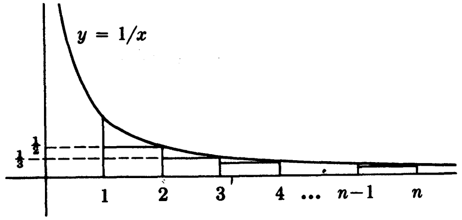
Para hacerlo tratamos de identificar el lado izquierdo con una suma inferior y el lado derecho con una integral correspondiente. Tenemos la integral indefinida

$$\log x = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Sea $f(x) = 1/x$.

Sea $[a, b]$ el intervalo $[1, n]$, esto es, todo x con $1 \leq x \leq n$.

Sea la partición $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ formada de los enteros positivos de 1 a n.



Entonces

$$L(P, f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

pues la longitud de la base de cada rectángulo es igual a 1. El valor de la integral es

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^n = \log n - \log 1 = \log n.$$

Así obtenemos la desigualdad deseada porque una suma inferior es $\leq$ que la integral.

Al trabajar o probar desigualdades análogas, se debe dar:

La función $f(x)$;
El intervalo $[a, b]$ y el valor de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

La partición P del intervalo $[a, b]$.

Se deberá entonces identificar la suma con una suma inferior (o suma superior, como puede ser el caso) con respecto a los datos anteriores, obteniéndose así una comparación con la integral del tipo deseado.

Ejemplo. Por un método análogo se puede dar una desigualdad que tenga considerable interés práctico. Denotemos por $n!$ el producto de los primeros n enteros. Así,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Tenemos los primeros:

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 24 \cdot 5 = 120.$$

El ejercicio 10 mostrará cómo probar la desigualdad

$$\boxed{(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \leq n!}$$

Es divertido hacerlo, de modo que no lo haremos aquí en el texto.

El principio de estos ejemplos se aplica para comparar sumas de funciones con integrales, y las funciones pueden ser decrecientes como, por ejemplo, las funciones

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^{1/2}}, \quad \frac{1}{x^4}, \quad \text{etc.},$$

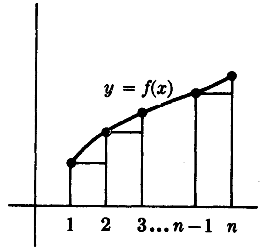
o pueden ser crecientes, como las funciones

$$x, \quad x^2, \quad x^4, \quad x^{1/3}.$$

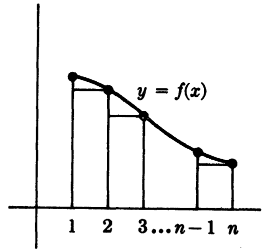
Las gráficas se pueden ver así, digamos sobre el intervalo $[1, n]$, donde n es un entero positivo, y la partición

$$P = \{1, \ldots, n\}$$

está formada de los enteros positivos del 1 al n.



Función creciente



Función decreciente

En dicho caso, la base de cada rectángulo tiene longitud 1. Por lo tanto, obtenemos las desigualdades, para f creciente:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(2) + \cdots + f(n),$$

y para f decreciente:

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1).$$

X, §1. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes:

1. $\int_1^2 x^5\,dx$
2. $\int_{-1}^1 x^{1/3}\,dx$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$
4. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$
5. Probar la desigualdades siguientes:
   (a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le \log n \le \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$
   (b) $\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n)^{1/2}} \le 2(\sqrt{n}-1)$
   (c) $2(\sqrt{n}-1) \le 1+\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{1/2}}$
6. Probar las desigualdades siguientes:
   (a) $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 \le \frac{n^3}{3} \le 1^2+2^2+\cdots+n^2$
   (b) $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3 \le \frac{n^4}{4} \le 1^3+2^3+\cdots+n^3$
   (c) $1^{1/4}+2^{1/4}+\cdots+(n-1)^{1/4} \le \frac{4}{5}n^{5/4} \le 1^{1/4}+2^{1/4}+\cdots+n^{1/4}$
7. Dar desigualdades análogas a las del ejercicio 6, para las sumas:
   (a) $\sum_{k=1}^{n-1} k^4$ (b) $\sum_{k=1}^{n-1} k^{1/3}$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k^5$ (d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$
8. Probar las desigualdades
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2}{n^2+k^2}.$$
   $\left[\textit{Idea}: \text{Escribir } \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{1+k^2/n^2}.\right]$ ¿Cuál es el intervalo? ¿Cuál es la partición?
9. Probar la desigualdad
$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \le \frac{1}{3}.$$
10. Para este ejercicio, verificar primero que, si hacemos
$$F(x) = x\log x - x,$$
   entonces $F'(x) = \log x$.
   (a) Evaluar la integral
$$\int_1^n \log x\,dx.$$
   (b) Comparar esta integral con las sumas superior e inferior asociadas con la partición $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ del intervalo $[1, n]$.
   (c) En la parte (b) habrán encontrado ciertas desigualdades de la forma
$$A \le B \le C.$$
   Usando el hecho de que
$$e^A \le e^B \le e^C,$$

probar la desigualdad siguiente:

$$\boxed{(n-1)! \le n^n e^{-n} e \le n!.}$$

Aquí denotamos por $n!$ el producto de los n primeros enteros.

X, §2. SUMAS

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas sobre algún intervalo, y sean $F(x)$ y $G(x)$ integrales (indefinidas) para f y g, respectivamente. Esto significa que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Como la derivada de una suma es la suma de las derivadas, vemos que $F+G$ es una integral para $f+g$; en otras palabras,

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x),$$

y entonces

$$\boxed{\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.}$$

De manera análoga, sea c un número. La derivada de $cF(x)$ es $cf(x)$. Por lo tanto,

$$\boxed{\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.}$$

Una constante se puede meter y sacar de una integral.

Ejemplo. Hallar la integral de $\operatorname{sen} x + 3x^4$.

Tenemos

$$\int(\operatorname{sen} x + 3x^4)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx + \int 3x^4\,dx$$
$$= -\cos x + 3x^5/5.$$

Cualquier fórmula que incluya a la integral indefinida produce una fórmula para la integral definida. Usando la misma notación que antes, supongamos que tenemos que hallar

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx.$$

Sabemos que es

$$[F(x)+G(x)]\Big|_a^b$$

lo cual es igual a

$$F(b)+G(b)-F(a)-G(a).$$

Así obtenemos la fórmula

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

De manera análoga, para cualquier constante c,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int_0^\pi [\operatorname{sen} x + 3x^4]\,dx.$$

Esta integral (definida) es igual a

$$\begin{aligned}-\cos x + 3x^5/5\Big|_0^\pi &= -\cos\pi + 3\pi^5/5 - (-\cos 0 + 0)\\ &= 1 + 3\pi^5/5 + 1\\ &= 2 + 3\pi^5/5.\end{aligned}$$

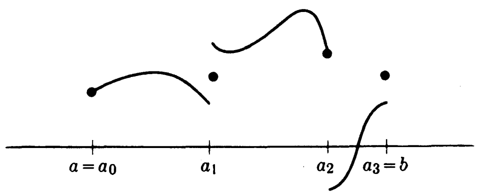
En algunas aplicaciones es posible encontrar una clase de funciones ligeramente más amplia que las funciones continuas. Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$. Diremos que f es **continua a trozos** en $[a,b]$ si existen números

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

y en cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ hay una función continua f_i tal que $f(x) = f_i(x)$ para $a_{i-1} < x < a_i$. Si así sucede, definimos la integral de f de a a b como la suma

$$\int_a^b f = \int_{a_0}^{a_1} f_1 + \int_{a_1}^{a_2} f_2 + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f_n.$$

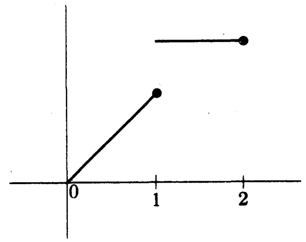
Una función continua a trozos se puede ver así:



Ejemplo. Sea f la función definida en el intervalo $[0,2]$ mediante las condiciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad \text{si} \quad 0 \le x \le 1,\\ f(x) &= 2 \quad \text{si} \quad 1 < x \le 2.\end{aligned}$$

La gráfica de f se ve así:



Para hallar la integral de f entre 0 y 2, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^2 f &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2\\ &= \tfrac{1}{2} + (4-2) = \tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

También podemos hallar

$$\int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{para} \qquad 0 \le x \le 2.$$

Si $0 \le x \le 1$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Si $1 \le x \le 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2} + \int_1^x dt = \frac{1}{2} + 2x - 2.\end{aligned}$$

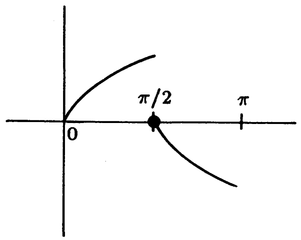
Ejemplo. Sea $f(x)$ definida para $0 \le x \le \pi$ por las fórmulas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \quad \text{si} \quad 0 \le x < \pi/2,\\ f(x) &= \cos x \quad \text{si} \quad \pi/2 \le x \le \pi.\end{aligned}$$

Entonces la integral de f de 0 a π está dada por:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi/2}^\pi \cos x\,dx\\ &= -\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen} x\Big|_{\pi/2}^\pi = 0.\end{aligned}$$

La gráfica de f se ve así:



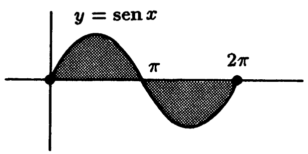
> *La integral de una función representa el área entre la gráfica de la función y el eje x sólo cuando la función es positiva. Si la función es negativa, entonces esta área se representa por menos la integral.*

Ejemplo. La función $\operatorname{sen} x$ es **negativa** en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. El **área** entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x sobre este intervalo está dada por **menos la integral**:

$$-\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

El **área** entre la gráfica de $\operatorname{sen} x$ y el eje x entre 0 y 2π es igual al doble del área de uno de sus lazos, y es entonces igual a 4. Por otro lado,

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x\Big|_{0}^{2\pi} = 0.$$

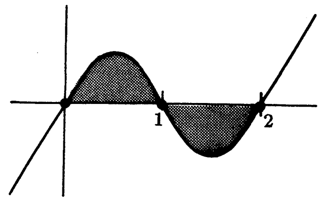


Ejemplo. Hallar el área entre la curva

$$y = f(x) = x(x-1)(x-2)$$

y el eje x.

La curva se ve así:



Hay dos porciones entre la curva y el eje x, correspondientes a los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$. Sin embargo, la función es negativa entre $x = 1$ y $x = 2$, de manera que para hallar la suma de las áreas de las dos regiones hemos de tomar el valor absoluto de la integral sobre la segunda. Por consiguiente, calculamos estas áreas separadamente.

Primero expandemos el producto dando $f(x)$ y obtenemos

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

La primera integral es igual a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= \tfrac{1}{4} - 1 + 1 = \tfrac{1}{4}.$$

La segunda integral es igual a

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big|_1^2$$
$$= \tfrac{16}{4} - 8 + 4 - (\tfrac{1}{4} - 1 + 1) = -\tfrac{1}{4}.$$

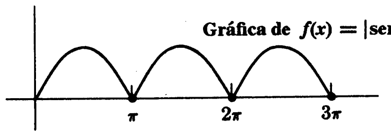
Por lo tanto, el **área** de las dos regiones es igual a

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int_0^{3\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx.$$

Nótese que, debido al signo de valor absoluto, la gráfica de la función $|\operatorname{sen} x|$ se ve como lo muestra la figura de la página siguiente.



Si $\text{sen } x \geq 0$ en un intervalo, entonces $|\text{sen } x| = \text{sen } x$.
Si $\text{sen } x \leq 0$ en un intervalo, entonces $|\text{sen } x| = -\text{sen } x$.

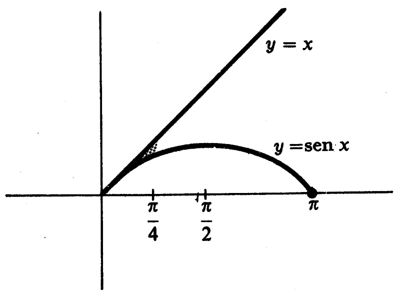
Por lo tanto,

$$\int_0^{3\pi} |\text{sen } x|\, dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \text{sen } x\, dx$$
$$= 2 + 2 + 2 = 6.$$

Advertencia. Es claro que el resultado es tres veces el área bajo un arco de la gráfica, debido a las simetrías. Pero si se intenta usar simetrías en ese tipo de integrales, hay que estar seguros de *probar* que son válidas.

Ejemplo. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = \text{sen } x$ para $0 \leq x \leq \pi/4$.

Las gráficas son como sigue.



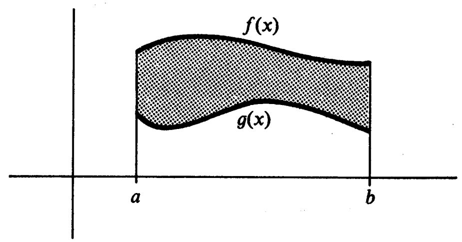
De las desigualdades probadas en el capítulo V, sección §2, se sabe que $\text{sen } x \leq x$ para $0 \leq x$. El área entre las dos curvas entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ es la diferencia de las áreas bajo la curva más grande y la más chica, esto es:

$$\int_0^{\pi/4} (x - \text{sen } x)\, dx = \int_0^{\pi/4} x\, dx - \int_0^{\pi/4} \text{sen } x\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} + \cos x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2}{32} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

En general, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces el área entre las dos curvas, de a a b, es

$$\boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.}$$



X, §2. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes:

1. $\int 4x^3\, dx$
2. $\int (3x^4 - x^5)\, dx$
3. $\int (2 \text{ sen } x + 3 \cos x)\, dx$
4. $\int (3x^{2/3} + 5 \cos x)\, dx$
5. $\int \left(5e^x + \frac{1}{x}\right) dx$
6. $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen } x + \cos x)\, dx$
7. $\int_{-1}^{1} 2x^5\, dx$
8. $\int_{-1}^{2} e^x\, dx$
9. $\int_{-1}^{3} 4x^2\, dx$
10. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$ de 0 a su primer punto de intersección para $x > 0$.
11. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^3$.
12. Hallar el área entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$.
13. Hallar el área entre la curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ y el eje x. (Trazar la curva.)
14. Hallar el área entre la curva $y = (x+1)(x-1)(x+2)$ y el eje x.
15. Hallar el área entre las curvas $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$, el eje y y el primer punto donde se intersecan esas curvas para $x > 0$.

En cada uno de los problemas siguientes, del 16 al 25:
(a) Trazar la gráfica de la función $f(x)$.
(b) Hallar la integral de la función sobre el intervalo dado.

16. En $[-1,1]$, $f(x)=x$ si $-1\le x<0$ y $f(x)=5$ si $0\le x\le 1$.
17. En $[-1,1]$, $f(x)=x^2$ si $-1\le x\le 0$ y $f(x)=-x$ si $0<x\le 1$.
18. En $[-1,1]$, $f(x)=x-1$ si $-1\le x<0$ y $f(x)=x+1$ si $0\le x\le 1$.
19. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=\operatorname{sen} x$ si $-\pi\le x<0$ y $f(x)=x$ si $0<x\le\pi$.
20. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=|\operatorname{sen} x|$.
21. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=|\cos x|$.
22. En $[-1,1]$, $f(x)=|x|$.
23. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=\operatorname{sen} x+|\cos x|$.
24. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=x-|x|$.
25. En $[-\pi,\pi]$, $f(x)=\operatorname{sen} x+|\operatorname{sen} x|$.
26. Hallar el valor de las integrales (a) $\int_0^{7\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx$, (b) $\int_0^{7\pi}|\cos x|\,dx$. (c) Para cualquier entero positivo n, $\int_0^{n\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx$.

X, §3. DESIGUALDADES

Puede no leerse esta sección hasta que se use para estimar términos residuo en la fórmula de Taylor.

Teorema 3.1. *Sean a y b dos números, con $a\le b$. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y suponer que $f(x)\le g(x)$ para todo x en el intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Como $g(x)-f(x)\ge 0$, podemos usar la propiedad básica 1 del capítulo IX, sección §5 (con $m=0$) para concluir que

$$\int_a^b (g-f)\ge 0.$$

Pero

$$\int_a^b (g-f)=\int_a^b g-\int_a^b f.$$

Transponiendo la segunda integral a la derecha de nuestra desigualdad obtenemos

$$\int_a^b g\ge\int_a^b f,$$

como se deseaba.

El teorema 3.1 se usará principalmente cuando $g(x)=|f(x)|$. Como un número negativo siempre es $\le$ que un número positivo, sabemos que

$$f(x)\le|f(x)|$$

y

$$-f(x)\le|f(x)|.$$

Teorema 3.2. *Sean a y b dos números, con $a\le b$. Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Demostración. Simplemente hacemos $g(x)=|f(x)|$ en el teorema anterior. Entonces

$$f(x)\le|f(x)|$$

y también $-f(x)\le|f(x)|$. El valor absoluto de la integral de la izquierda es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad\text{o}\quad -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos aplicar el teorema 3.1 ya sea a $f(x)$ o a $-f(x)$ para obtener el teorema 3.2.

Tenemos otra aplicación del teorema 3.2.

Teorema 3.3. *Sean a y b dos números y f una función continua en el intervalo cerrado entre a y b. (No suponemos necesariamente que $a<b$.) Sea M un número tal que $|f(x)|\le M$ para todo x en el intervalo. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le M|b-a|.$$

Demostración. Si $a\le b$, podemos usar el teorema 3.2 para obtener

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b M\,dx=M\int_a^b dx=M(b-a).$$

Si $b<a$, entonces

$$\int_a^b f=-\int_b^a f.$$

Tomando valores absolutos obtenemos el estimado $M(a-b)$. Como

$$a-b=|b-a|$$

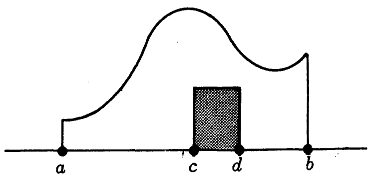
en el caso $b<a$, hemos probado nuestro teorema.

Teorema 3.4. *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ con $a<b$. Se supone que $f(x)\ge 0$ para todo x en este intervalo, y $f(x)>0$ para algún x en este intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

Demostración. Sea c un número del intervalo tal que $f(c)>0$, y suponer por simplicidad que $c\ne b$.

La idea geométrica que sustenta la demostración es bastante sencilla en términos de área. Como se supone que la función f es ≥ 0 donde sea, y > 0 en el punto c, entonces es mayor que algún número positivo fijo [digamos que $f(c)/2$] en algún intervalo cerca de c. Esto significa que podemos insertar un pequeño rectángulo de altura > 0 entre la curva $y = f(x)$ y el eje x. Entonces el área bajo la curva es al menos igual al área de este rectángulo, que es > 0.



Esta "demostración" se puede expresar en términos de propiedades formales de la integral de la manera siguiente. Como f es continua, existe algún número d cerca de c en el intervalo, con $c < d \leq b$, tal que $f(x)$ está cerca de $f(c)$ para todo x que satisfaga

$$c \leq x \leq d.$$

En particular, tenemos

$$f(x) \geq \frac{f(c)}{2}, \qquad c \leq x \leq d,$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \\ &\geq \int_c^d f(x)\,dx \geq \int_c^d \frac{f(c)}{2}\,dx \\ &\geq \frac{f(c)}{2}(d-c) > 0.\end{aligned}$$

Esto prueba nuestro teorema si $c \neq b$. Si $c = b$, tomamos $d < c$ y procedemos de la misma manera.

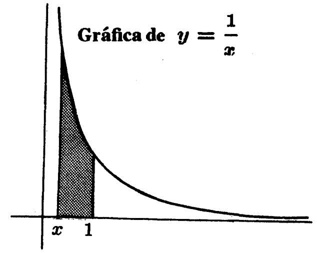
El teorema 3.4 no se usará en el resto de este libro excepto en un par de ejercicios, pero es importante en aplicaciones subsecuentes.

X, §4. INTEGRALES IMPROPIAS

Ejemplo 1. Comenzamos con un ejemplo. Sea $0 < c < 1$. Veamos la integral

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_c^1 = \log 1 - \log c = -\log c.$$

La figura ilustra esta integral.



Se ha sombreado la parte del área bajo la gráfica que está entre c y 1. Vemos que, cuando c tiende a 0, el área se vuelve arbitrariamente grande, pues

$$-\log c \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad c \to 0.$$

Ejemplo 2. Sin embargo, es asombroso que ocurra una situación completamente diferente cuando consideramos el área bajo la curva $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$. Tomamos $x > 0$, por supuesto. Sea $0 < c < 1$. Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \int_c^1 x^{-1/2}\,dx &= 2x^{1/2}\Big|_c^1 \\ &= 2 - 2c^{1/2}.\end{aligned}$$

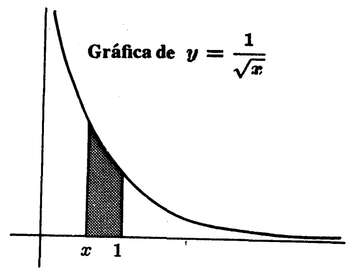
Entonces

$$\text{cuando} \qquad c \to 0, \qquad 2c^{1/2} \to 0$$

y, por lo tanto,

$$\int_c^1 x^{-1/2}\,dx \to 2 \qquad \text{cuando} \qquad c \to 0.$$

Podemos ilustrar la gráfica de $1/\sqrt{x}$ en la figura siguiente. Nótese que, a primera vista, no difiere gran cosa del ejemplo anterior, pero el cálculo del área muestra la existencia de una diferencia fundamental.



Tanto en el ejemplo 1 como en el ejemplo 2 vemos una chimenea infinita, cuando

$c \to 0$. Pero en el ejemplo 1 el área se vuelve arbitrariamente grande, mientras que, en el ejemplo 2, el área tiende al límite 2.

Definición. En el ejemplo 2 decimos que la integral

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$$

existe o **converge**, aunque la función $x^{-1/2}$ no esté definida en 0 y no sea continua en el intervalo **cerrado** $[0,1]$.

En general, supongamos que tenemos dos números a y b con, digamos, $a < b$. Sea f una función continua en el intervalo $a < x \leq b$. Esto significa que, para todo número c con $a < c < b$, la función f es continua en el intervalo

$$c \leq x \leq b.$$

Sea F cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$.

Podemos entonces evaluar la integral como de costumbre:

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c).$$

Definición. Si existe el límite

$$\lim_{c \to a} F(c)$$

entonces decimos que **existe** la **integral impropia**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{c \to a} F(c).$$

Tendremos funciones parecidas cuando tratemos con un intervalo $a \leq x < b$ y una función f que sea continua en este intervalo. Si existe el límite

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$$

entonces decimos que **existe** la **integral impropia**, y que es igual a este límite.

Ejemplo 3. Mostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

no existe.

Sea $0 < c < 1$. Primero evaluamos la integral:

$$\int_c^1 x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_c^1 = -1 - \left(-\frac{1}{c}\right) = -1 + \frac{1}{c}$$

Pero $1/c \to \infty$ cuando $c \to 0$ y, por lo tanto, la integral impropia no existe.

Ejemplo 4. Determinar si existe la integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

y de ser así, hallar su valor.

Sea $1 < c < 3$. Entonces la función $1/(x-1)$ no es continua en el intervalo $[1,3]$, pero es continua en el intervalo $[c,3]$. Más aún,

$$\int_c^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \log(x-1)\Big|_c^3 = \log 2 - \log(c-1).$$

Pero

$$-\log(c-1) \to \infty \quad \text{cuando} \quad c \to 1 \quad \text{y} \quad c > 1.$$

Por lo tanto, la integral no existe.

Hay otro tipo de integral impropia, que trata con valores grandes.

Sea a un número y f una función continua definida para $x \geq a$. Considerar la integral

$$\int_a^B f(x)\,dx$$

para algún número $B > a$. Si $F(x)$ es cualquier integral indefinida de f, entonces nuestra integral es igual a $F(B) - F(a)$. Si tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande, entonces **definimos**

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_a^\infty f = \lim_{B \to \infty} \int_a^B f(x)\,dx,}$$

y decimos que la **integral impropia converge** o **existe.**

Así,

$$\int_a^\infty f \quad \text{existe si} \quad \lim_{B \to \infty} \int_a^B f \quad \text{existe,}$$

y es igual al límite. De no ser así, decimos que la integral impropia **no converge** o **no existe.**

Ejemplo 5. Determinar si existe la integral impropia $\int_1^\infty 1/x\,dx$, y, de ser así, hallar su valor.

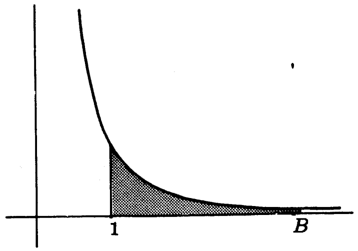
Sea B un número > 1. Entonces

$$\int_1^B \frac{1}{x}\,dx = \log B - \log 1 = \log B.$$

Cuando B se vuelve grande sucede lo mismo con $\log B$ y, por lo tanto, la integral impropia no existe.

Veamos la función $1/x^2$. Su gráfica es como en la siguiente figura. A primera vista no se percibe diferencia alguna entre esta función y $1/x$, excepto que

$1/x^2 < 1/x$ cuando $x > 1$. Sin embargo, hablando intuitivamente, hallaremos que $1/x^2$ tiende a 0 suficientemente más rápido que $1/x$ para garantizar que el área bajo la curva entre 1 y B tiende a un límite cuando B se vuelve grande.



Ejemplo 6. Determinar si existe la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

y, de ser así, hallar su valor.

Sea B un número > 1. Entonces

$$\int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\bigg|_1^B = -\frac{1}{B} + 1.$$

Cuando B se vuelve grande, $1/B$ tiende a 0. Por lo tanto, el límite cuando B se vuelve grande existe y es igual a 1, que es el valor de nuestra integral. Tenemos así, por definición, que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B} + 1\right) = 1.$$

X, §4. EJERCICIOS

Determinar si las siguientes integrales impropias existen o no.

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{3\;2}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{5-x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x-1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
9. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

En los ejercicios anteriores se evaluaron casos particulares de integrales impropias de la forma

$$\int_a^b \frac{1}{x^s}\,dx.$$

Los dos ejercicios siguientes son importantes porque indican en general si dichas integrales existen o no.

11. (a) Sea s un número < 1. Mostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

existe.

(b) Si $s > 1$, mostrar que la integral no existe.

(c) ¿Existe la integral cuando $s = 1$?

12. (a) Si $s > 1$, mostrar que existe la siguiente integral.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

(b) Si $s < 1$, mostrar que la integral no existe.

Determinar si existen las integrales siguientes; de ser así, hallar sus valores.

13. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$
14. $\displaystyle\int_1^\infty e^{x}\,dx$

15. Sea B un número > 2. Hallar el área bajo la curva $y = e^{-2x}$ entre 2 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?