CAPÍTULO VII

Funciones inversas

Supongamos que tenemos una función, por ejemplo

$$y = 3x - 5.$$

Entonces podemos despejar x en términos de y, a saber

$$x = \tfrac{1}{3}(y + 5).$$

Así x se puede expresar como función de y.

Aunque podemos resolver mediante una fórmula explícita, hay casos interesantes en los que x se puede expresar como función de y pero sin dicha fórmula explícita. En este capítulo investigaremos estos casos.

VII, §1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES INVERSAS

Sea $y = f(x)$ una función definida para todo x en algún intervalo. Si para cada valor y_1 de y existe exactamente *un* valor x_1 de x en el intervalo tal que $f(x_1) = y_1$, entonces podemos definir la **función inversa**

$x = g(y) =$ *al único número* x *tal que* $y = f(x)$.

Nuestra función inversa está definida sólo en aquellos números que son valores de f. Tenemos la relación fundamental

$$f(g(y)) = y \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x.$$

Ejemplo 1. Considerar la función $y = x^2$, que se supone definida sólo para $x \geq 0$. Todo número positivo (o 0) se puede escribir de manera única como el cuadrado de un número positivo (o 0). Por lo tanto, podemos definir la función inversa, que también será definida para $y \geq 0$, pero no para $y < 0$. Es la función raíz cuadrada, $x = \sqrt{y}$.

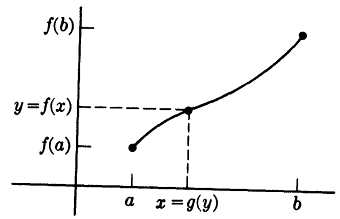
Ejemplo 2. Suponer que $y = 5x - 7$. Entonces podemos despejar x en términos de y, a saber,

$$x = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

Si $f(x) = 5x - 7$, entonces su función inversa es la función $g(y)$ tal que

$$g(y) = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

En estos ejemplos podemos escribir la función inversa mediante fórmulas explícitas. En general esto no es posible, pero hay criterios que nos dicen en qué caso existe la función inversa, por ejemplo cuando la gráfica de la función f se ve así.



En este caso, f es estrictamente creciente y está definida en el intervalo $[a, b]$. Para cada punto x de este intervalo existe un valor $f(x) = y$, y para cada y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe x único entre a y b tal que $f(x) = y$. Formalizamos esto en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $f(x)$ una función estrictamente creciente. Entonces existe la función inversa y está definida en el conjunto de valores de f.*

Demostración. Esto es prácticamente obvio: Dado un número y_1 y un número x_1 tal que $f(x_1) = y_1$, no puede haber otro número x_2 tal que $f(x_2) = y_1$ a menos que $x_2 = x_1$, pues si $x_2 \neq x_1$, entonces

o bien $x_2 > x_1$, en cuyo caso $f(x_2) > f(x_1)$,

o $x_2 < x_1$, en cuyo caso $f(x_2) < f(x_1)$.

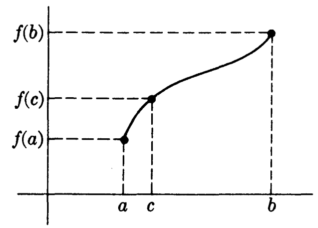
Como la positividad de la derivada nos da un buen criterio para saber cuándo una función es estrictamente creciente, podemos definir funciones inversas cuando la función es diferenciable y su derivada es positiva.

Como es usual, lo dicho anteriormente se aplica igual a funciones que son estrictamente decrecientes y cuya derivada es negativa.

El teorema siguiente se deduce intuitivamente y se prueba en el apéndice. Lo recordamos como el teorema 1.2 del capítulo V.

Teorema del valor intermedio. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea v un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = v$.*

Este teorema dice que la función f toma todos los valores intermedios entre los valores en los puntos extremos del intervalo, lo cual se ilustra en la figura siguiente.



Usando el teorema del valor intermedio concluimos que:

Teorema 1.2. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado*

$$a \leq x \leq b$$

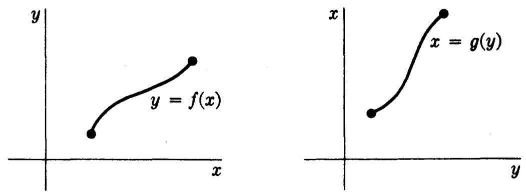
y suponer que f es estrictamente creciente. Sea $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Entonces la función inversa está definida en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Dado cualquier número γ entre α y β, por el teorema del valor intermedio existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$. Nuestra afirmación se sigue ahora del teorema 1.1.

Si hacemos que esta función inversa sea g, entonces $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Más aún, la función inversa se caracteriza por la relación

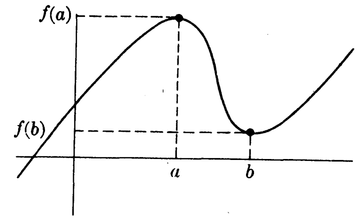
$$f(x) = y \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad x = g(y).$$

Nótese que podemos visualizar fácilmente la gráfica de una función inversa. Si queremos x en términos de y, simplemente se rota la página en un ángulo de 45° invirtiendo los papeles de los ejes x y y. Así, la gráfica de $y = f(x)$ se refleja respecto a una recta inclinada a 45° para dar la gráfica de $x = g(y)$.

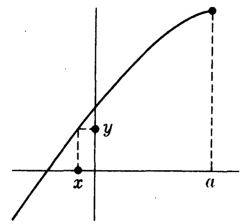


Daremos ahora algunos ejemplos de cómo se puede definir funciones inversas en ciertos intervalos.

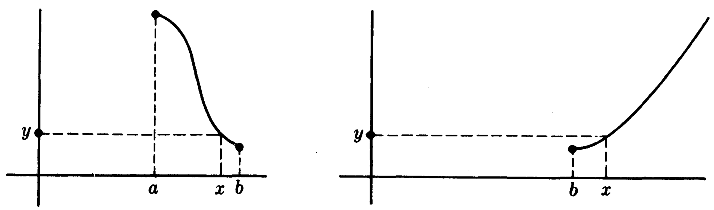
Ejemplo 3. Tomar como $f(x)$ un polinomio de grado 3. Cuando el coeficiente de x^3 es positivo, y cuando f tiene máximos y mínimos locales, su gráfica se ve así:



A cualquier valor dado de y entre $f(a)$ y $f(b)$ corresponden tres valores posibles para x y, por lo tanto, la función inversa no se puede definir a menos que demos otras especificaciones. Para esto, supongamos primero que se considera f definida sólo para aquellos números $\leq a$. Entonces la gráfica de f se ve así:



La función inversa está definida en este caso. Del mismo modo, podemos considerar f como definida en el intervalo $[a, b]$, o en el intervalo de todo $x \geq b$. En cada uno de estos casos, ilustrados en las siguientes figuras, estaría definida la función inversa.



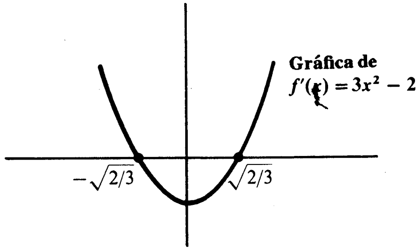
En cada caso hemos trazado un punto y y el valor correspondiente x de la función inversa. Ellos son diferentes en los tres casos.

Ejemplo 4. Consideremos un ejemplo numérico. Sea

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

vista como una función sobre el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. ¿Podemos definir la función inversa? ¿Para qué números? Si g es la función inversa, ¿cuál es $g(0)$? ¿Cuál es $g(5)$?

Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 2$. La gráfica de $f'(x)$ es una parábola doblada hacia arriba que cruza el eje x en $x = \pm\sqrt{2/3}$.



Por lo tanto,

$$f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{2/3} \quad \text{y} \quad x < -\sqrt{2/3}.$$

Considérese el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. Entonces f es estrictamente creciente en este intervalo, de modo que la función inversa g está definida. Como $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, se sigue que la función inversa $g(y)$ está definida para todo $y > f(\sqrt{2/3})$, esto es,

$$y > f(\sqrt{2/3}) = (2/3)^{3/2} - 2(2/3)^{1/2} + 1.$$

Ahora $1 > \sqrt{2/3}$, de modo que 1 está en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, y $f(1) = 0$. Por lo tanto, $g(0) = 1$.

De manera análoga, $f(2) = 5$ y 2 está en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, de modo que $g(5) = 2$.

Nótese que no damos una fórmula explícita para nuestra función inversa. Cuando se trata con polinomios de grado ≥ 3, no se puede dar fórmula alguna.

Ejemplo 5. Por otro lado, tomar f definida por la misma fórmula,

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

pero considerada como una función en el intervalo

$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

La derivada de f está dada por $f'(x) = 3x^2 - 2$. Tenemos

$$f'(x) < 0 \iff -\sqrt{\tfrac{2}{3}} < x < \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Por lo tanto, f es estrictamente decreciente en este intervalo, y la función inversa está definida, pero es bastante diferente de la del ejemplo 4. Por ejemplo, 0 está en el intervalo y $f(0) = 1$, de modo que si h denota la función inversa, tenemos $h(1) = 0$.

Ejemplo 6. Sea $f(x) = x^n$ (donde n es un entero positivo) y consideremos f definida sólo para números $x > 0$. Como $f'(x)$ es nx^{n-1}, la función es estrictamente creciente, por lo que la función inversa existe. Esta función inversa g es, de hecho, lo que entendemos por raíz n-ésima.

En todos los ejercicios de los capítulos anteriores se determinaron intervalos en los cuales ciertas funciones crecían y decrecían. Ahora se pueden definir funciones inversas para dichos intervalos. En la mayoría de los casos no se puede escribir una fórmula explícita sencilla para tales funciones inversas.

VII, §1. EJERCICIOS

Para cada una de las funciones siguientes, determinar si existe una función inversa g y determinar los números para los cuales está definida g.

1. $f(x) = 3x + 2$, para todo x
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $0 \leq x$
3. $f(x) = x^3 + 4x - 5$, para todo x
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $-1 < x$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $-2 < x$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $1 < x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $0 < x \leq 1$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $0 \leq x \leq 5$
9. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, $0 \leq x < 2$
10. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 10$
11. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$
12. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$
13. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$
14. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $1 \leq x$

VII, §2. DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Enunciaremos un teorema que nos permita determinar la derivada de una función inversa cuando conocemos la derivada de la función dada.

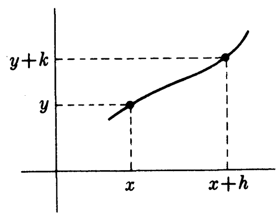
Teorema 2.1. *Sean a y b dos números, $a < b$. Sea f una función diferenciable en el intervalo $a < x < b$ y tal que su derivada $f'(x)$ es > 0 para toda x en este intervalo abierto. Entonces existe la función inversa $x = g(y)$ y tenemos*

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.}$$

Demostración. Se supone que investigamos el cociente de Newton

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

La siguiente figura ilustra la situación:



Por el teorema del valor intermedio, todo número de la forma $y+k$ con valores pequeños de k se puede escribir como un valor de f. Sean $x = g(y)$ y $h = g(y+k) - g(y)$. Entonces

$$x = g(y) \quad \text{y} \quad g(y+k) = x + h.$$

Más aún, $y + k = f(x+h)$ y, por lo tanto,

$$k = f(x+h) - f(x).$$

El cociente de Newton para g puede entonces escribirse como

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)},$$

y vemos que es el recíproco del cociente de Newton para f, a saber,

$$\frac{1}{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

Cuando h tiende a 0 sabemos que k tiende a 0, pues

$$k = f(x+h) - f(x).$$

Recíprocamente, cuando k tiende a 0 sabemos que existe exactamente un valor de h tal que $f(x+h) = y+k$, pues la función inversa está definida. En consecuencia, el valor correspondiente de h también debe tender a 0.

Si tomamos ahora el límite del recíproco del cociente de Newton de f, cuando h (o k) tiende a 0, tenemos

$$\frac{1}{f'(x)}.$$

Por definición, ésta es la derivada $g'(y)$ y nuestro teorema está probado.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Hallar un intervalo tal que la función inversa g de f esté definida, y hallar $g'(0)$, $g'(5)$.

Por inspección vemos que

$$f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(2) = 5.$$

Entonces debemos hallar un intervalo que contenga 1 y 2 y tal que la función inversa de f esté definida para ese intervalo. Pero

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

y $f'(x) > 0$ si, y sólo si, $x > \sqrt{2/3}$ o $x < -\sqrt{2/3}$. (Ver el ejemplo 4 de la sección anterior.) Seleccionamos el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, que contiene tanto a 1 como a 2. Entonces podemos aplicar el teorema general acerca de la derivada de la función inversa, que asegura que si $y = f(x)$ entonces

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Esto da:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1 \quad \text{y} \quad g'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{10}.$$

Favor de notar que la derivada $g'(y)$ está dada en términos de $f'(x)$. No tenemos una fórmula en términos de y.

El teorema que nos da la derivada de la función inversa también se puede expresar diciendo que

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.}$$

Aquí también la derivada se comporta *como si* estuviéramos tomando un cociente. Así, la notación es sugestiva y, a partir de ahora, podemos usarla sin dudar, pues ya probamos un teorema que la justifica.

Observación. En el teorema 2.1 probamos que, de hecho, la derivada de la función inversa g existe, y está dada por $g'(y) = 1/f'(x)$. Si sólo se *supone* que esta derivada existe, entonces puede darse un argumento mucho más corto para hallar su valor, usando la regla de la cadena. En efecto, tenemos

$$f(g(y)) = y, \quad \text{pues} \quad g(y) = x.$$

Al diferenciar respecto a y podemos hallar, mediante la regla de la cadena, que

$$f'(g(y))g'(y) = 1, \quad \text{porque} \quad \frac{dy}{dy} = 1.$$

Por lo tanto,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

como se debía demostrar.

VII, §2. EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, restringir f a un intervalo de modo que la función inversa g esté definida en un intervalo que contenga al punto indicado, y hallar la derivada de la función inversa en el punto indicado

0. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. Hallar $g'(2)$.
1. $f(x) = x^3 + 1$. Hallar $g'(2)$.
2. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Hallar $g'(6)$.
3. $f(x) = x^2 - x + 5$. Hallar $g'(7)$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$. Hallar $g'(-)$.
5. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$. Hallar $g'(\sqrt{3}/2)$.
6. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Hallar $g'(-1)$.
7. $f(x) = x^3 + x - 2$. Hallar $g'(0)$.
8. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. Hallar $g'(2)$.
9. $f(x) = 2x^3 + 5$. Hallar $g'(21)$.
10. $f(x) = 5x^2 + 1$. Hallar $g'(11)$.
11. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Suponer que f es dos veces diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$, y que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en este intervalo. Sea g la función inversa de f.
    (a) Hallar una expresión para la segunda derivada de g.
    (b) Mostrar que $g''(y) < 0$ en su intervalo de definición. Así g se dobla en la dirección opuesta a f.

VII, §3. EL ARCOSENO

Es imposible definir una función inversa para la función $y = \operatorname{sen} x$, ya que a cada valor de y le corresponde una infinidad de valores de x pues $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$. Sin embargo, si restringimos nuestra atención a intervalos especiales, podemos definir la función inversa.

Restringimos la función seno al intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ y en ese intervalo tenemos

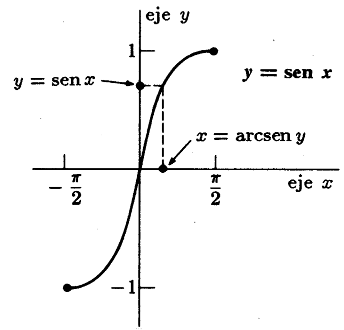
$$0 < \cos x, \quad \text{de modo que la derivada es positiva,}$$

excepto cuando $x = \pi/2$ o $x = -\pi/2$, en cuyo caso el coseno es 0.

Entonces, en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

la función es estrictamente creciente. La función inversa existe, y se llama **arcoseno**.



Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, y $x = \operatorname{arcsen} y$, la función inversa. Como $f(0) = 0$, tenemos $\operatorname{arcsen} 0 = 0$. Más aún, como

$$\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\pi/2) = 1,$$

sabemos que la función inversa está definida en el intervalo que va de -1 a $+1$, esto es, para

$$-1 \leq y \leq 1.$$

En palabras, podemos decir burdamente que $\operatorname{arcsen} x$ *es el ángulo cuyo seno es* x. (Decimos *burdamente* porque, hablando estrictamente, $\operatorname{arcsen} x$ es un número, no un ángulo, y además porque nos referimos al ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.)

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sea $g(y) = \operatorname{arcsen} y$. Entonces

$$\operatorname{arcsen}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$$

porque

$$\operatorname{sen} \pi/4 = 1/\sqrt{2}.$$

De manera análoga,

$$\operatorname{arcsen} 1/2 = \pi/6$$

porque

$$\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2.$$

Para cualquier valor de x *en el intervalo* $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ *tenemos*

$$\boxed{\operatorname{arcsen} \operatorname{sen} x = x,}$$

por definición de función inversa. Sin embargo, si x no está en este intervalo, entonces **no** tenemos

$$\operatorname{arcsen} \operatorname{sen} x = x.$$

Ejemplo 2 Sea $x = -\pi$. Entonces

$$\operatorname{sen}(-\pi) = 0,$$

y

$$\operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}(-\pi)\big) = \operatorname{arcsen} 0 = 0 \neq -\pi.$$

Ejemplo 3. Tenemos

$$\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}(3\pi/4) = \pi/4,$$

porque $\operatorname{sen} 3\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, y $\operatorname{arcsen} 1/\sqrt{2} = \pi/4$.

Consideremos ahora la derivada y la gráfica de la función inversa.

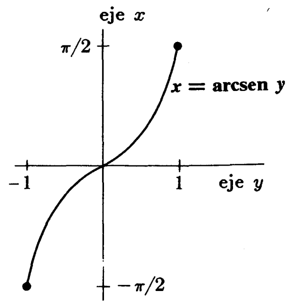
La derivada de $\operatorname{sen} x$ es positiva en el intervalo

$$-\pi/2 < x < \pi/2.$$

Como la derivada de la función inversa $x = g(y)$ es $1/f'(x)$, la derivada de $\operatorname{arcsen} y$ también es positiva en el intervalo

$$-1 < y < 1.$$

Por ello, la función inversa es estrictamente creciente en ese intervalo. Su gráfica se ve como en la figura que se muestra a continuación.



De acuerdo con la regla general para la derivada de funciones inversas, sabemos que, cuando $y = \operatorname{sen} x$ y $x = \operatorname{arcsen} y$, la derivada es

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{\cos x}.$$

Cuando x está muy cerca de $\pi/2$, se sabe que $\cos x$ está cerca de 0. Por lo tanto, la derivada es muy grande, de ahí que la curva sea casi vertical. Igualmente, cuando x está cerca de $-\pi/2$ y y está cerca de -1, la curva es casi vertical, como se dibujó.

Por último, sucede que podemos expresar nuestra derivada de manera explícita como función de y. En efecto, tenemos la relación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

de donde

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x.$$

En el intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, el coseno es ≥ 0. Por lo tanto, podemos tomar la raíz cuadrada y obtener

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

en ese intervalo. Como $y = \operatorname{sen} x$, podemos escribir nuestra derivada en la forma

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

la cual está expresada completamente en términos de y.

Ejemplo 4. Sea $x = \operatorname{arcsen} y$. Hallar dx/dy cuando $y = 1/\sqrt{2}$. Esto se hace fácilmente, a saber, si $g(y) = \operatorname{arcsen} y$, entonces

$$g'(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2}.$$

Una vez obtenida toda la información deseada acerca del arcoseno, volvamos a nuestras letras usuales. Enunciamos la propiedad principal como un teorema.

Teorema 3.1. *Considerar la función seno definida en el intervalo*

$$[-\pi/2, \pi/2].$$

Entonces la función inversa está definida en el intervalo $[-1, 1]$. *Vamos a llamarla*

$$g(x) = \operatorname{arcsen} x.$$

Entonces g *es diferenciable en el intervalo abierto* $-1 < x < 1$, *y*

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

VII, §3. EJERCICIOS

1. Considerar el coseno definido sólo en el intervalo $[0, \pi]$ y probar que existe la función inversa arccos. ¿En qué intervalo está definida? Trazar la gráfica.
2. ¿Cuál es la derivada del arcocoseno?
3. Sea $g(x) = \operatorname{arcsen} x$. Hallar los valores siguientes:

(a) $g'(1/2)$ (b) $g'(1/\sqrt{2})$ (c) $g(1/2)$
(d) $g(1/\sqrt{2})$ (e) $g'(\sqrt{3}/2)$ (f) $g(\sqrt{3}/2)$

4. Sea $g(x) = \arccos x$. ¿Cuál es $g'(\frac{1}{2})$? ¿Cuál es $g'(1/\sqrt{2})$? ¿Cuál es $g(\frac{1}{2})$? ¿Cuál es $g(1/\sqrt{2})$?
5. Sea $\sec x = 1/\cos x$. Definir la función inversa de la secante en un intervalo adecuado y obtener una fórmula para la derivada de su función inversa.

Hallar los números siguientes.

6. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 3\pi/2)$ 7. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\pi)$ 8. $\arccos(\cos 3\pi/2)$
9. $\arccos(\cos -\pi/2)$ 10. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} -3\pi/4)$

Hallar las derivadas de las siguientes funciones.

11. $\operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$ 12. $\arccos(2x + 5)$
13. $\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}$ 14. $\dfrac{2}{\arccos 2x}$
15. Determinar los intervalos en los cuales la función arcsen se dobla hacia arriba y en cuáles se dobla hacia abajo.

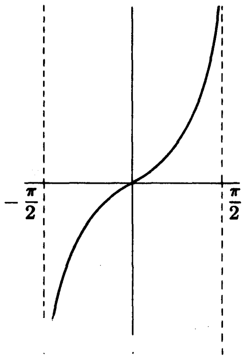
VII, §4. EL ARCOTANGENTE

Sea $f(x) = \tan x$ y considerar esta función definida en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Conforme x va de $-\pi/2$ a $\pi/2$, la tangente va desde valores negativos muy grandes hasta valores positivos muy grandes. Cuando x tiende a $\pi/2$, la tangente tiene de hecho valores positivos arbitrariamente grandes y, de manera análoga, cuando x tiende a $-\pi/2$, la tangente tiene valores negativos arbitrariamente grandes.

Recordamos que la **gráfica de la tangente** se ve como en la figura siguiente.



La derivada de $\tan x$ es

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Por lo tanto, la derivada siempre es positiva y la función tan es estrictamente creciente. Más aún, cuando x varía en el intervalo

$$-\pi/2 < x < \pi/2,$$

$\tan x$ varía de valores negativos grandes a valores positivos grandes. Por lo tanto, $\tan x$ varía sobre todos los números, y así, la función inversa está definida para todos los números. La llamamos **arcotangente**.

Como sucedió con arcsen y arccos, podemos decir burdamente que $\arctan y$ es el ángulo cuya tangente es y. Decimos "burdamente" en nuestras afirmaciones porque, como ya señalamos, en realidad nos referimos al número de radianes del ángulo cuya tangente es y, tal que este número está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Ejemplo 1. Tenemos que $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$, pero

$$\arctan(-1/\sqrt{3}) \neq 5\pi/6,$$

aunque $\tan 5\pi/6 = -1/\sqrt{3}$.

Ejemplo 2. Con la misma disposición, hallamos que

$$\arctan \tan 5\pi/6 = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6.$$

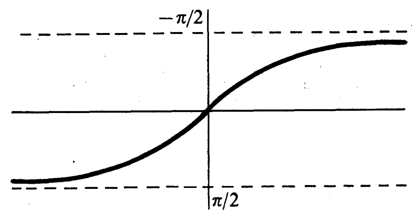
La razón por la cual $\tan x \neq x$ en este caso, se debe a la manera en que escogimos el intervalo de definición de la tangente para tener una función inversa y al hecho de que $x = 5\pi/6$ no está en este intervalo. Es evidente que, si x está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, entonces debemos tener

$$\arctan \tan x = x.$$

Así,

$$\arctan \tan(-\pi/6) = -\pi/6.$$

La **gráfica del arctan** se ve así:



Ahora la derivada. Sea $x = g(y) = \arctan y$. Entonces

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

de modo que

$$g'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Aquí de nuevo podemos obtener una fórmula explícita para la derivada de la función inversa.

Como con el arcoseno, al tratar de manera simultánea con la función y su inversa, debemos mantener separadas nuestras letras x y y. Sin embargo ahora resumimos las propiedades del arctan en términos de nuestra notación usual.

Teorema 4.1. *La función inversa de la tangente está definida para todos los números. Llamémosla arcotangente. Entonces tiene derivada, y esa derivada está dada por la relación*

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Cuando x se vuelve positivo muy grande, $\arctan x$ *tiende a* $\pi/2$.

Cuando x se vuelve muy grande negativo, $\arctan x$ *tiende a* $-\pi/2$.
El arcotangente es estrictamente creciente para todo x.

Ejemplo 3. Sea $h(x) = \arctan 2x$. Para hallar la derivada usamos la regla de la cadena, haciendo $u = 2x$. Entonces

$$h'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}.$$

Ejemplo 4. Sea g la función arctan. Entonces

$$g'(5) = \frac{1}{1+5^2} = \frac{1}{26}.$$

Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \arctan 2x$$

en el punto $x = 1/(2\sqrt{3})$.

Sea $h(x) = \arctan 2x$. Entonces

$$h'\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{1+4\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Cuando $x = 1/2\sqrt{3}$ tenemos

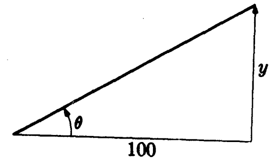
$$y = \arctan\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6.$$

Por lo tanto, debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente $3/2$ que pasa por el punto $(1/2\sqrt{3}, \pi/6)$. Sabemos cómo hacerlo; la ecuación es

$$y - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Ejemplo 6 Un globo se eleva desde el suelo a 100 m de un observador, a razón de 50 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 100 m?

La figura es como sigue:



Es preciso determinar $d\theta/dt$. Sabemos que $dy/dt = 50$. Tenemos

$$\frac{y}{100} = \tan\theta, \quad \text{de donde} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{100}\right).$$

Como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}$$

obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{100}\right)^2}\frac{1}{100}50.$$

Por lo tanto,

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=100} = \frac{1}{1+1^2}\frac{1}{100}50 = \frac{1}{4}\text{ rad/min}.$$

VII, §4. EJERCICIOS

1. Sea g la función arctan. ¿Cuál es $g(1)$? ¿Cuál es $g(1/\sqrt{3})$? ¿Cuál es $g(-1)$? ¿Cuál es $g(\sqrt{3})$?

2. Sea g la función arctan. ¿Cuál es $g'(1)$? ¿Cuál es $g'(1/\sqrt{3})$? ¿Cuál es $g'(-1)$? ¿Cuál es $g'(\sqrt{3})$?

3. Suponer que vamos a definir una función inversa para la tangente en el intervalo $\pi/2 < x < 3\pi/2$. ¿Cuál sería la derivada de esta función inversa?

4. ¿Cuál es
   (a) $\arctan(\tan 3\pi/4)$? (b) $\arctan(\tan 2\pi)$?
   (c) $\arctan(\tan 5\pi/6)$? (d) $\arctan(\tan -5\pi/6)$?

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

5. $\arctan 3x$ 6. $\arctan \sqrt{x}$ 7. $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$
8. $x \operatorname{arcsen} x$ 9. $\arctan(\operatorname{sen} 2x)$ 10. $x^2 \arctan 2x$
11. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x}$ 12. $\operatorname{arcsen}(\cos x - x^2)$ 13. $\arctan \dfrac{1}{x}$
14. $\arctan \dfrac{1}{2x}$ 15. $(1 + \operatorname{arcsen} 3x)^3$ 16. $(\operatorname{arcsen} 2x + \arctan x^2)^3/2$

Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto indicado para las curvas siguientes.

17. $y = \operatorname{arcsen} x,\ x = 1/\sqrt{2}$ 18. $y = \arccos x,\ x = 1/\sqrt{2}$
19. $y = \arctan 2x,\ x = \sqrt{3}/2$ 20. $y = \arctan x,\ x = -1$
21. $y = \operatorname{arcsen} x,\ x = -\frac{1}{2}$

22. Un globo se eleva desde el suelo a 150 m de un observador a razón de 60 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 300 m?

23. Un aeroplano a una altura de 1400 m vuela horizontal y directamente alejándose de un observador. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/4$, el ángulo está decreciendo a razón de 0.05 rad/seg. ¿Con qué rapidez está volando el aeroplano es ese instante?

24. Un hombre va caminando a lo largo de una acera a razón de 1.5 m/seg. A 10 m de la acera hay un faro buscador apuntándole. ¿A qué razón está girando el faro cuando el hombre está a 5 m del punto de la acera más cercano al faro?

25. Hay una torre al final de una calle. Un hombre va en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/seg, y la torre mide 150 m de altura. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo subtendido por la torre en el ojo del hombre cuando el hombre está a 300 m de la torre?

26. Un carro de policía se aproxima a un cruce de calles a 25 m/seg. Cuando está a 60 m del cruce, un carro pasa por la calle transversal, viajando en un ángulo recto respecto a la dirección en que viaja el carro de policía, a razón de 18 m/seg. Si el policía dirige su rayo de luz sobre el segundo carro, ¿con qué rapidez está girando el rayo de luz 2 segundos después, suponiendo que ambos carros continúan a su razón original?

27. Se jala un peso a lo largo de un piso horizontal mediante una cuerda que pasa sobre un gancho a 1.80 m sobre el piso. Si la cuerda se jala sobre el gancho a razón de 0.3 m/seg, hallar una expresión para la razón de cambio del ángulo θ entre la cuerda y el piso como función del ángulo θ.

28. Un hombre parado en un punto fijo de un muelle jala un pequeño bote. El muelle está a 6 m sobre el nivel del agua. Si el hombre jala la cuerda a 0.6 m/seg, ¿con qué rapidez está creciendo el ángulo que forma la cuerda con el agua cuando la distancia del hombre al bote es de 15 m?

29. Un helicóptero despega a 300 m de un observador y se eleva verticalmente a 6 m/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo de elevación del helicóptero respecto al observador cuando el helicóptero está a 240 m sobre el suelo?

30. Determinar los intervalos en donde el arctan se dobla hacia arriba y en donde se dobla hacia abajo.

31. Un helicóptero parte de una base, elevándose verticalmente en línea recta a una velocidad de 4.5 m/seg. Al mismo tiempo que parte el helicóptero, un observador situado en un punto a 30 m de la base comienza a alejarse de la base en línea recta a una velocidad de 24 m/seg. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación del observador al helicóptero cuando el observador está (a) a 120 m de la base? (b) a 180 m de la base?

32. Un tren se mueve sobre una recta alejándose de la estación a un velocidad de 6 m/seg. Un camarógrafo situado en un punto a 15 m de la estación comienza a alejarse de la estación al mismo tiempo que parte el tren, y, dirigiendo la cámara hacia el tren, se aleja de la estación perpendicularmente a los rieles con una rapidez de 3 m/seg. ¿A qué razón está girando el ángulo de la cámara después de que el tren se ha movido (a) 25 m? (b) 30 m?

33. Un carro viaja a 15 m/seg sobre una recta hacia un punto donde se va a lanzar un cohete. Cuando el carro está a 91 m del lugar del lanzamiento, empieza a subir el cohete y su altura está dada como función del tiempo por $y = \frac{1}{3}t^3$ m. Una persona dentro del carro está fotografiando el cohete. ¿Con qué rapidez está girando el ángulo de elevación de la cámara después de 5 segundos de la partida del cohete?

CAPÍTULO VIII

Exponentes y logaritmos

Recordemos las dificultades que tuvimos al principio con la función 2^x (o 3^x, o 10^x). Por intuición se consideraba posible la existencia de dichas funciones, de modo que satisficieran la ecuación fundamental

$$2^{x+y} = 2^x 2^y$$

para todos los números x y y, y $2^0 = 1$, pero teníamos dificultades para decir cuál es el significado de $2^{\sqrt{2}}$ (o 2^π).

El propósito de este capítulo es estudiar estas funciones y otras parecidas.

VIII, §1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si n es un entero positivo, conocemos el significado de 2^n: es el producto de 2 consigo mismo n veces. Por ejemplo, 2^8 es el producto de 2 consigo mismo ocho veces.

Más aún, también sabemos que $2^{1/n}$ es la raíz n-ésima de 2; es el número cuya n-ésima potencia es 2. Así, $2^{1/8}$ es el número cuya 8-ésima potencia es 2.

Si $x = m/n$ es un cociente de dos enteros positivos, entonces

$$2^{m/n} = (2^{1/n})^m = (2^m)^{1/n}$$

se puede expresar en términos de raíces y potencias, de modo que es fácil comprender las potencias fraccionarias de 2. El problema surge al querer comprender 2^x cuando x no es un cociente de dos enteros positivos. Por el momento dejamos este problema de lado y suponemos que existe una función definida para todo x, denotada por 2^x, que es diferenciable. Veremos ahora cómo hallar su derivada.

Formamos el cociente de Newton. Es

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h}.$$

Usando la ecuación fundamental vemos que este cociente es igual a

$$\frac{2^x 2^h - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h - 1}{h}.$$

Cuando h tiende a 0, 2^x permanece fijo, pero es muy difícil ver lo que sucede a

$$\frac{2^h - 1}{h}.$$

No es muy claro que este cociente tenga un límite. Hablando en términos generales, nos topamos con una dificultad análoga a la que surgió cuando tratamos de hallar la derivada de sen x. Sin embargo, en la situación presente, un enfoque directo causaría más dificultades que las halladas cuando estudiamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

De hecho, es cierto que

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

existe. Vemos que no depende de x, sino sólo de 2.

Si tratáramos de tomar la derivada de 10^x, terminaríamos con el problema de determinar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{10^h - 1}{h},$$

que también es independiente de x.

En general, supondremos lo siguiente.

Sea a un número > 1. *Existe una función a^x, definida para todos los números x, que satisface las propiedades siguientes:*

Propiedad 1. La ecuación fundamental

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

se cumple para todos los números x y y.

Propiedad 2. Si x es un número racional, $x = m/n$ con m y n enteros positivos, entonces $a^{m/n}$ tiene el significado usual:

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

Propiedad 3. La función a^x es diferenciable.

La función a^x se llama **función exponencial.**

Podemos entonces aplicar a a^x el mismo procedimiento que aplicamos a 2^x. Formamos el cociente de Newton

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h}\right).$$

Como suponemos que a^x es diferenciable, se sigue que

$$\boxed{\frac{da^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.}$$

Así nos encontramos con el misterioso límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Esta situación es semejante a la que se presentó al diferenciar $\operatorname{sen} x$, pero antes pudimos hallar el límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ cuando h tiende a 0. Aquí no podemos tomar un enfoque directo. El límite se aclarará posteriormente cuando estudiemos el log.

Sin embargo, podemos analizar un poco más este límite. Sea

$$f(x) = a^x.$$

Afirmamos que

$$\boxed{a^0 = 1.}$$

Esto es porque

$$a = a^{1+0} = a \cdot a^0.$$

Si multiplicamos por a^{-1} en ambos lados, obtenemos $1 = a^0$.

De la misma manera hallamos

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x},}$$

puesto que

$$1 = a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x}.$$

Ahora bien, si hacemos $x = 0$ en la fórmula

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h},$$

entonces hallamos que

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}$$

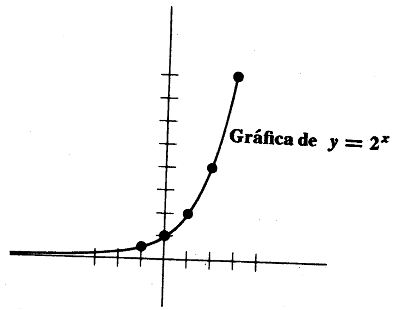
pues $a^0 = 1$. *En consecuencia, el misterioso límite del lado derecho es la pendiente de la curva $y = a^x$ en $x = 0$.*

Tratemos de ver la apariencia de curvas como 2^x, o 3^x, o bien 10^x, localizando algunos puntos. Damos una tabla de valores para 2^x.

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
10	1024
20	1048576

x	2^x
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8
-4	1/16
-5	1/32
-10	1/1024
-20	1/1048576

Vemos que el valor $y = 2^x$ crece rápidamente cuando x se vuelve grande, y tiende a 0 rápidamente cuando x se vuelve negativo grande, como se ilustra en la figura.



El comportamiento cuando x se vuelve negativo grande se debe a la relación $2^{-x} = 1/2^x$. Por ejemplo, $2^{-10} = 1/2^{10}$, que es pequeño. Podemos escribir

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x = 0.$$

Observen que $2^x > 0$ para todos los números x. De igual manera, si $a > 0$, entonces

$$\boxed{a^x > 0 \quad \text{para todo } x.}$$

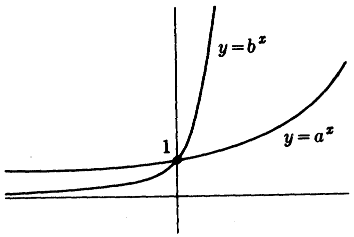
Incluso podemos probar esto a partir de lo que hemos supuesto explícitamente. Para ello supongan que $a^c = 0$ para algún número c. Entonces, para todo x, tenemos

$$a^x = a^{x-c+c} = a^{x-c}a^c = 0,$$

lo cual no es cierto, pues $a^1 = a \neq 0$.

Ejercicio. Hacer una tabla análoga para 3^x, 10^x y $(3/2)^x$.

A continuación supongamos que $1 < a < b$. Es posible que la curva b^x tenga una pendiente mayor que la curva a^x. Estamos interesados especialmente en la pendiente cuando $x = 0$. Si b es muy grande, entonces la curva $y = b^x$ tendrá una pendiente muy empinada en $x = 0$. Si a es > 1 pero está cerca de 1, entonces la curva $y = a^x$ tendrá una pendiente pequeña en $x = 0$. Hemos trazado estas curvas en la figura siguiente.



Traten de localizar algunos puntos sobre las curvas 2^x, 3^x y 10^x para ver lo que sucede en estos casos concretos. Es posible que, cuando a vaya aumentando desde números cercanos a 1 (y > 1) a números muy grandes, la pendiente de a^x en $x = 0$ irá creciendo continuamente de valores cercanos a 0 hasta valores grandes y, por lo tanto, para algún valor de a, que llamaremos e, esta pendiente es precisamente igual a 1. Así, en este enfoque intuitivo, e es el número tal que la pendiente de e^x en $x = 0$ es igual a 1, esto es, para $f(x) = e^x$, tenemos

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1.}$$

De modo que, además de las tres propiedades enunciadas anteriormente, suponemos:

Propiedad 4. Existe un número $e > 1$ tal que

$$\frac{de^x}{dx} = e^x,$$

o, de manera equivalente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Este número e se llama **base natural para las funciones exponenciales.**

Advertencia. No se confundan las funciones 2^x y x^2. La derivada de x^2 es $2x$. La derivada de 2^x es

$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}.$$

De manera análoga, cuando a es un número fijo, no se confunda la función a^x con x^a, donde x es la variable.

Al principio no tenemos idea de lo grande o pequeño que pueda ser e. En los ejercicios del 16 al 20 se aprenderá una manera muy eficiente de hallar una expansión decimal, o aproximaciones para e mediante números racionales. Sucede que e está entre 2 y 3, y en particular, es aproximadamente igual a $2.7183\ldots$.

Al suponer, tal y como lo hemos hecho, las propiedades básicas de e^x, podemos aplicar algunas de las técnicas anteriores en el contexto de esta función exponencial. Mostramos primero que e^x es la única función igual a su propia derivada, salvo por un factor constante.

Teorema 1.1. *Sea $g(x)$ una función definida para todos los números y tal que $g'(x) = g(x)$. Entonces existe una constante C tal que $g(x) = Ce^x$.*

Demostración. Tenemos que probar que $g(x)/e^x$ es constante, y sabemos cómo hacerlo. Basta probar que la derivada es 0. Pero hallamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{e^x}\right) &= \frac{e^x g'(x) - g(x)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^x g(x) - g(x)e^x}{e^{2x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una constante C tal que $g(x)/e^x = C$. Al multiplicar ambos lados por e^x obtenemos

$$g(x) = Ce^x,$$

lo cual prueba el teorema.

Como un caso particular del teorema tenemos:

Sea g una función diferenciable tal que $g'(x) = g(x)$ y $g(0) = 1$. Entonces $g(x) = e^x$.

Demostración. Como $g(x) = Ce^x$, obtenemos $g(0) = Ce^0 = C$. Por lo tanto, $C = 1$ y $g(x) = e^x$.

Así, hay una, y sólo una, función g que es igual a su propia derivada y tal que $g(0) = 1$. Esta función se llama **función exponencial,** y a veces se denota por **exp**. Se puede escribir como

$$\exp'(x) \quad \text{y} \quad \exp(0) = 1.$$

Pero usualmente utilizamos la notación previa e^x, en lugar de $\exp(x)$.

Hay muchas maneras de *probar* la existencia de una función $g(x)$ tal que $g'(x) = g(x)$ y $g(0) = 1$, en lugar de dar argumentos de plausibilidad como los anteriores.

En el capítulo XIV daremos una demostración mediante series infinitas. Por otro lado, cuando estudiemos el logaritmo en la sección §6 de este capítulo, mostraremos primero que existe una función $L(x)$ tal que $L'(x) = 1/x$ y $L(1) = 0$. Entonces se podrá definir la función inversa, y es fácil ver que esta función inversa g satisface $g'(y) = g(y)$ y $g(0) = 1$. Quien esté interesado en dicha teoría puede ojear estas últimas secciones a ver si se ajustan a sus gustos.

Damos ahora ejemplos y aplicaciones relacionados con la función e^x.

Ejemplo. Hallar la derivada de e^{3x^2}.

Usamos la regla de la cadena, con $u = 3x^2$. Entonces

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^{3x^2} \cdot 6x.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = e^{\cos 2x}$. Hallamos la derivada de f por medio de la regla de la cadena, a saber,

$$f'(x) = e^{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)2.$$

No tiene caso simplificar esta expresión.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en $x = 2$.

Sea $f(x) = e^x$. Entonces $f'(x) = e^x$ y $f'(2) = e^2$. Cuando $x = 2$, $y = e^2$. Por lo tanto, debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente e^2, que pasa por el punto $(2, e^2)$. Esta ecuación es

$$y - e^2 = e^2(x - 2).$$

Gráfica de e^x

Tracemos la gráfica de e^x. Justificamos nuestros afirmaciones usando sólo las cuatro propiedades listadas antes. Como

$$\frac{de^x}{dx} = e^x > 0 \quad \text{para todo } x,$$

concluimos que la función $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente. Como

$$f''(x) = f'(x) = f(x) > 0 \quad \text{para todo } x,$$

concluimos que la función se dobla hacia arriba.

Como $f(0) = 1$ y la función es estrictamente creciente, concluimos que

$$f(1) = e > 1.$$

Por lo tanto, cuando n es un entero positivo, $n = 1, 2, 3, \ldots$, las potencias e^n se vuelven grandes conforme n se vuelve grande. Como e^x es estrictamente creciente para todo x, esto muestra también que e^x se vuelve grande cuando x es un número real grande.

Hemos visto que

$$e^{-x} = (e^x)^{-1}.$$

Por lo tanto, cuando x es grande, la inversa

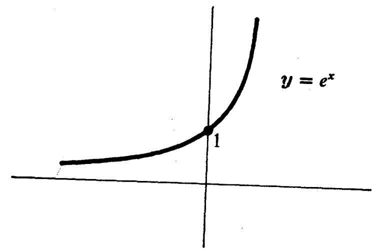
$$(e^x)^{-1} = 1/e^x$$

es pequeña (positiva).

Así podemos escribir:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si } x \to \infty, & \text{entonces} & e^x \to \infty. \\ \text{Si } x \to -\infty, & \text{entonces} & e^x \to 0. \end{array}}$$

Estamos ahora en posición de ver que la gráfica de e^x se ve así:



VIII, §1. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{2x}$ en el punto cuya abscisa es (a) 1, (b) -2, (c) 0?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{x/2}$ en el punto cuya abscisa es (a) -4, (b) 1, (c) 0?
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = xe^x$ en el punto cuya abscisa es 2?
4. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:
   (a) $e^{\operatorname{sen} 3x}$ (b) $\operatorname{sen}(e^x + \operatorname{sen} x)$
   (c) $\operatorname{sen}(e^{x+2})$ (d) $\operatorname{sen}(e^{4x-5})$
5. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:
   (a) $\arctan e^x$ (b) $e^x \cos(3x + 5)$
   (c) $e^{\operatorname{sen} 2x}$ (d) $e^{\arccos x}$
   (e) $1/e^x$ (f) x/e^x
   (g) e^{e^x} (h) $e^{-\operatorname{arcsen} x}$
   (i) $\tan(e^x)$ (j) $\arctan e^{2x}$
   (k) $1/(\operatorname{sen} e^x)$ (l) $\operatorname{arcsen}(e^x + x)$
   (m) $e^{\tan x}$ (n) $\tan e^x$
6. (a) Mostrar que la n-ésima derivada de xe^x es $(x + n)e^x$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   (b) Mostrar que la n-ésima derivada de xe^{-x} es $(-1)^n(x - n)e^{-x}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   (c) Suponer que ya se probaron las fórmulas anteriores para la n-ésima derivada de xe^x y xe^{-x}. ¿Cómo se procedería para probar estas fórmulas para la $(n + 1)$-ésima derivada?

7. Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = f(x)$ y $f(0) = 2$. Determinar completamente f en términos de e^x.

8. (a) Sea $f(x)$ una función diferenciable en algún intervalo que satisfaga la relación $f'(x) = Kf(x)$ para alguna constante K. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{Kx}$. [*Idea:* Mostrar que la función $f(x)/e^{Kx}$ es constante.]
(b) Sea f una función diferenciable tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.
(c) En general, suponer que existe una función h tal que $f'(x) = h'(x)f(x)$. Mostrar que $f(x) = Ce^{h(x)}$. [*Idea:* Mostrar que la función $f(x)/e^{h(x)}$ es constante.] La técnica de este ejercicio se usará en aplicaciones en la última sección.

Hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

9. $y = e^{2x}$, $x = 1$
10. $y = xe^x$, $x = 2$
11. $y = xe^x$, $x = 5$
12. $y = xe^{-x}$, $x = 0$
13. $y = e^{-x}$, $x = 0$
14. $y = x^2e^{-x}$, $x = 1$

15. Probar que existe un número único x tal que $e^x + x = 0$. [*Idea:* Mostrar que la función es estrictamente creciente, y que tiene valores positivos y negativos.]

16. Probar las desigualdades para $x > 0$:

(a) $1 < e^x$ (*b*) $1 + x < e^x$ (*c*) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$

[*Idea:* Primero probar (a) usando el método del capítulo V, §2. Después probar (b) usando (a). Después probar (c) usando (b).]

17. Sea $x = 1$ en el ejercicio 16. Mostrar que $2 < e$. Mostrar además que $2.5 < e$.

18. Probar para $n = 3, 4, 5, 6$ que, para $x > 0$, tenemos
$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x.$$
Por $n!$ (se lee n **factorial**) nos referimos al producto de los primeros n enteros. Por ejemplo:

$$1! = 1 \qquad 4! = 24$$
$$2! = 2 \qquad 5! = 120$$
$$3! = 6 \qquad 6! = 720$$

19. Para $x > 0$ probar:

(a) $1 - x < e^{-x}$ (b) $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} < e^{-x}$

(d) $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

20. (a) Sea $x = 1/2$ en el ejercicio 19(a). Mostrar que $e < 4$.
(b) Sea $x = 1$ en el ejercicio 19(c). Mostrar que $e < 3$.

Funciones hiperbólicas

21. (a) Definir las funciones **coseno hiperbólico y seno hiperbólico** mediante las fórmulas
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$
Mostrar que sus derivadas están dadas por
$$\cosh' = \operatorname{senh} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}' = \cosh.$$
(b) Mostrar que, para todo t, tenemos
$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

Nota: Vemos que las funciones $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$ satisfacen la ecuación de una hipérbola, de manera análoga al seno y coseno ordinarios que satisfacen la ecuación de un círculo, a saber,
$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$
Ésta es la razón por la cual $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$ se llaman coseno hiperbólico y seno hiperbólico, respectivamente.

22. Trazar la gráfica de la función
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Localizar al menos seis puntos sobre esta gráfica.

23. Trazar la gráfica de la función
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
Localizar al menos seis puntos sobre esta gráfica.

24. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x = y$.
(a) Mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Entonces existe la función inversa para este intervalo. Denotar esta función inversa por $x = \operatorname{arccosh} y = g(y)$.
(b) ¿Para qué números y está definida $\operatorname{arccosh} y$?
(c) Mostrar que
$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

25. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x = y$.
(a) Mostrar que f es estrictamente creciente para todo x. Sea $x = \operatorname{arcsenh} y$ la función inversa.
(b) ¿Para qué números y está definida $\operatorname{arcsenh} y$?
(c) Sea $g(y) = \operatorname{arcsenh} y$. Mostrar que
$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

VIII, §2. EL LOGARITMO

Si $e^x = y$, entonces definimos $x = \log y$. *Así, de aquí en adelante,* log *es lo que algunos llaman* log *natural.* No tratamos con otro log. Por definición, tenemos entonces

$$\boxed{e^{\log x} = x \qquad \text{y} \qquad \log e^x = x.}$$

Así, el log es la función inversa de la función exponencial e^x. Como e^x es estrictamente creciente, la función inversa existe.

Ejemplos. Tenemos

$$\log e^x = 2, \qquad \log e^{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$\log e^{-3} = -3, \qquad \log e^{\pi} = \pi.$$

De otra manera:

$$e^{\log 2} = 2, \qquad e^{\log \pi} = \pi.$$

Más aún, la relación $e^0 = 1$ significa que

$$\boxed{\log 1 = 0.}$$

Como todos los valores e^x son positivos para todos los números x, se sigue que

$\log y$ *se define sólo para números positivos*

La regla $e^{(a+b)} = e^a e^b$ se traduce en una regla para el log, como sigue.

Teorema 2.1. *Si u y v son > 0, entonces*

$$\boxed{\log uv = \log u + \log v.}$$

Demostración. Sea $a = \log u$ y $b = \log v$. Entonces

$$e^{a+b} = e^a e^b = e^{\log u} e^{\log v} = uv.$$

Por definición, la relación

$$e^{a+b} = uv$$

significa que

$$\log uv = a + b = \log u + \log v$$

que era lo que se tenía que demostrar.

Teorema 2.2. *Si $u > 0$, entonces*

$$\boxed{\log u^{-1} = -\log u.}$$

Demostración. Tenemos que $1 = uu^{-1}$. Por lo tanto,

$$0 = \log 1 = \log(uu^{-1}) = \log u + \log u^{-1}.$$

Al sumar $-\log u$ en ambos lados, se prueba el teorema.

Ejemplos. Tenemos

$$\log(1/2) = -\log 2$$

$$\log(2/3) = \log 2 - \log 3.$$

Es obvio que podemos tomar el log de un producto con más de dos términos, así como podemos tomar la exponencial de una suma de más de dos términos. Por ejemplo

$$e^{a+b+c} = e^{a+b}e^c = e^a e^b e^c.$$

De manera análoga, si n es un entero positivo, entonces

$$e^{na} = e^{a+a+\cdots+a} = e^a e^a \cdots e^a = (e^a)^n,$$

donde el producto de la derecha se toma n veces.

Tenemos la regla correspondiente para el log, a saber,

$$\boxed{\log(u^n) = n \log u.}$$

Por ejemplo, por el teorema 2.1, hallamos que:

$$\log(u^2) = \log(u \cdot u) = \log u + \log u = 2\log u.$$

$$\begin{aligned}\log(u^3) &= \log(u^2 u) = \log u^2 + \log u \\ &= 2\log u + \log u \\ &= 3\log u.\end{aligned}$$

Y así sucesivamente, para obtener $\log u^n = n \log u$.

Se sigue ahora que, si n es un entero positivo, entonces

$$\boxed{\log u^{1/n} = \frac{1}{n}\log u.}$$

Demostración. Sea $v = u^{1/n}$. Entonces $v^n = u$, y hemos visto ya que

$$\log v^n = n \log v.$$

Por lo tanto,

$$\log v = \frac{1}{n}\log v^n,$$

que es precisamente la relación $\log u^{1/n} = 1/n \log u$.

El mismo tipo de regla vale para exponentes fraccionales, esto es:

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$\log u^{m/n} = \frac{m}{n}\log u.$$

Demostración. Escribimos $u^{m/n} = (u^m)^{1/n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\log u^{m/n} &= \log(u^m)^{1/n}\\ &= \frac{1}{n}\log u^m\\ &= \frac{m}{n}\log u\end{aligned}$$

al usar los dos casos por separado.

Para dar idea del comportamiento de log, damos unos cuantos valores aproximados:

$$\log 10 = 2.3,\ldots, \qquad \log 10\,000 = 9.2,\ldots,$$
$$\log 100 = 4.6,\ldots, \qquad \log 100\,000 = 11.5,\ldots,$$
$$\log 1000 = 6.9,\ldots, \qquad \log 1\,000\,000 = 13.8,\ldots,$$

Se puede ver que, si x crece como una progresión geométrica, entonces $\log x$ crece como una progresión aritmética. Los valores anteriores ilustran la regla

$$\log 10^n = n\log 10,$$

donde $\log 10$ es aproximadamente 2.3.

En los ejercicios 17 y 19 de la sección §1 habrán probado que $2.5 < e < 3$. Hacer una tabla de los valores e^n y $\log e^n = n$. Entonces se puede comparar el crecimiento de e^n con $\log e^n$ de manera similar. Para enteros positivos se puede ver que $\log e^n$ crece muy despacio comparado con e^n. Por ejemplo,

$$\log e^3 = 3,$$
$$\log e^4 = 4,$$
$$\log e^5 = 5,$$
$$\log e^{10} = 10.$$

Usando el hecho de que e está entre 2 y 3, se puede ver que las potencias como e^5 o e^{10} son bastante grandes comparadas con los valores de log, que son 5 y 10, respectivamente, en estos casos. Por ejemplo, como $e > 2$, tenemos

$$e^{10} > 2^{10} > 1000.$$

Se observa el mismo fenómeno en dirección opuesta para las potencias negativas de e. Por ejemplo:

$$\log\frac{1}{e} = -1,$$
$$\log\frac{1}{e^2} = -2,$$
$$\log\frac{1}{e^3} = -3,$$
$$\log\frac{1}{e^{10}} = -10.$$

Hacer $h = 1/e^y$. Conforme h tiende a 0, y se vuelve positivo grande, pero bastante despacio. Hacer una tabla análoga para $\log(1/10^n)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, para obtener una idea con ejemplos numéricos.

Observen que si x es un número entero positivo y escribimos $x = e^y$, entonces $y = \log x$ es negativo grande. Por ejemplo,

$$\text{si } x = 1/e^{10^6} = e^{-10^6}, \qquad \text{entonces} \qquad \log x = -10^6,$$
$$\text{si } x = 1/e^{10^{100}} = e^{-10^{100}}, \qquad \text{entonces} \qquad \log x = -10^{100}.$$

En resumen:

$$\boxed{\text{Si } x \to 0, \text{ entonces } \log x \to -\infty.}$$

La razón viene del comportamiento de e^y. Si $y \to -\infty$, entonces $e^y \to 0$. Del mismo modo, si $y \to \infty$, entonces $e^y \to \infty$. Esto se traduce en la propiedad correspondiente de la función inversa:

$$\boxed{\text{Si } x \to \infty, \text{ entonces } \log x \to \infty.}$$

La derivada de log

A continuación consideramos las propiedades de diferenciación de la función log. Sea

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad x = \log y.$$

Por medio de la regla para diferenciar funciones inversas, hallamos

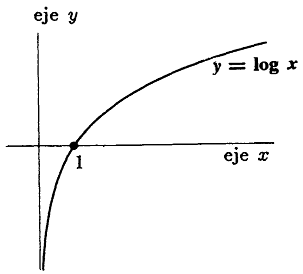
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Por lo tanto, tenemos la fórmula:

Teorema 2.3.

$$\boxed{\frac{d\log y}{dy} = \frac{1}{y}.}$$

De la gráfica de e^x vemos que e^x toma todos los valores > 0. Por ello, la función inversa log está definida para todos los números reales positivos, y por la manera general de hallar la gráfica de una función inversa, vemos que su gráfica se ve como en la figura.



En la figura, la gráfica cruza el eje horizontal en 1, pues

$$e^0 = 1 \quad \text{significa que} \quad \log 1 = 0.$$

Nótese que la derivada satisface

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} > 0, \quad \text{para todo} \quad x > 0,$$

de modo que la función log es estrictamente creciente.

Más aún

$$\boxed{\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0.}$$

Concluimos que la función log se dobla hacia abajo según se mostró.

Observación. A veces consideraremos funciones compuestas del tipo $\log(f(x))$. Como log no está definida para números < 0, la expresión $\log(f(x))$ está definida sólo para números x tales que $f(x) > 0$. Esto es lo que debe entenderse cuando se escriba este tipo de expresión.

Entonces, si escribimos $\log(x - 2)$, estará definida sólo cuando $x - 2 > 0$, en otras palabras, $x > 2$. Cuando escribamos $\log(\operatorname{sen} x)$, la expresión tendrá sentido sólo cuando $\operatorname{sen} x > 0$. No está definida cuando $\operatorname{sen} x \leq 0$.

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = \log(x - 2)$ en el punto $x = 5$.

Sea $f(x) = \log(x - 2)$. Entonces $f'(x) = 1/(x - 2)$ y

$$f'(5) = 1/3.$$

Cuando $x = 5$, $\log(x - 2) = \log 3$. Debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente $1/3$, que pasa por $(5, \log 3)$. Esto es fácil, como puede verse:

$$y - \log 3 = \tfrac{1}{3}(x - 5).$$

Ejemplo. Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + \log x$, para $x > 0$.

Comenzamos tomando la derivada, a saber,

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

La función f tiene un punto crítico precisamente cuando $2x = -1/x$, esto es, $2x^2 = -1$. Esto nunca puede suceder, por lo cual no hay punto crítico. Cuando $x > 0$, la derivada es positiva, por lo que en este intervalo la función es estrictamente creciente.

Cuando x se vuelve positivo grande, x^2 y $\log x$ se vuelven positivos grandes. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad x \to \infty, \quad \text{entonces} \quad f(x) \to \infty.$$

Conforme x tiende a 0 por la derecha, x^2 tiende a 0, pero $\log x$ se vuelve negativo grande. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad x \to 0 \quad \text{y} \quad x > 0, \quad \text{entonces} \quad f(x) \to -\infty.$$

Finalmente, para determinar las regiones donde f se dobla hacia arriba o hacia abajo, tomamos la segunda derivada y hallamos

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}.$$

Entonces:

$$f''(x) > 0 \iff 2x^2 - 1 > 0 \iff x > 1/\sqrt{2}$$
$$\iff \text{se dobla hacia arriba.}$$

De manera semejante,

$$f''(x) < 0 \iff 2x^2 - 1 < 0 \iff x < 1/\sqrt{2}$$
$$\iff f \text{ se dobla hacia abajo.}$$

Por lo tanto, $1/\sqrt{2}$ es un punto de inflexión. Afirmamos que

$$f(1/\sqrt{2}) > 0.$$

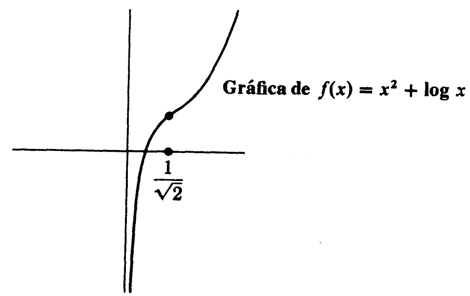
En efecto,

$$f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \log(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Pero el log es estrictamente creciente y $2 < e$, de modo que

$$\log 2 < \log e = 1.$$

Por lo tanto, $1 - \log 2 > 0$. Esto prueba que $f(1/\sqrt{2}) > 0$. Se sigue que la gráfica de f se ve así.



VIII, §2. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = \log x$ en el punto cuya abscisa es (a) 2, (b) 5, (c) $\frac{1}{2}$?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x^2+1)$ en el punto cuya abscisa es (a) -1, (b) 2, (c) -3?
3. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

   (a) $\log(\operatorname{sen} x)$ (b) $\operatorname{sen}(\log(2x+3))$ (c) $\log(x^2+5)$ (d) $\dfrac{\log 2x}{\operatorname{sen} x}$
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x+1)$ en el punto cuya abscisa es 3?
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(2x-5)$ en el punto cuya abscisa es 4?
6. (a) Probar que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$. [*Idea:* Sea $f(x) = x - \log(1+x)$, hallar $f(0)$ y mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$.]
   (b) Para $x > 0$, mostrar que
$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x).$$

Hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

7. $y = \log x$, en $x = e$
8. $y = x\log x$, en $x = e$
9. $y = x \log x$, en $x = 2$
10. $y = \log(x^3)$, en $x = e$
11. $y = \dfrac{1}{\log x}$ en $x = e$
12. $y = \dfrac{1}{\log x}$, en $x = 2$

Diferenciar las funciones siguientes.

13. $\log(2x+5)$
14. $\log(x^2+3)$
15. $\dfrac{1}{\log x}$
16. $\dfrac{x}{\log x}$
17. $x(\log x)^{1/3}$
18. $\log\sqrt{1-x^2}$
19. Trazar la curva $y = x + \log x$, $x > 0$.
20. Probar que existe un número único $x > 0$ tal que $\log x + x = 0$. [*Idea:* Mostrar que la función es estrictamente creciente y toma valores positivos y negativos. Usar el teorema del valor intermedio.]

VIII, §3. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL GENERAL

Sea a un número > 0. En la sección §1 listamos cuatro propiedades de la función a^x, con x como la variable. Listaremos una más:

Propiedad 5. Para todos los números x y y tenemos
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Por ejemplo, si $x = n$ y $y = m$ son enteros positivos, entonces $(a^m)^n$ es el producto de a^m consigo mismo n veces, que es igual a a^{mn}. Deduciremos ahora algunas consecuencias de esta propiedad.

En primer lugar, de la sección anterior sabemos que
$$a = e^{\log a}.$$
Por lo tanto,
$$a^x = (e^{\log a})^x.$$
Por la propiedad 5, se tiene
$$\boxed{a^x = e^{x \log a}}$$
pues $(\log a)x = x \log a$. Así por ejemplo,
$$2^x = e^{x\log 2}, \qquad \pi^x = e^{x \log \pi}, \qquad 10^x = e^{x \log 10}.$$
La fórmula anterior permite hallar la derivada de a^x. Recuerden que a debe considerarse *constante.*

Teorema 3.1. *Tenemos*
$$\boxed{\frac{d(a^x)}{dx} = a^x(\log a).}$$

Demostración. Usamos la regla de la cadena. Sea $u = (\log a)x$. Entonces $du/dx = \log a$ y $a^x = e^u$. Por lo tanto,
$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\frac{du}{dx} = e^u(\log a) = a^x \log a$$
según se deseaba.

Ejemplo.
$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \log 2.$$

Advertencia. La derivada de x^x **NO** es $x^x \log x$. Obténgase en el ejercicio 7. La diferencia entre x^x y a^x (como 2^x o 10^x) es que a es constante, mientras que, en la expresión x^x, la variable x aparece dos veces.

El resultado del teorema 3.1 aclara el misterioso límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$
encontrado en la sección §1. Veremos ahora que este límite es igual a $\log 2$. De manera más general, sea $a > 0$ y sea
$$f(x) = a^x > .$$
En la sección §1 dimos el argumento de que
$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

Por el teorema 3.1 sabemos además que

$$f'(x) = a^x \log a.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a.}$$

Como el log es estrictamente creciente, hay un solo número a tal que $\log a = 1$, y ese número es $a = e$. Así, la función exponencial e^x es la única entre todas las posibles funciones exponenciales a^x cuya derivada es igual a sí misma. Por el teorema 3.1, como

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a,$$

si $a \neq e$, entonces obtenemos el factor $\log a \neq 1$ en la fórmula para la derivada de a^x.

Como aplicación de nuestra teoría de la función exponencial podemos ocuparnos de la función potencia general (que dejamos pendiente en el capítulo III).

Teorema 3.2. *Sea c cualquier número, y sea*

$$f(x) = x^c$$

definida para $x > 0$. Entonces $f'(x)$ existe y es igual a

$$f'(x) = cx^{c-1}.$$

Demostración. Hacer $u = c\log x$. Por definición,

$$f(x) = e^{c\log x} = e^u.$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{x}.$$

Usando la regla de la cadena, vemos que

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{c\log x} \cdot \frac{c}{x} = x^c \cdot \frac{c}{x} = cx^c x^{-1} = cx^{c-1}.$$

Esto prueba nuestro teorema.

Advertencia. El número c en el teorema 3.2 es constante, y x es la variable. **No confundir**

$$\frac{dc^x}{dx} = c^x \log c \quad \text{con} \quad \frac{dx^c}{dx} = cx^{c-1}.$$

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = x^x$ en $x = 2$.

Podemos escribir la función x^x en la forma

$$y = f(x) = e^{x\log x}.$$

Entonces,

$$f'(x) = e^{x\log x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x\right)$$
$$= x^x(1 + \log x).$$

En particular, obtenemos la derivada (pendiente) en $x = 2$,

$$f'(2) = 2^2(1 + \log 2) = 4(1 + \log 2).$$

Tenemos $f(2) = 2^2 = 4$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es

$$y - 4 = 4(1 + \log 2)(x - 2).$$

Definición. Cuando x y y son dos números tales que $y = 2^x$, es costumbre decir que x es el **log de y de base 2**. De manera análoga, si a es un número > 0 y $y = a^x = e^{x\log a}$, decimos que x es el **log de y de base a**. Cuando $y = e^x$, decimos simplemente que $x = \log y$.

El log de base a se escribe a veces $\log_a$.

Concluimos esta sección estudiando límites, que ahora son fáciles de manejar. En primer lugar tenemos

Límite 1.

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log(1 + h) = 1.}$$

En efecto, el límite del lado izquierdo no es más que el límite del cociente de Newton

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h) - \log 1}{h} = \log'(1).$$

Como $\log'(x) = 1/x$, se sigue que $\log'(1) = 1$, como se deseaba.

Límite 2.

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h} = e.}$$

Demostración. Tenemos

$$(1 + h)^{1/h} = e^{1/h\log(1+h)}$$

ya que, por definición, $a^x = e^{x\log a}$. Acabamos de ver que

$$\frac{1}{h}\log(1 + h) \to 1 \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Por consiguiente,

$$e^{(1/h)\log(1+h)} \to e^1 = e \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Esto prueba el límite deseado.

Observación. Aquí estamos usando la *continuidad* de la función e^x.

Si x tiende a un número x_0, entonces e^x tiende a e^{x_0}.

Que la función e^x sea continua se sigue de la hipótesis de que e^x es diferenciable.

Por ejemplo, si x tiende a $\sqrt{2}$, entonces e^x tiende a $e^{\sqrt{2}}$.
Si x tiende a 1, entonces e^x tiende a $e^1 = e$.
Si x tiende a 0, entonces e^x tiende a $e^0 = 1$.

Regresemos al límite 2 y reformulemos este límite. Escribimos $h = 1/x$. Cuando h tiende a 0, x se vuelve grande, esto es,

$$h \to 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \to \infty.$$

A partir de eso hallamos el límite:

Límite 3.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

En los ejercicios se dedujo fácilmente de este límite que, para $r > 0$, tenemos

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r.}$$

Esto tiene una aplicación interesante.

Ejemplo. Interés compuesto. Sea A una cantidad de dinero invertida a interés compuesto anual de $100r$ por ciento, donde $r > 0$. Así r es la razón de la tasa de interés de 100 por ciento. Entonces esta cantidad original crece hasta las cantidades siguientes después del número indicado de años:

Después de 1 año: $A + rA = (1+r)A$.
Después de 2 años: $(1+r)A + r(1+r)A = (1+r)^2A$.
Después de 3 años: $(1+r)^2A + r(1+r)^2A = (1+r)^3A$.

Al continuar de esta manera concluimos que, después de n años, la cantidad es

$$A_n = (1+r)^nA.$$

Supongamos ahora que esta misma tasa de interés de $100r$ se compone cada $1/m$ años, donde m es un entero positivo. Esto es equivalente a decir que la tasa es de $100r/m$ por ciento por $1/m$ años, compuesto cada $1/m$ años. Apliquemos la fórmula anterior al caso donde la unidad de tiempo es $1/m$ años. Entonces q años son iguales a $qm \cdot 1/m$ años. Por lo tanto, si el interés se compone cada $1/m$ años, depués de q años la cantidad es

$$A_{q,m} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{qm}A.$$

La cantidad que se obtiene después de q años, si el interés está compuesto continuamente, es el límite de $A_{q,m}$ cuando $m \to \infty$. A la luz del límite que el lector ya debe haber determinado, vemos que después de q años de composición continua, la cantidad es

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{qm}A = e^{rq}A.$$

Para dar un caso numérico, suponer que 1000 dólares producen el 15 por ciento compuesto anualmente. Entonces $r = 15/100$. Después de 10 años, la cantidad será

$$e^{\frac{15}{100}10}\cdot 1000 = e^{1.5}1000.$$

Como e es aproximadamente 2.7, se puede obtener una respuesta numérica definida.

VIII, §3. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la derivada de 10^x? ¿Y de 7^x?
2. ¿Cuál es la derivada de 3^x? ¿Y de π^x?
3. Trazar las curvas $y = 3^x$ y $y = 3^{-x}$. Localizar al menos cinco puntos.
4. Trazar las curvas $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$. Localizar al menos cinco puntos.
5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 10^x$ en $x = 0$.
6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de $y = \pi^x$ en $x = 2$.
7. (a) ¿Cuál es la derivada de la función x^x (definida para $x > 0$)? [*Idea:* $x^x = e^{x\log x}$]
   (b) ¿Cuál es la derivada de la función $x^{(x^x)}$?
8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^x$
   (a) en el punto $x = 1$ (b) en $x = 2$ (c) en $x = 3$.

Hallar las rectas tangentes a las curvas siguientes:

9. $y = x^{\sqrt{x}}$ (*a*) en $x = 2$ (*b*) en $x = 5$
10. $y = x^{-\sqrt{x}}$ (*a*) en $x = 2$ (*b*) en $x = 5$
11. Si a es un número > 1 y $x > 0$, mostrar que
$$x^a - 1 \geq a(x-1).$$
12. Sea a un número > 0. Hallar los puntos críticos de la función $f(x) = x^2/a^x$.
13. Sea $0 < r$. Usando el límite 3, probar el límite
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r.$$
[*Idea:* Sea $x = ry$ y sea $y \to \infty$.]

14. Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \log a.$$

[*Idea:* Sea $h = 1/n$.] Este ejercicio muestra cómo se pueden obtener aproximaciones del logaritmo con sólo tomar raíces n-ésimas ordinarias. De hecho, al tomar $n = 2^k$ y usar enteros grandes k, obtenemos aproximaciones arbitrariamente buenas de log al extraer una sucesión de raíces cuadradas. Hacerlo en una calculadora de bolsillo para verificarlo.

VIII, §4. ALGUNAS APLICACIONES

Se sabe (de datos experimentales) que cuando un trozo de radio se deja para que se desintegre, la razón de desintegración es proporcional a la cantidad de radio que queda. Dos cantidades son proporcionales cuando una es un múltiplo constante de la otra.

Supóngase que en el tiempo $t = 0$ tenemos 10 gramos de radio y que en el tiempo t queda $f(t)$ cantidad de radio. Entonces

$$\boxed{\frac{df}{dt} = Kf(t)}$$

para alguna constante K. Tomamos K negativa porque la interpretación física es que la cantidad de substancia decrece.

Mostremos que existe una constante C tal que

$$\boxed{f(t) = Ce^{Kt}.}$$

Si tomamos la derivada del cociente

$$\frac{f(t)}{e^{Kt}}$$

y usamos la regla para la derivada de un cociente, hallamos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{e^{Kt}}\right) = \frac{e^{Kt}f'(t) - Ke^{Kt}}{e^{2Kt}} = 0$$

pues $f'(t) = Kf(t)$. Como la derivada es 0, el cociente $f(t)/e^{Kt}$ es constante, o, de manera equivalente, hay una constante C tal que

$$f(t) = Ce^{Kt}.$$

Sea $t = 0$. Entonces $f(0) = C$. Así, $C = 10$, si se supone que comenzamos con 10 gramos.

En general, si $f(t) = Ce^{Kt}$ es la función que da la cantidad de substancia como función del tiempo, entonces

$$\boxed{f(0) = C,}$$

y C se interpreta como la cantidad de substancia cuando $t = 0$, esto es, la cantidad original.

También se puede considerar una reacción química. Es frecuente el caso en que la razón de la reacción es proporcional a la cantidad de la substancia reactiva presente. Si $f(t)$ denota la cantidad de substancia que queda después del tiempo t, entonces

$$\frac{df}{dt} = Kf(t)$$

para alguna constante K (determinada experimentalmente en cada caso). Estamos entonces en una situación semejante a la anterior, y

$$f(t) = Ce^{Kt},$$

donde C es la cantidad de substancia en $t = 0$.

Ejemplo 1. Suponer que $f(t) = 10e^{Kt}$, donde K es una constante. Suponer que $f(3) = 5$. Hallar K.

Tenemos

$$5 = 10e^{K3},$$

y entonces

$$e^{3K} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$3K = \log(1/2) \quad \text{y} \quad K = \frac{-\log 2}{3}.$$

Ejemplo 2. El azúcar se disuelve en el agua a una razón proporcional a la cantidad aún sin disolver. Si 25 kg de azúcar se reducen a 7 kg en 3 hr, ¿cuándo se disolverá el 20 por ciento del azúcar?

Sea $S(t)$ la cantidad de azúcar que aún no se disuelve, en el instante t. Entonces, por hipótesis,

$$S(t) = Ce^{-kt}$$

para constantes adecuadas C y k. Más aún, como $S(0) = C$, tenemos $C = 25$. Así

$$S(t) = 25e^{-kt}.$$

También tenemos

$$S(3) = 25e^{-3k} = 7$$

de modo que

$$e^{-3k} = \frac{7}{25}.$$

Así podemos despejar k, a saber, tomamos el log y obtenemos

$$-3k = \log(7/25),$$

de donde

$$-k = \frac{1}{3}\log(7/25).$$

Cuando se ha disuelto el 20 por ciento, queda el 80 por ciento. Nótese que el 80 por ciento de 25 es 20. Queremos hallar t tal que

$$20 = 25e^{-kt},$$

o, en otras palabras,

$$e^{-kt} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Obtenemos

$$-kt = \log(4/5),$$

de donde

$$t = \frac{\log(4/5)}{-k} = 3\frac{\log(4/5)}{\log(3/10)}.$$

Ésta es nuestra respuesta.

Observación. No cambia el resultado si comenzamos con

$$S(t) = Ce^{-kt} \quad \text{o} \quad S(t) = Ce^{kt}.$$

Incluso pudimos haber trabajado el problema de otra manera. Para aplicaciones, cuando las substancias decrecen resulta conveniente usar una convención tal que $k > 0$, de modo que la expresión e^{-kt} decrezca cuando t crece. Pero matemáticamente, los procedimientos son equivalentes, basta hacer $K = -k$.

Ejemplo 3. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos

$$f(t)Ce^{-kt}$$

para alguna constante positiva k. ¿En qué instante quedará exactamente 1/4 de la cantidad original?

Para hacer esto, queremos saber el valor de t tal que

$$f(t) = C/4.$$

Por ello, queremos resolver

$$Ce^{-kt} = C/4.$$

Nótese que podemos cancelar C para obtener $e^{-kt} = 1/4$. Tomando logaritmos se tiene

$$-kt = -\log 4,$$

de donde

$$t = \frac{\log 4}{k}.$$

Observen que la respuesta es independiente de la cantidad original C. Los experimentos permiten determinar la constante k. Por ejemplo, si se pudiera analizar una muestra y determinar que queda 1/4 parte después de 1000 años, hallaríamos que

$$k = \frac{\log 4}{1000}.$$

Ejemplo 4 El crecimiento exponencial también refleja la explosión demográfica de la población. Si $P(t)$ es la población como función del tiempo t, entonces su razón de crecimiento es proporcional a la población total; en otras palabras,

$$\frac{dp}{dt} = KP(t)$$

para alguna constante positiva K. Se sigue entonces que

$$P(t) = Ce^{Kt}$$

para alguna constante C, que es la población en el instante $t = 0$.

Supongan que buscamos el instante en que se duplicará la población. Debemos entonces hallar t tal que

$$Ce^{Kt} = 2C,$$

o, de manera equivalente,

$$e^{Kt} = 2.$$

Al tomar log se tiene

$$Kt = \log 2,$$

de donde

$$t = \frac{\log 2}{K}.$$

Nótese que este instante depende sólo de la razón de cambio de la población, no del valor original de C.

VIII, §4. EJERCICIOS

1. Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K. Suponer que se sabe que $f(1/2) = 2$. Hallar K.
2. Sea $f(t) = Ce^{2t}$. Suponer que se sabe que $f(2) = 5$. Determinar la constante C.
3. Un gramo de radio se deja para que se desintegre. Después de un millón de años queda 0.1 gramo. ¿Cuál es la fórmula que da la razón de desintegración?
4. Cierta substancia química reacciona de manera que la razón de reacción es igual a la cantidad de substancia presente. Después de una hora, quedan 20 gramos de substancia. ¿Cuánta substancia había al principio?
5. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos
$$f(t) = Ce^{Kt}.$$
¿En qué instante habrá exactamente la mitad de la cantidad original presente?
6. Suponer que $K = -4$ en el ejercicio anterior. ¿En qué instante habrá un tercio de la substancia?

7. Si las bacterias crecen en número con una razón proporcional al número presente, ¿cuánto tiempo pasará antes de que 1 000 000 de bacterias aumenten a 10 000 000 si tardan 12 minutos en aumentar a 2 000 000?

8. Una substancia se descompone a razón proporcional a la cantidad presente. Después de 3 minutos se ha descompuesto el 10 por ciento de la substancia original. ¿Cuándo se descompondrá la mitad de la cantidad original?

9. Sea f una función de una variable t y crece a la razón $df/dt = kf$, donde k es una constante. Sea $a_n = f(nt_1)$, donde t_1 es un valor fijo de t, $t_1 > 0$. Mostrar que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una progresión geométrica.

10. En 1900, la población de una ciudad fue de 50 000 habitantes. En 1950 fue de 100 000. Si la razón de crecimiento de la población es proporcional a la población, ¿cuál será la población en 1984? ¿En qué año será de 200 000?

11. Suponer que la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura, a cualquier altura, es proporcional a la presión que hay ahí. Si en el barómetro se lee 30 a nivel del mar y 24 a 1835 m, hallar la lectura barométrica a los 3058 m sobre el nivel del mar.

12. El azúcar se disuelve en el agua a razón proporcional a la cantidad todavía sin disolverse. Si 13.6 kg de azúcar se reducen a 4.5 kg en 4 hr, ¿cuándo se disolverá el 95 por ciento del azúcar?

13. Una partícula se mueve con velocidad $s(t)$ que satisface $ds/dt = -ks$, donde k es alguna constante. Si la velocidad inicial es de 16 unidades/min y si la velocidad se disminuye a la mitad en 2 min, hallar el valor de t cuando la velocidad es de 10 unidades/min.

14. Suponer que la diferencia x entre la temperatura de un cuerpo y su medio ambiente decrece a razón proporcional a su diferencia. Si $x = 100°$ cuando $t = 0$, y $x = 40°$ cuando $t = 40$ minutos, hallar t (a) cuando $x = 70°$, (b) cuando $x = 16°$, (c) el valor de x cuando $t = 20$.

15. Al apostar, un jugador inexperto pierde dinero a una razón igual a la cantidad que tiene en cada instante. ¿En qué instante t habrá perdido la mitad de su capital inicial?

16. Se sabe que el carbono radiactivo tiene una vida media de 5568 años, lo cual significa que eso tarda en descomponerse la mitad de la cantidad original. Además, la razón de descomposición es proporcional a la cantidad presente, de modo que, por lo que hemos visto en el texto, tenemos la fórmula
$$f(t) = Ce^{Kt}$$
para esta cantidad, donde C y K son constantes.
(a) Hallar explícitamente la constante K.
(b) Se halla algo de carbono descompuesto en una cueva y un análisis muestra que se ha descompuesto un quinto de la cantidad original. ¿Cuánto tiempo lleva el carbono en la cueva?

VIII, §5. ORDEN DE MAGNITUD

En esta sección analizamos más de cerca el significado de nuestra expresión acerca de que e^x crece mucho más rápido que x, y $\log x$ crece mucho más despacio que x, cuando x se vuelve grande positivo.

Consideremos el cociente
$$\frac{e^x}{x}$$
cuando x se vuelve grande positivo. Tanto el numerador como el denominador se vuelven grandes, y la cuestión es: ¿cuál es el comportamiento del cociente?

Primero hagamos una tabla para valores sencillos $2^n/n$ cuando n es un *entero positivo*, para ver experimentalmente que $2^n/n$ se vuelve grande cuando n se vuelve grande. Acordemos que n denotará siempre a un entero positivo, a menos que se especifique otra cosa.

n	2^n	$2^n/n$
1	2	2
2	4	2
3	8	8/3
4	16	4
5	32	$32/5 > 6$
10	1024	$102.4 > 100$
20	1048 576	$52\,428.8 > 5 \times 10^4$

Como $2 < e$, tenemos $2^n/n < e^n/n$, y vemos *experimentalmente* que e^n/n se vuelve grande. Ahora queremos *probar* esto. Probemos primero algunas desigualdades para e^x. Usamos técnicas de los ejercicios de la sección §1 y procedemos por pasos. Consideremos $x \geq 0$.

(a) Mostremos primero que
$$\boxed{1 + x < e^x \quad \text{para} \quad x > 0.}$$

Sea $f_1(x) = e^x - (1 + x)$. Entonces $f_1'(x) = e^x - 1$. Como $e^x > 1$ para $x > 0$, concluimos que
$$f_1'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$
Por lo tanto, $f_1(x)$ es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Como $f_1(0) = 0$, concluimos que $f_1(x) > 0$ para $x > 0$, lo cual significa que
$$e^x - (1 + x) > 0, \quad \text{o en otras palabras,} \quad e^x > 1 + x,$$
como se quería demostrar.

(b) A continuación mostramos que
$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x \text{ para } x > 0.}$$

Sea $f_2(x) = e^x - (1 + x + x^2/2)$. Entonces $f_2(0) = 0$. Más aún,

$$f_2'(x) = e^x - (1 + x).$$

Por la parte (a), sabemos que $f_2'(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f_2 es estrictamente creciente, y se sigue que $f_2(x) > 0$ para $x > 0$, o, en otras palabras,

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) > 0 \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Esto prueba la desigualdad deseada.

Teorema 5.1. *La función e^x/x se vuelve grande cuando x se vuelve grande.*

Demostración. Dividimos ambos lados de la desigualdad (b) entre x y obtenemos

$$\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} < \frac{e^x}{x}.$$

Cuando x se vuelve grande, sucede lo mismo con el lado izquierdo, y queda probado el teorema 5.1.

Teorema 5.2. *La función e^x/x^2 se vuelve grande cuando x se vuelve grande. De manera más general, sea m un número positivo. Entonces*

$$\frac{e^x}{x^m} \to \infty \qquad \textit{cuando} \qquad x \to \infty.$$

Demostración. Usamos el mismo método. Primero se prueba la desigualdad

(c) $$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x \qquad \textit{para} \qquad x > 0.}$$

Recordar que, por definición, $2! = 2$ y $3! = 3 \cdot 2 = 6$. Esta vez hacemos

$$f_3(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right).$$

Entonces $f_3(0) = 0$. Más aún, al usar la desigualdad (b) hallamos

$$f_3'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = f_2(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Por lo tanto, $f_3(x)$ es estrictamente creciente y entonces $f_3(x) > 0$ para $x > 0$. Esto prueba la desigualdad (c).

Si dividimos ambos lados de la desigualdad (c) por x^2, hallaremos

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{6} < \frac{e^x}{x^2}.$$

Cuando x se vuelve grande, el lado izquierdo se vuelve grande, de modo que e^x/x^2 se vuelve grande. Esto prueba la primera afirmación del teorema 5.2.

Podemos continuar con el mismo método para probar el enunciado general acerca de e^x/x^n. En primer lugar deberá probarse que

(d) $$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} < e^x \qquad \textit{para} \qquad x > 0}$$

para tener idea del procedimiento secuencial que se usó. Probaremos ahora el paso general usando un entero arbitrario n. En general, sea

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Supongamos que ya se probó que

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \qquad \text{para} \qquad x > 0,$$

o, en otras palabras, que

$$P_n(x) < e^x \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Después probaremos que

$$P_{n+1}(x) < e^x \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Para esto, hagamos

$$f_{n+1}(x) = e^x - P_{n+1}(x) \qquad \text{y} \qquad f_n(x) = e^x - P_n(x).$$

Entonces, $f_{n+1}(0) = 0$ y $f_{n+1}'(x) = f_n(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f_{n+1} es estrictamente creciente, y entonces $f_{n+1}(x) > 0$ para $x > 0$, como se deseaba.

Así pues, dado nuestro entero m, tenemos una desigualdad

$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} < e^x \qquad \text{para} \qquad x > 0.}$$

Dividimos ambos lados de esta desigualdad entre x^m. Entonces el lado izquierdo está formado por una suma de términos positivos, el último de los cuales es

$$\frac{x}{(m+1)!}.$$

Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\frac{x}{(m+1)!} < \frac{e^x}{x^m} \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Como el lado izquierdo se vuelve grande cuando x se vuelve grande, sucede lo mismo con el lado derecho, y queda probado el teorema 5.2.

Ejemplo. Tracemos la gráfica de $f(x) = xe^x$. Tenemos

$$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x + 1).$$

Como $e^x > 0$ para todo x, obtenemos:

$$f'(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1,$$
$$f'(x) > 0 \iff x + 1 > 0 \iff x > -1,$$
$$f'(x) < 0 \iff x + 1 < 0 \iff x < -1.$$

Hay un solo punto crítico en $x = -1$, y las otras desigualdades nos dan regiones de crecimiento y de decrecimiento para f.

Respecto hacia dónde se dobla:

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x(x+1) = e^x(x+2).$$

Entonces:

$$f''(x) = 0 \iff x = -2,$$
$$f''(x) > 0 \iff x > -2 \iff f \text{ se dobla hacia arriba},$$
$$f''(x) < 0 \iff x < -2 \iff f \text{ se dobla hacia abajo}.$$

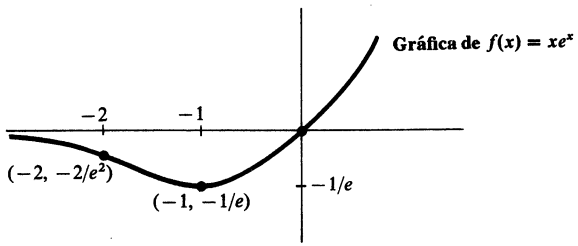
Si $x \to \infty$, entonces $e^x \to \infty$, de modo que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to -\infty$, entonces hacemos $x = -y$, con $y \to \infty$.

Por el teorema 5.1,

$$xe^x = -ye^{-y} \to 0 \quad \text{si} \quad y \to \infty.$$

Finalmente, $f(0) = 0$, $f(-1) = -1/e$, $f(-2) = -2/e^2$, por lo que la gráfica se ve así.



Ejemplo. Sea $0 < a < 1$, donde a es un número fijo. Hallar el máximo de la función

$$f(x) = xa^x.$$

Primero se toma la derivada:

$$f'(x) = x \cdot a^x \log a + a^x$$
$$= a^x(x \log a + 1)$$

Como $a^x > 0$ para todo x, vemos que

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{\log a}.$$

Así, la función tiene exactamente un punto crítico. Más aún,

$$f'(x) > 0 \iff x \log a + 1 > 0 \iff x < -\frac{1}{\log a}$$
$$f'(x) < 0 \iff x \log a + 1 < 0 \iff x > -\frac{1}{\log a}.$$

(Recuerden que $0 < a < 1$, de modo que $\log a$ es negativo.) En consecuencia, la función es creciente en el intervalo situado a la izquierda del punto crítico, y decreciente en el intervalo que está a la derecha del punto crítico. Entonces, el punto crítico es el máximo deseado. El valor de f en este punto crítico es igual a

$$f(-1/\log a) = -\frac{1}{\log a} a^{-1/\log a} = -\frac{1}{\log a} e^{-\log a/\log a}$$
$$= -\frac{1}{e \log a}.$$

Ejemplo. Mostrar que la ecuación $3^x = 5x$ tiene al menos una solución.

Sea $f(x) = 3^x - 5x$. Entonces $f(0) = 1$ y, mediante intento y corrección, hallamos un valor donde f sea negativa, a saber

$$f(2) = 9 - 10 < 0.$$

Por el teorema del valor intermedio, existe algún número x entre 2 y 0 tal que $f(x) = 0$, y este número llena nuestros requerimientos.

De los teoremas 5.1 y 5.2, por medio de un cambio de variable, podemos analizar lo que sucede cuando se compara $\log x$ con potencias de x.

Teorema 5.3. *Cuando x se vuelve grande, el cociente $x/\log x$ también se vuelve grande.*

Demostración. Nuestra estrategia es reducir este enunciado al teorema 5.1. Hacemos un cambio de variables. Sea $y = \log x$. Entonces $x = e^y$ y nuestro cociente tiene la forma

$$\frac{x}{\log x} = \frac{e^y}{y}.$$

Sabemos que $y = \log x$ se vuelve grande cuando x se vuelve grande. Y, por el teorema 5.1, lo mismo sucede con e^y/y. Esto prueba el teorema.

Corolario 5.4. *Cuando x se vuelve grande, la función $x - \log x$ también se vuelve grande.*

Demostración. Escribimos

$$x - \log x = x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right),$$

que es el factor x en la expresión $x - \log x$. Por el teorema 5.3, $(\log x)/x$ tiende a 0 cuando x se vuelve grande y, como resultado, el factor

$$1 - \frac{\log x}{x}$$

tiende a 1. El factor x se vuelve grande, por lo que el producto se vuelve grande. Esto prueba el corolario.

Observación. Hemos usado la misma técnica de factorización que la usada al analizar el comportamiento de los polinomios, como cuando escribimos

$$x^3 - 2x^2 + 5 = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}\right)$$

para ver que el término x^3 determina el comportamiento del polinomio cuando x se vuelve grande.

Corolario 5.5. *Cuando x se vuelve grande, $x^{1/x}$ tiende a 1 como límite.*
Demostración. Escribimos

$$x^{1/x} = e^{(\log x)/x}.$$

Por el teorema 5.3 sabemos que $(\log x)/x$ tiende a 0 cuando x se vuelve grande. Por lo tanto,

$$e^{(\log x)/x}$$

tiende a 1, según se deseaba.

Observación. En el corolario 4.5 usamos el hecho de que la función e^u es continua, pues cualquier función diferenciable es continua. Si u tiende a u_0 entonces e^u tiende a e^{u_0}. Así, si $u = (\log x)/x$, entonces u tiende a 0 cuando x se vuelve grande, de modo que e^u tiende a $e^0 = 1$.

VIII, §5. EJERCICIOS

1. Trazar la gráfica de la curva $y = xe^{2x}$. En éstos y otros ejercicios pueden considerarse opcionales las cuestiones de convexidad, pero suelen salir fácilmente.
Trazar las gráficas de las funciones siguientes. (En los ejercicios del 6 al 10, $x \neq 0$.)

2. xe^{-x}	3. xe^{-x^2}	4. $x^2e^{-x^2}$
5. x^2e^{-x}	6. e^x/x	7. e^x/x^2
8. e^x/x^3	9. $e^x - x$	10. $e^x + x$
11. $e^{-x} + x$		

12. Trazar la gráfica de $f(x) = x - \log x$.

13. Mostrar que la ecuación $e^x = ax$ tiene al menos una solución para cualquier número a excepto cuando $0 \leq a < e$.

14. (a) Dar valores de $x \log x$ cuando $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, en general cuando $x = 1/2^n$ para algún entero positivo n.
(b) ¿Tiende $x \log x$ a un límite cuando $x \to 0$? ¿Qué sucede con $x^2 \log x$? [*Idea:* Sea $x = e^{-y}$, donde y se hace grande.]

15. Sea n un entero positivo. Probar que $x(\log x)^n \to 0$ cuando $x \to 0$.

16. Probar que $(\log x)^n x \to 0$ cuando $x \to \infty$.

17. Trazar las curvas siguientes para $x > 0$.
(a) $y = x \log x$ (b) $y = x^2 \log x$
(c) $y = x(\log x)^2$ (d) $y = x/\log x$

18. Mostrar que la función $f(x) = x^x$ es estrictamente creciente para $x > 1/e$.

19. Trazar la curva $f(x) = x^x$ para $x > 0$.

20. Trazar la curva $f(x) = x^{-x}$ para $x > 0$.

21. Sea $f(x) = 2^x x^x$. Mostrar que f es estrictamente creciente para $x > 1/2e$.

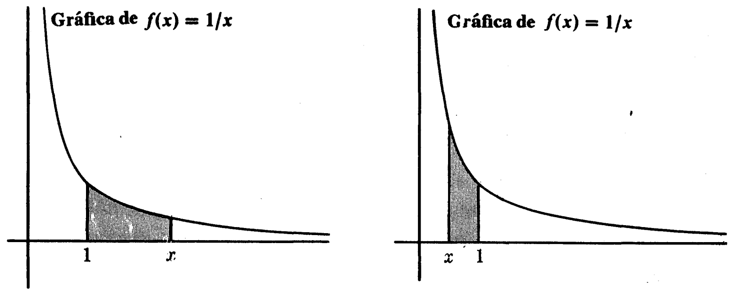
22. Hallar los límites siguientes cuando $n \to \infty$
(a) $(\log n)^{1/n}$ (b) $[(\log n)/n]^{1/n}$
(c) $(n/e^n)^{1/n}$ (d) $(n \log n)^{1/n}$

VIII, §6. EL LOGARITMO COMO EL ÁREA BAJO LA CURVA 1/x

Esta sección es interesante por sí misma, pues nos da una idea más clara de lo que es el logaritmo. También proporciona una agradable y breve introducción a la integración, la cual se analizará en la parte siguiente. Daremos una interpretación del logaritmo como el área bajo una curva.

Definimos una función $L(x)$ como el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $x \geq 1$, y el negativo del área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $0 < x < 1$. En particular, $L(1) = 0$.

La parte sombreada de la figura siguiente representa el área bajo la curva entre 1 y x. Del lado izquierdo tomamos $x > 1$.



$L(x)$ para $x > 1$ $L(x)$ para $0 < x < 1$

Si $0 < x < 1$, tendríamos la figura que se muestra a la derecha. Hemos dicho que, si $0 < x < 1$, entonces $L(x)$ es igual al negativo del área. Así, $L(x) < 0$ si $0 < x < 1$, y $L(x) > 0$ si $x > 1$.

Probaremos:

1. $L'(x) = 1/x$.
2. $L(x) = \log x$.

La primera afirmación de que $L'(x) = 1/x$ es independiente de todo lo demás en este capítulo, y lo enunciamos en un teorema separado.

Teorema 6.1. *La función $L(x)$ es diferenciable, y*

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Demostración. Formamos el cociente de Newton

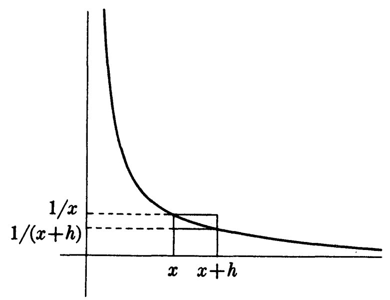
$$\frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

y debemos probar que tiende al límite $1/x$ cuando h tiende a 0.

Tomemos por el momento $x \geq 1$ y $h > 0$. Entonces, $L(x+h) - L(x)$ es el área bajo la curva entre x y $x+h$. Como la curva $1/x$ es decreciente, esta área satisface las desigualdades siguientes:

$$h\frac{1}{x+h} < L(x+h) - L(x) < h\frac{1}{x}.$$

En efecto, $1/x$ es la altura del rectángulo grande según está trazado en la figura siguiente y $1/(x+h)$ es la altura del rectángulo pequeño. Como h es la base del rectángulo, y como el área bajo la curva $1/x$ entre x y $x+h$ está entre



los dos rectángulos, vemos que satisface nuestras desigualdades. Dividimos ambos lados de las desigualdades entre el número positivo h. Entonces se preservan las desigualdades y obtenemos

$$\frac{1}{x+h} < \frac{L(x+h) - L(x)}{h} < \frac{1}{x}.$$

Cuando h tiende a 0, el cociente de Newton está comprimido entre $1/(x+h)$ y $1/x$ y en consecuencia tiende a $1/x$. Esto prueba nuestro teorema en el caso $h > 0$.

Cuando $h < 0$, usamos un argumento análogo, que dejamos como ejercicio. (Se deberá prestar atención al signo de L. Además, cuando se divida una desigualdad entre h y $h < 0$, se invertirá el sentido de la desigualdad. Sin embargo, se verá que de nuevo el cociente de Newton se comprime entre $1/x$ y $1/(x+h)$.)

Teorema 6.2. *La función $L(x)$ es igual a $\log x$.*

Demostración. Ambas funciones, $L(x)$ y $\log x$, tienen la misma derivada, a saber, $1/x$ para $x > 0$. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$L(x) = \log x + C.$$

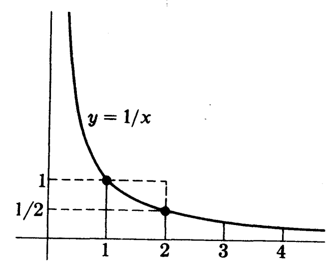
Esto es cierto para todo $x > 0$. En particular, sea $x = 1$. Obtenemos

$$0 = L(1) = \log 1 + C.$$

Pero $\log 1 = 0$. Por lo tanto, $C = 0$, y el teorema está probado.

Puede usarse la identificación de log con el área bajo la curva $1/x$ para dar desigualdades para el log. Esto es sencillo y se propone como ejercicio. También podemos obtener un estimado para e.

Ejemplo. El área bajo la curva $1/x$ entre 1 y 2 es menor que el área de un rectángulo cuya base es el intervalo $[1,2]$ y cuya altura es 1, según se muestra en la figura siguiente.



Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\log 2 < 1.$$

Como $\log e = 1$, se sigue que $2 < e$. Esto da un estimado por abajo de e.

De manera análoga obtenemos un estimado por arriba. El área bajo la curva $1/x$ entre 1 y 2 es mayor que el área del rectángulo cuya base es el intervalo $[1,2]$ y cuya altura es $1/2$, según se mostró en la figura anterior. Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\log 2 > \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\log 4 = \log(2^2) = 2\log 2 > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Como $\log e = 1$, se sigue que $e < 4$.

En los ejercicios del 16 al 19 de la sección §1 vimos otro método para obtener estimados para e. El método con el área bajo la curva se puede usar en otros contextos, y es útil por sí mismo.

VIII, §6. EJERCICIOS

1. Sea h un número positivo. Comparar el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y $1+h$ con el área de rectángulos adecuados para mostrar que
$$\frac{h}{1+h} < \log(1+h) < h.$$
2. Probar, usando el ejercicio 1, que
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log(1+h) = 1.$$
3. Probar, mediante comparación de áreas, que para todo entero positivo n tenemos
$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$
4. En lugar de usar, como en el texto, $\log 4 = \log(2^2)$, usar dos rectángulos bajo la gráfica de $1/x$, con bases $[1,2]$ y $[2,4]$, para mostrar que $\log 4 > 1$.

VIII, APÉNDICE. DEMOSTRACIÓN SISTEMÁTICA DE LA TEORÍA DE EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

En lugar de suponer las cinco propiedades básicas de la función exponencial, como en las secciones §1 y §3, pudimos dar una presentación del log y de la exponencial como sigue. Esto es sólo para quienes estén interesados en la teoría.

Comenzamos definiendo $L(x)$ como lo hicimos en la sección §6. La demostración de que $L'(x) = 1/x$ es autocontenida y produce una función L definida para todo $x > 0$ y que satisface
$$L'(x) = 1/x \qquad \text{y} \qquad L(0) = 1.$$
Como $1/x > 0$ para todo $x > 0$, se sigue que la función L es estrictamente creciente, de modo que tiene función inversa que denotamos por $x = E(y)$. Entonces, al usar la regla para la derivada de una función inversa, hallamos:
$$E'(y) = \frac{1}{L'(x)} = \frac{1}{1/x} = x = E(y).$$
Así hemos hallado una función E tal que $E'(y) = E(y)$ para todo y. En otras palabras, hemos hallado una función igual a su propia derivada.

Como $L(0) = 1$, hallamos que $E(1) = 0$.

A continuación probamos:

Para todos los números a, $b > 0$ tenemos
$$\boxed{L(ab) = L(a) + L(b).}$$

Demostración. Fijar el número a y sea $f(x) = L(ax)$. Por la regla de la cadena, obtenemos
$$f'(x) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}.$$

Como L y f tienen la misma derivada, hay una constante C tal que $f(x) = L(x) + C$ para todo $x > 0$. En particular, para $x = 1$ obtenemos
$$L(a) = f(1) = L(1) + C = 0 + C = C.$$
De modo que $L(a) = C$ y $L(ax) = L(x) + L(a)$. Esto prueba la primera propiedad.

Como $L'(x) = 1/x > 0$ para $x > 0$, se sigue que L es estrictamente creciente. Como $L''(x) = -1/x^2 < 0$, se sigue que L se dobla hacia abajo.

Sea $a > 0$. Obtenemos:
$$L(a^2) = L(a) + L(a) = 2L(a),$$
$$L(a^3) = L(a^2a) = L(a^2) + L(a) = 2L(a) + L(a) = 3L(a).$$
Al continuar de esta manera, obtenemos que, para todos los enteros positivos n:
$$L(a^n) = nL(a)$$
En particular, tómese $a > 1$. Como $L(1) = 0$, concluimos que $L(a) > 0$, pues L es estrictamente creciente. Por lo tanto, $L(a^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De nuevo, dado que L es estrictamente creciente, se sigue que $L(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

De la fórmula
$$0 = L(1) = L(aa^{-1}) = L(a) + L(a^{-1})$$
concluimos que
$$\boxed{L(a^{-1}) = -L(a).}$$
A continuación, sea x que tiende a 0. Se escribe $x = 1/y$ donde $y \to \infty$. Entonces
$$L(x) = -L(y) \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad y \to \infty$$
de modo que $L(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$.

Sea ahora E la función inversa de L. Ya probamos que $E' = E$. La función inversa de L se define en el conjunto de valores de L, que son todos los números. El conjunto de valores de E es el dominio de definición de L, que es el conjunto de los números positivos. De este modo, $E(y) > 0$ para todo y. Así, E es estrictamente creciente y $E''(y) = E(y)$ para todo y muestra que la gráfica de E se dobla hacia arriba.

Tenemos que $E(0) = 1$, pues $L(1) = 0$.

Entonces podemos probar que
$$\boxed{E(u+v) = E(u)E(v).}$$
A saber, sean $a = E(u)$ y $b = E(v)$. Por el significado de función inversa, $u = L(a)$ y $v = L(b)$. Entonces:
$$L(ab) = L(a) + L(b) = u + v.$$
Por lo tanto,
$$E(u)E(v) = ab = E(u+v),$$
como había que mostrar.

Definimos ahora $e = E(1)$. Como E es la función inversa de L, tenemos $L(e) = 1$. De la regla

$$E(u+v) = E(u)E(v)$$

obtenemos ahora que, para cualquier entero positivo n,

$$E(n) = E(1+1+\cdots+1) = E(1)^n = e^n.$$

De manera análoga,

$$E(nu) = E(u)^n.$$

Hacer $u = 1/n$. Entonces

$$e = E(1) = E\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Por consiguiente, $E(1/n)$ es la raíz n-ésima de e. A partir de ahora escribiremos

$$e^u \quad \text{en lugar de} \quad E(u).$$

A continuación tratamos con la función exponencial general.

Sea a un número positivo y x cualquier número. **Definimos**

$$\boxed{a^x = e^{x \log a}.}$$

Así,

$$a^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log a}.$$

Al hacer $u = x\log a$ y usando $\log e^u = u$, hallamos la fórmula

$$\boxed{\log a^x = x \log a.}$$

Por ejemplo,

$$\log 3^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\log 3.$$

Una vez hecha la definición general de a^x, en aquellos casos donde tenemos una idea preconcebida de lo que deberá ser a^x, por ejemplo cuando $x = n$ es un entero positivo, debemos estar seguros de que

$$e^{n\log a} \quad \text{es el producto de } a \text{ consigo mismo } n \text{ veces.}$$

Por ejemplo, tomar $x = 2$. Entonces

$$e^{2\log a} = e^{\log a + \log a} = e^{\log a}e^{\log a} = a \cdot a,$$

$$e^{3\log a} = e^{\log a + \log a + \log a} = e^{\log a}e^{\log a}e^{\log a} = a \cdot a \cdot a.$$

y así sucesivamente. Para cualquier entero positivo n tenemos

$$\begin{aligned} e^{n\log a} &= e^{\log a + \log a + \cdots + \log a} \\ &= e^{\log a}e^{\log a}\cdots e^{\log a} \\ &= a \cdot a \cdots a \quad \text{(producto tomado } n \text{ veces).} \end{aligned}$$

Entonces, si n es un entero positivo, $e^{n\log a}$ significa el producto de a consigo mismo n veces.

De manera análoga,

$$\begin{aligned} (e^{(1/n)\log a})^n &= e^{(1/n)\log a}e^{(1/n)\log a}\cdots e^{(1/n)\log a} \quad \text{(producto tomado } n \text{ veces)} \\ &= e^{(1/n)\log a + (1/n)\log a + \cdots + (1/n)\log a} \\ &= e^{\log a} \\ &= a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la n-ésima potencia de $e^{(1/n)\log a}$ es igual a a, de modo que

$$e^{(1/n)\log a} \quad \textit{es la } n\textit{-ésima raíz de } a.$$

Esto muestra que $e^{x\log a}$ es lo que se espera cuando x es un entero positivo o una fracción.

A continuación probamos otras propiedades de la función a^x. En primer lugar:

$$\boxed{a^0 = 1.}$$

Demostración. Por definición, $a^0 = e^{0\log a} = e^0 = 1$.

Para todos los números x y y tenemos

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y.}$$

Demostración. Comenzamos con el lado derecho para tener

$$\begin{aligned} a^x a^y = e^{x\log a}e^{y\log a} &= e^{x\log a + y\log a} \\ &= e^{(x+y)\log a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula.

Para todos los números x y y,

$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}.}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y\log a^x} && (\text{pues } u^y = e^{y\log u} \text{ para } u > 0) \\ &= e^{yx\log a} && (\text{pues } \log a^x = x\log a) \\ &= a^{xy} && (\text{pues } a^t = e^{t\log a}, \text{ con el valor particular } t = xy = yx) \end{aligned}$$

probando así la propiedad deseada.

Hasta aquí ya recuperamos las cinco propiedades de la función exponencial general que se usaron en las secciones §1, §2 y §3.

VIII, APÉNDICE. EJERCICIO

Suponer que no se sabe nada acerca de las funciones logaritmo y exponencial. Se nos da una función E tal que

$$E'(x) = E(x) \quad \text{para todos los números } x, \quad \text{y} \quad E(0) = 1.$$

Probar:

(a) $E(x) \neq 0$ para todo x. [*Idea:* Diferenciar el producto $E(x)E(-x)$ para mostrar que este producto es constante. Usar $E(0) = 1$ y decir cuál es la constante.]

(b) Sea f una función tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = CE(x)$.

(c) Para todos los números u y v, la función E satisface

$$E(u + v) = E(u)E(v).$$

[*Idea:* Fijar el número u y sea $f(x) = E(u + x)$. Después aplicar (b).]

Parte tres

Integración